数理解析研究所講究録
第 1816 巻 2012 年 49-56

一般線形群の表現

大阪市立大学　堀口　達也
Tatsuya Horiguchi
Osaka City University

1 はじめに

以下述べる内容は、本 *Young Tableaux*(著者 William Fulton) の内容である。この本は、組み合わせ論、表現論、幾何と３つの分野が交錯する様子を描いている。以下、その様子を一般線形群の表現を用いて述べていく。

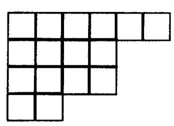
2 一般線形群の既約表現の構成

この章ではヤング図形 λ から一般線形群の既約表現 E^{λ} が定まることについてみていく。

<u>定義</u>(ヤング図形)
次の２つの条件を満たす箱の集まりをヤング図形という。
(1) 左端にある箱がそろっている。
(2)(i 行目にある箱の個数) $\geq$ ($i+1$ 行目にある箱の個数)

各 i に対して、i 行目の箱の個数がλ_iであるようなヤング図形を$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ と書く。
同様に、各 i に対して、i 列目の箱の個数がμ_iであるようなヤング図形を$\tilde{\lambda} = (\mu_1, \ldots, \mu_\ell)$ と書く。
また、各 i に対して、λの中にλ_iが a_i回現れるとすると、$\lambda = (\lambda_1{}^{a_1}, \ldots, \lambda_m{}^{a_m})$ とも書く。$\tilde{\lambda}$についても同様。

例.



$$\lambda = (6,4,4,2) = (6,4^2,2)$$
$$\tilde{\lambda} = (4,4,3,3,1,1) = (4^2,3^2,1^2)$$

E を $\mathbb{C}$ 上 m 次元ベクトル空間とする。ヤング図形λに対して、$E^{\times\lambda}$をλの各箱に E の元をいれたもので $\mathbb{C}$ 上生成されるものとする。

例. $E^{\times(2,1)}$の任意の元は次の有限形式和で書ける。

$$\Sigma a\begin{array}{|c|c|}\hline u&w\\\hline v&\multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}\quad (a\in\mathbb{C}, u,v,w\in E)$$

ここで、次の (i)〜(iii) を満たす写像$\varphi:E^{\times\lambda}\to V$ を考える。(ここに、V は $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間とする。)
(i)φ は $\mathbb{C}$ – 多重線形 (*i.e.*1 つの箱以外の箱の中の E の元を固定すると、その箱の中にある E の元に対して、$\mathbb{C}$ – 線形)
(ii)φ はλの任意の列の中にある E の元に対して、交代的 (*i.e.*φ はある列の中にある E の元が同じであるものを零にする。)
(iii)$\varphi(\mathbf{v})=\Sigma\varphi(\mathbf{w})$
ここに、$\mathbf{w}$ は、$\mathbf{v}$ の任意の 2 つの列に対して、右の列の k 個の箱を決め、それらの中にある E の元と左の列の k 個の箱の中にある E の元を垂直方向の順序を保ったまま入れ替えることにより得られるものである。

例.$\lambda=(2,2,2)$
・ k=1 のとき

$$\varphi\left(\begin{array}{|c|c|}\hline x&u\\\hline y&v\\\hline z&w\\\hline\end{array}\right)=\varphi\left(\begin{array}{|c|c|}\hline u&x\\\hline y&v\\\hline z&w\\\hline\end{array}\right)+\varphi\left(\begin{array}{|c|c|}\hline x&y\\\hline u&v\\\hline z&w\\\hline\end{array}\right)+\varphi\left(\begin{array}{|c|c|}\hline x&z\\\hline y&v\\\hline u&w\\\hline\end{array}\right)$$

・ k=2 のとき

$$\varphi\left(\begin{array}{|c|c|}\hline x&u\\\hline y&v\\\hline z&w\\\hline\end{array}\right)=\varphi\left(\begin{array}{|c|c|}\hline u&x\\\hline v&y\\\hline z&w\\\hline\end{array}\right)+\varphi\left(\begin{array}{|c|c|}\hline u&x\\\hline y&z\\\hline v&w\\\hline\end{array}\right)+\varphi\left(\begin{array}{|c|c|}\hline x&y\\\hline u&z\\\hline v&w\\\hline\end{array}\right)$$

・ k=3 のとき

$$\varphi\left(\begin{array}{|c|c|}\hline x&u\\\hline y&v\\\hline z&w\\\hline\end{array}\right)=\varphi\left(\begin{array}{|c|c|}\hline u&x\\\hline v&y\\\hline w&z\\\hline\end{array}\right)$$

注意.(i), (ii) より、$\mathbf{v}'$を $\mathbf{v}$ のある列の中にある E の 2 つの元を入れ替えたものとすると、$\varphi(\mathbf{v})=\varphi(\mathbf{v}')$ が成立。このことから、(iii) の条件の k は 1 番上にある k 個でよい。

ヤング図形λに対して、E^{λ}を次の普遍性性質を用いて定義する。

<u>定義</u>
任意の $\mathbb{C}$ 上ベクトル空間 V と任意の上の (i)〜(iii) を満たす写像$\varphi:E^{\times\lambda}\to V$ に対して、次の図式を可換にするような写像$\tilde{\varphi}:E^{\lambda}\to V$ が一意的に存在する。

$$\begin{tikzcd} E^{\times\lambda} \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi"'] & E^{\lambda} \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\ & V \end{tikzcd}$$

E^λの存在性は、$E^{\times\lambda}$を (i)〜(iii) の関係で割っていけばよい。実際、

$$E^\lambda = \wedge^{\mu_1}E \otimes \wedge^{\mu_2}E \otimes \ldots \otimes \wedge^{\mu_\ell}E/Q^\lambda(E)$$

ここに、$\tilde{\lambda} = (\mu_1, \ldots, \mu_\ell)$,
$Q^\lambda(E) = \langle \wedge\mathbf{v} - \Sigma \wedge \mathbf{w}$(和は取替条件 (iii) を動く)$|\mathbf{v}, \mathbf{w} \in E^{\times\lambda}, \wedge\mathbf{v}$ は $E^{\times\lambda} \to \otimes \wedge^{\mu_j} E$ による $\mathbf{v}$ の像 $\rangle$.
E^λは自然と $GL(E)$ の表現となる。(*i.e.*λの各箱の中にある E の元に $GL(E)$ の元が作用する。)

注意.dim$E = m, \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots), \lambda_{m+1} > 0$ とすると、定義から $E^\lambda = 0$ となる。つまり、高々 m 個の行をもつλに対する E^λが本質的なものである。

例.(1)$\lambda = (n)$ のとき、$E^\lambda = Sym^n(E)$ である。実際、条件 (ii) はこの場合はなく、条件 (i) と (iii) により、$E^{\times n}$を $Sym^n(E)$ にする。
(2)$\lambda = (1^n)$ のとき、$E^\lambda = \wedge^n(E)$ である。実際、条件 (iii) はこの場合はなく、条件 (i) と (ii) により、$E^{\times n}$を $\wedge^n(E)$ にする。

<u>定義</u>
$GL(E)$ の表現 (ρ, V) が多項式表現であるとは、$\rho : GL(E) \to GL(V)$ において、$GL(E) \subset \mathbb{C}^{m^2}, GL(V) \subset \mathbb{C}^{N^2}$(dim$E = m$,dim$V = N$) と思うことで、$\rho : (g_{11}, \ldots, g_{mm}) \mapsto (\rho_1(g_{11}, \ldots, g_{mm}), \ldots, \rho_{N^2}(g_{11}, \ldots, g_{mm}))$ とみたとき、各ρ_iが変数 $g_{11}, \ldots, g_{mm}$について多項式となっているものをいう。同様に、有理表現、正則表現が定義される。これらの定義は E, V の基底の取り方によらないことがすぐに確かめられる。

<u>定理</u> 次の (1),(2) が成立。
(1)$GL(E)$ の任意の既約な多項式表現は、E^λ(λは高々 m 個の行をもつもの) と同型である。また、$\lambda \neq \lambda'$ ならば、$E^\lambda \not\cong E^{\lambda'}$が成立。($\lambda, \lambda'$は高々 m 個の行をもつもの)
(2)$GL(E)$ の任意の既約な正則表現は、$E^\lambda \otimes D^{\otimes k}$($\lambda$は高々 m 個の行をもつもの) と同型である。ここに $D^{\otimes k}$は $GL(E)$ の 1 次表現で $g \cdot v = (det(g))^k v \quad (v \in D^{\otimes k}, k \in \mathbb{Z})$ なるものである。

注意.(2) より、$GL(E)$ の正則表現はすべて有理表現であることが分かる。

この定理の証明には、表現論の基本的事実を用いる。

<u>定義</u>(weight vector)
$v \in V$ がweight vector with weight $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ (α_iは整数) である
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \cdot v = x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} v \qquad$ for all $x \in H$
ここに、H は $GL_m(\mathbb{C})$ の元で対角行列であるもの全体を表し、$x =$diag$(x_1, \ldots, x_m)$ を表す。

<u>定義</u>(highest weight vector)
weight vector $v \in V$ がhighest weight vectorである
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B \cdot v = \mathbb{C}^* v$

ここに、B は $GL_m(\mathbb{C})$ の元で上三角行列であるもの全体を表す。

事実
V が $GL_m(\mathbb{C})$ の正則な有限次元表現とする。このとき、次が成立。
V が既約である必要十分条件は、V がhighest weight vectorをスカラー倍を除いて一意的にもつことである。さらに、2 つの表現が同型である必要十分条件は、それらのhighest weight vectorsが同じweightをもつことである。

上の定理はこの事実を用いて証明されるが、詳細は組み合わせ論の言葉で書いた方が明解なため、3 章で述べる。

3 組み合わせ論との関係

この章では、1 章で構成した $GL(E)$ の既約表現 E^λの次元が組み合わせ論の解釈を与えることについてみていく。実際それはλ上のヤング盤の個数である。

定義(numbering)
T がentriesを $[m] = \{1, \ldots, m\}$ から用いたヤング図形λ上のnumberingであるとは、ヤング図形λの各箱の中に 1〜m の数字を入れたもののことをいう。

例.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 & 1 & 5 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 5 \\ \cline{1-4} 2 & 1 & 5 & 1 \\ \cline{1-4} 1 & 3 \\ \cline{1-2} \end{array}$$:entriesを [6] から用いた ヤング図形$\lambda = (6, 4, 4, 2)$ 上のnumbering

E を $\mathbb{C}$ 上 m 次元ベクトル空間とし、$\{e_1, \ldots, e_m\}$ を E の基底とする。このとき、entriesを $[m]$ から用いたヤング図形λ上のnumbering T に対して、その各箱の数 i を添え字にもつような e_iを考えることにより、$e_T \in E^\lambda$が定まる。

例.

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 1 \\ \cline{1-1} \end{array} \text{ に対して、} e_T = \begin{array}{|c|c|} \hline e_2 & e_1 \\ \hline e_1 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

このとき、条件 (i) の多重線形性より、

$$E^\lambda = \langle e_T | T \text{ :entriesを } [m] \text{ から用いたヤング図形}\lambda\text{上のnumbering} \rangle$$

が分かる。では、E^λ の基底をなすような T の条件は何なのか。それが次のヤング盤である。

定義(ヤング盤)

T がentriesを $[m]$ から用いたヤング図形λ上のヤング盤 (Young tableau) であるとは、次の 2 つの性質をみたすnumberingのことをいう。

(1) 各行の番号が左から右へ広義単調増加

(2) 各列の番号が上から下へ狭義単調増加

例.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&3&3&5\\\hline 2&3&5&5\\\cline{1-4} 4&4&6&6\\\cline{1-4} 5&6\\\cline{1-2}\end{array}$$

:entriesを $[6]$ から用いたヤング図形$\lambda = (6,4,4,2)$ 上のヤング盤

<u>定理</u>　$\{e_1,\dots,e_m\}$ ： E の基底とすると、
$\{e_T|T$:entriesを $[m]$ から用いたヤング図形λ上のヤング盤 $\}$ は E^λの基底をなす。

<u>系</u>　$d_\lambda(m)$:entriesを $[m]$ から用いたヤング図形λ上のヤング盤の個数とすると、
$\dim(E^\lambda) = d_\lambda(m)$

この $d_\lambda(m)$ はStanleyによって与えられた。

<u>定理</u>　(Stanley)

$$d_\lambda(m) = \Pi_{(i,j)\in\lambda}\frac{m+j-i}{h(i,j)}$$

ここに、$h(i,j)$ はλの i 行 j 列目にある箱とそれより右、下にある箱の総数を表す。(フック長と呼ばれている)

最後に、2 章の定理の証明を行う。それは、2 章で述べた事実と次の補題から従う。

<u>補題</u>　E^λのhighest weight vectorはスカラー倍を除いて $e_{U(\lambda)}$(weightはλ) と一意的に定まる。ここに、$U(\lambda)$ は各 i 行のentriesがすべて i であるようなヤング盤を表す。

この補題は直接的に示される。

4　幾何との関係

この章では、2 章で構成した $GL(E)$ の既約表現 E^λがあるline bundleのalgebraic(or holomorphic) section全体と $GL(E)$ の表現として同型であるというBorel-Weilの結果についてみていく。

V を $GL(E)$ の表現とすると、$\mathbb{P}^*(V) := \{V$ の超平面 (複素余次元 1 の部分空間)$\}$ は自然な $GL(E)$ の作

用をもつ。

主張：V を $GL(E)$ の既約表現とすると、$\mathbb{P}^*(V)$ のclosed orbitはただ 1 つだけもち、それはclosed subvariety of $\mathbb{P}^*(V)$ である。特に、$V = E^\lambda$ とすると、それはpartial flag varietyである：

$$F\ell^{d_1,\dots,d_s}(E) = \{E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_s \subset E | \mathrm{codim}(E_i, E) = d_i, \quad 1 \le i \le s\}$$

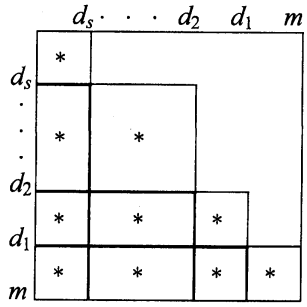
である。
ここに、$\tilde{\lambda} = (d_1^{a_1}, \dots, d_s^{a_s})$.

主張の証明のスケッチを行う。以下、$G = GL(E)$ として話をすすめていく。
まず、$\mathbb{P}^*(V)$ と $\mathbb{P}(V^*)$ は、quotient map $\pi : V \to L$ をdual map $\pi^* : L^* \hookrightarrow V^*$ に対応させることで同一視できることに注意。(L は 1 次元ベクトル空間)
V を G の表現とすると、V^* も自然と G の表現である。(i.e.$(g \cdot \varphi)(v) := \varphi(g^{-1} \cdot v), \quad g \in G, \varphi \in V^*, v \in V$.)

定義(lowest weight vector)
$\varphi \in V^*$ がlowest weight vectorである
$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B' \cdot \varphi = \mathbb{C}^* \varphi$
ここに、B' は G の元で下三角行列であるもの全体を表す。

定義(parabolic subgroup)
$\varphi \in V^*$:lowest weight vectorに対して、
$P := \{g \in G \mid g \cdot \varphi \in \mathbb{C}^* \varphi\} = \{g \in G \mid g \cdot [\varphi] = [\varphi]\}$
を G の parabolic subgroup という。

P の定義より、G/P と $G \cdot [\varphi]$ は、gP を $g \cdot [\varphi]$ に対応させることで同一視できる。また、M を G の 1 次表現とすると、$\mathbb{P}^*(V)$ と $\mathbb{P}^*(V \otimes M)$ は、quotient map $\pi : V \to L$ をquotient map $\pi \otimes 1 : V \otimes M \to L \otimes M$ に対応させることで同一視できる。2 章より、G の既約表現 V は $V = E^\lambda \otimes D^{\otimes k}$ と表されたので、$\mathbb{P}^*(V) = \mathbb{P}^*(E^\lambda)$ と同一視される。よって、$\mathbb{P}^*(E^\lambda)$ について主張を言えばよい。
3 章より、E^λ の基底として $\{e_T | T$:entriesを $[m]$ から用いたヤング図形λ上のヤング盤$\}$ がとれた。その双対基底を $\{e_T^* | T$:entriesを $[m]$ から用いたヤング図形λ上のヤング盤$\}$ とする。このとき、$(E^\lambda)^*$ のlowest weight vectorは $e^*_{U(\lambda)}$ のみ (スカラー倍を除いて) である。ここに、$U(\lambda)$ は各 i 行目のentriesがすべて i であるようなヤング図形λ上のヤング盤である。$GL(E)$ の $(E^\lambda)^*$ への作用の仕方が具体的にわかっているので、$GL_m(\mathbb{C})$ のparabolic subgroup P の元の形が次のようになることがわかる。



ここに、*のついたブロックの成分は任意の複素数、残りの成分はすべて0であるものとする。また、$\tilde{\lambda} = (d_1^{a_1}, \dots, d_s^{a_s})$ である。

$Z_i = \langle e_{d_i+1}, \dots, e_m \rangle$ とおくと ($e_1, \dots, e_m$は E の基底)、P はちょうどpartial flag $Z_1 \subset \cdots \subset Z_s$を保つものである。すなわち、

$$P = \{g \in G | g \cdot Z_i \subset Z_i, \quad 1 \leq i \leq s\}$$

とかける。$GL(E)$ は $F\ell^{d_1,\dots,d_s}(E)$ に推移的に作用するので、G/P と $F\ell^{d_1,\dots,d_s}(E)$ は gP を $g \cdot Z_1 \subset \cdots \subset g \cdot Z_s$に対応させることで同一視することができる。したがって、

$$G \cdot [e^*_{U(\lambda)}] = G/P = F\ell^{d_1,\dots,d_s}(E)$$

が成り立つので、主張の存在性が言えた。

一意性については、次の事実 (Borel's fixed point theorem の特別な場合) を用いる。

<u>事実</u>
V を $GL_m(\mathbb{C})$ の有理表現、$B' = \{$ 下三角行列 $\in GL_m(\mathbb{C})\}$ とする。Z が $\mathbb{P}^*(V)$ のalgebraic subsetで $B' \cdot Z \subset Z$ をみたすとき、$B' \cdot p = p$ となる Z の点 p が存在する。

一意性の証明に戻る。$G \cdot [v^*]$ を $\mathbb{P}^*(E^\lambda)$ のclosed orbitとすると、$B' \cdot (G \cdot [v^*]) \subset G \cdot [v^*]$ が成立。上の事実より、$B' \cdot p = p$ となる $G \cdot [v^*]$ の点 p が存在する。しかし、このような点は $p = [e^*_{U(\lambda)}]$ しかない。

$$\therefore G \cdot [v^*] = G \cdot [e^*_{U(\lambda)}] = G/P = F\ell^{d_1,\dots,d_s}(E)$$

これで主張の証明のスケッチを終える。

最後に、Borel-Weil の結果を紹介する。

$O_{E^\lambda}(1) : \mathbb{P}^*(E^\lambda)$ 上のhyperplane line bundleとする。(i.e.quotient map $\pi : E^\lambda \to L$ 上のファイバーが L であるようなline bundle.)

これを G/P に制限したline bundleを L^λとかく。このとき、次が成立。

<u>定理</u>(Borel-Weil)

$$E^\lambda \cong \Gamma(G/P, L^\lambda) \qquad (GL(E) \text{ の表現として同型})$$

ここに、$\Gamma(G/P, L^\lambda)$ は、L^λのalgebraic(or holomorphic)section全体を表す。

つまり、Borel-Weil の結果は $GL(E)$ の既約表現は幾何的に構成できることを言っている。

参考文献

[1] W.Fulton, Young tableaux. London Mathematical Society Student Texts, 35. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[2] R.P.Stanley, "Theory and applications of plane partitions," Studies in Appl.Math.1(1971),167-187 and 259-279.