数理解析研究所講究録
第 1816 巻 2012 年 103-111

スミスコホモロジーとその応用

大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate school of Sience, Osaka University

1　序

有限群が作用する空間における Smith special homology および Smith special cohomology は不動点集合の位相の研究や埋め込みなどの研究に用いられ, 変換群の研究において有効な道具である. 群の位数が 2 の場合は Gysin- Smith 完全系列が得られ, Borsuk-Ulam の定理の一つの証明の方法として使われる. 位数が奇素数の巡回群の場合にも, [4, 6] で示したように Smith special homology の完全系列を用いて Borsuk-Ulam の定理を証明することができる. 本稿では Smith special homology, cohomology について, その基本的な性質をまとめ, Borsuk-Ulam 型の定理を導くための応用の仕方を解説することにする. 応用例の一つとして, 岸本氏と著者の共著論文 [2] の結果についても紹介する.

2　Smith special homology と cohomology

以下, k を 2 以上の自然数とし, C_k を位数 k の巡回群とする. $R=\boldsymbol{Z}$ または $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$($p$ は素数) とし, $R[C_k]$ を R 上の C_k の群環とする.

X を C_k が自由に作用するようなハウスドルフ空間とするとき, X 上の C_k 作用から特異チェイン複体 $S(X;R)$ 上の C_k 作用が導かれる.

g を C_k の生成元とし,

$$\alpha = 1 + g + \cdots + g^{k-1}$$
$$\beta = 1 - g$$

とおく. 定義より $\alpha\beta=\beta\alpha=0$ である.

以下, $\rho=\beta^i (1 \leqq i \leqq k-1)$ または $\rho=\alpha$ とする. $\rho S(X;R)$ を考えると, すべての q に対して $\rho\partial=\partial\rho$, が成り立つので ($\partial$ は $S(X;R)$ の boundary operator), $\rho S(X;R)$ は $S(X;R)$ の部分チェイン複体になる. $\rho S(X;R)$ から定義される homology 群を $H_*^\rho(X;R)$ と書き Smith special homology と呼ぶ. また, コチェイン複体 $\mathrm{Hom}(\rho S(X),R)$ から定義される cohomology を Smith special cohomology と呼ぶ.

X,Y を C_k が自由に作用するようなハウスドルフ空間とし, $f\colon X\to Y$ が C_k 写像であるとき, $f_\sharp(\rho S(X;R))\subset \rho S(Y;R)$ であることは容易に確かめられる. このことから, Smith special homology には f から誘導される写像 $f_*\colon H_*^\rho(X;R)\to H_*^\rho(Y;R)$ が定義できる. 同様に, Smith special cohomology についても $f^*\colon H_\rho^*(Y;R)\to H_\rho^*(X;R)$ が定義される.

Smith special homology および cohomology について, 特に $\rho=\alpha$ のときには次のことが成り立つ.

命題 2.1([1, 3, 5]). 任意の整数 q に対して

$$H_q^{\alpha}(X;R)\cong H_q(X/C_k;R),\quad H_{\alpha}^{q}(X;R)\cong H^q(X/C_k;R).$$

以下は主に homology について書くことにするが, cohomology についても同様のことが言える.

補題 2.2([1, 3, 5]).

$$0\to\alpha S(X;R)\xrightarrow{i}S(X;R)\xrightarrow{\beta}\beta S(X;R)\to 0,$$
$$0\to\beta S(X;R)\xrightarrow{j}S(X;R)\xrightarrow{\alpha}\alpha S(X;R)\to 0.$$

はともにチェイン複体の完全系列である.

これより, 次のことが成り立つ.

定理 2.3([1, 3, 5]).

$$\cdots\to H_q^{\alpha}(X;R)\xrightarrow{i}H_q(X;R)\xrightarrow{\beta}H_q^{\beta}(X;R)\xrightarrow{\delta}H_{q-1}^{\alpha}(X;R)\to\cdots,$$

および

$$\cdots\to H_q^{\beta}(X;R)\xrightarrow{i}H_q(X;R)\xrightarrow{\alpha}H_q^{\alpha}(X;R)\xrightarrow{\delta}H_{q-1}^{\beta}(X;R)\to\cdots$$

は自然な完全系列である.

また, $k=p$(p は素数) で, $R=\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$(以下, $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ を $\boldsymbol{Z}/p$ と書く) のとき, C_p の生成元を g とすると, i に関する帰納法で

$$(-1)^i\binom{p-1}{i}\equiv 1\pmod p$$

が示され, したがって, $R[C_p]$ 上で $\beta^{p-1}=\alpha$ となる. また, このとき, $\rho=\beta^i$ に対して, $\bar\rho=\beta^{p-i}$ とおくと,

$$0\to\bar\rho S(X;\boldsymbol{Z}/p)\xrightarrow{i}S(X;\boldsymbol{Z}/p)\xrightarrow{\rho}\rho S(X;\boldsymbol{Z}/p)\to 0,$$

はチェイン複体の完全系列であり, 次のホモロジーの完全系列を得る.

定理 2.4([1, 3, 5]). ハウスドルフ空間 X に C_p が自由に作用するとき,

$$\cdots\to H_q^{\bar\rho}(X;\boldsymbol{Z}/p)\xrightarrow{i}H_q(X;\boldsymbol{Z}/p)\xrightarrow{\rho}H_q^{\rho}(X;\boldsymbol{Z}/p)\xrightarrow{\delta}H_{q-1}^{\bar\rho}(X;\boldsymbol{Z}/p)\to\cdots$$

は自然な完全系列である.

さらに, $k=p$(p は素数) のとき,

$$0\to\alpha S(X;\boldsymbol{Z}/p)\to\beta^iS(X;\boldsymbol{Z}/p)\xrightarrow{\beta}\beta^{i+1}S(X;\boldsymbol{Z}/p)\to 0,$$

もチェイン複体の完全系列であり, 次のホモロジーの完全系列を得る.

定理 2.5([1]). ハウスドルフ空間 X に C_p が自由に作用するとき,

$$\cdots \to H_q^{\alpha}(X;\boldsymbol{Z}/p) \to H_q^{\beta^i}(X;\boldsymbol{Z}/p) \xrightarrow{\beta} H_q^{\beta^{i+1}}(X;\boldsymbol{Z}/p) \to H_{q-1}^{\alpha}(X;\boldsymbol{Z}/p) \to \cdots$$

は自然な完全系列である.

3 BC_p の Smith special homology と cohomology

この節では普遍 C_p 束 $\pi\colon EC_p \to BC_p$ について, EC_p の Smith special homology および cohomology を計算する. 特に, $H_*^{\alpha}(EC_p;R) \cong H_*(BC_p;R)$, $H_{\alpha}^*(EC_p;R) \cong H^*(BC_p;R)$ なので, $H_*^{\alpha}(EC_p;R)$, $H_{\alpha}^*(EC_p;R)$ については $H_*(BC_p;R)$, $H^*(BC_p;R)$ を計算してもよい. BC_p, EC_p の胞体分割としては

$$\begin{aligned} BC_p &= \bar{e}_0 \cup \bar{e}_1 \cup \cdots \cup \bar{e}_n \cup \cdots \\ EC_p &= e_0 \cup ge_0 \cup \cdots \cup g^{n-1}e_0 \cup e_1 \cup ge_1 \cup \cdots \cup g^{n-1}e_1 \cup \cdots \\ &\qquad \cdots \cup e_n \cup ge_n \cup \cdots \cup g^{n-1}e_n \cup \cdots \end{aligned}$$

$(\pi(e_n) = \bar{e_n})$ で, CW-複体の homology を考えるとき,

$$\partial e_n = \begin{cases} e_{n-1} + ge_{n-1} + \cdots + g^{p-1}e_{n-1} & (n \text{ が偶数のとき}) \\ e_{n-1} - ge_{n-1} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

となるように取ってくることができる.

$$\partial \bar{e}_n = \begin{cases} p\bar{e}_{n-1} & (n \text{ が偶数で } n \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

であり, これより, 次のことがわかる.

命題 3.1.

$$H_n^{\alpha}(EC_p;\boldsymbol{Z}) \cong H_n(BC_p;\boldsymbol{Z}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (n = 0 \text{ のとき}) \\ \boldsymbol{Z}/p & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が偶数で } n \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases},$$

$$H_n^{\alpha}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) \cong H_n(BC_p;\boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}/p.$$

$$H_{\alpha}^n(EC_p;\boldsymbol{Z}) \cong H^n(BC_p;\boldsymbol{Z}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \boldsymbol{Z}/p & (n \text{ が偶数で } n \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases},$$

$$H_{\alpha}^n(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) \cong H^n(BC_p;\boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}/p.$$

定理 2.3 より, 完全系列

$$\cdots \to H_n(EC_p;R) \xrightarrow{\alpha} H_n^{\alpha}(EC_p;R) \xrightarrow{\delta} H_{n-1}^{\beta}(EC_p;R) \to \cdots$$

を得る. $H_n(EC_p;R)$ は $n \geqq 1$ では 0 なので, $n \geqq 2$ で $H_n^{\alpha}(EC_p;R) \cong H_{n-1}^{\beta}(EC_p;R)$ である. $n=1$ でも $H_0(EC_p;R) \to H_0^{\alpha}(EC_p;R)$ が同型写像であることから, この完全系列より $H_1^{\alpha}(EC_p;R) \cong H_0^{\beta}(EC_p;R)$ がわかる. コホモロジーでも同様に, この完全系列を用いて $H_{\beta}^{n}(EC_p;R)$ を計算することができる.

命題 3.2.

$$H_n^{\beta}(EC_p;\boldsymbol{Z}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z}/p & (n\text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases},$$

$$H_n^{\beta}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) \cong \boldsymbol{Z}/p.$$

$$H_{\beta}^{n}(EC_p;\boldsymbol{Z}) \cong \begin{cases} 0 & (n\text{ が偶数のとき}) \\ \boldsymbol{Z}/p & (n\text{ が奇数のとき}) \end{cases},$$

$$H_{\beta}^{n}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) \cong \boldsymbol{Z}/p.$$

注意. 上では BC_p の homology, cohomology と完全系列を用いて Smith special homology および cohomology の計算をしたが, 定義にしたがって計算してもそれほど難しくはない.

係数が $\boldsymbol{Z}/p$ のときには, $\rho = \beta^i\,(i=1,2,\ldots,p-1)$ に対して次が成り立つ.

命題 3.3.

$$H_{\rho}^{n}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) \cong \boldsymbol{Z}/p, \quad H_{\rho}^{n}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) \cong \boldsymbol{Z}/p.$$

証明. 定理 2.5 より

$$\cdots \to H_0^{\alpha}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) \to H_0^{\beta^i}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) \xrightarrow{\beta} H_0^{\beta^{i+1}}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) \to 0$$

なので, $H_0^{\beta^i}(EC_p;R) \to H_0^{\beta^{i+1}}(EC_p;R)$ がすべての i 　に対して全射であることより,

$$1 = \dim H_0^{\beta}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) \geqq \dim H_0^{\beta^2}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) \geqq$$
$$\ldots \geqq \dim H_0^{\beta^{p-1}}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) = \dim H_0^{\alpha}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) = 1.$$

したがって, すべての $i\,(1 \leqq i \leqq p-1)$ に対して $H_0^{\beta^i}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \cong \boldsymbol{Z}/p$ である.

また, 定理 2.4 より

$$\begin{aligned}\cdots \to H_n(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H_n^{\beta^i}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p)\\ \to H_{n-1}^{\beta^{p-i}}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H_{n-1}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to \cdots\end{aligned}$$

が完全であることを用いると, すべての $i(1 \leqq i \leqq p-1)$ に対して, $H_0(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H_0^{\beta^i}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p)$ が同型であること, $n \geqq 1$ に対しては $H_n(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) = 0$ が成り立つことより, 数学的帰納法を使って, すべての自然数 n について $H_n^{\beta^i}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \cong \boldsymbol{Z}/p$ がすべての $i(1 \leqq i \leqq p-1)$ で成り立つことが証明できる. cohomology についても同様である. ∎

定理 2.5 の完全系列

$$\cdots \to H_n^{\alpha}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H_n^{\beta^i}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \xrightarrow{\beta} H_n^{\beta^{i+1}}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to \cdots$$

を考えるとき, 命題 3.3. より, すべての homology が $\boldsymbol{Z}/p$ と同型になっていることがわかる. このことから, 次のことがわかる.

命題 3.4. (1) $i_*\colon H_n^{\alpha}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H_n^{\beta^i}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p)$ は n が奇数のとき同型であり, n が偶数のとき自明な準同型である.
(2) $\beta\colon H_n^{\beta^i}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H_n^{\beta^{i+1}}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p)$ は n が奇数のとき自明な準同型であり, n が偶数のとき同型である.

cohomology についても同様に,
(1') $i^*\colon H^n_{\beta^i}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H^n_{\alpha}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p)$ は n が奇数のとき同型であり, n が偶数のとき自明な準同型である.
(2') $\beta^*\colon H^n_{\beta^{i+1}}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H^n_{\beta^i}(EC_p; \boldsymbol{Z}/p)$ は n が奇数のとき自明な準同型であり, n が偶数のとき同型である.

4 Smith special cohomology の応用

この節では Smith special cohomology を用いて Borsuk-Ulam 型定理について考える. homology でも同様のことはできるが, Borsuk-Ulam 型の定理に関係する応用の中では cohomology が用いられることが多いのでここでも cohomology で記述することにする.

位数が奇素数の場合の Borsuk-Ulam の定理については [4, 6] でも書いてあるが, ここで復習しておこう.

定理 4.1. p を奇素数とし, n を奇数とする. S^n に自由に C_p が作用しているとするとき, $f\colon S^n \to EC_p$ を同変写像とすると, f から定まる写像 $\bar{f}\colon S^n/C_p \to$

BC_p から誘導される cohomology の準同型 $\bar{f}^*\colon H^n(BC_p;\boldsymbol{Z}/p) \to H^n(S^n/C_p;\boldsymbol{Z}/p)$ は同型写像である.

注意. 上で n を奇数としたのは, n が偶数のときには C_p が自由に作用しないためである.

定理 4.1 の証明. 以下, 記述を簡単にするために, cohomology の係数の $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ を省略して書くことにする.

自然な同型 $H^n(BC_p) \cong H^n_\alpha(EC_p)$, $H^n(S^n/C_p) \cong H^n_\alpha(S^n)$ が成り立つので, Smith special cohomology の準同型 $(f^*_\alpha)^n : H^n_\alpha(EC_p) \to H^n_\alpha(S^n)$ について調べればよい. 次の可換図式を考えよう. Theorem 2.3 より, 水平方向は完全系列になっている.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0_\alpha(EC_p) \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "f^*_\alpha"] & H^0(EC_p) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "f^*"] & H^0_\beta(EC_p) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f^*_\beta"] & H^1_\alpha(EC_p) \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "f^*_\alpha"] & H^1(EC_p) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & H^0_\alpha(S^n) \arrow[r, "\alpha^*"] & H^0(S^n) \arrow[r, "i^*"] & H^0_\beta(S^n) \arrow[r, "\delta"] & H^1_\alpha(S^n) \arrow[r, "\alpha^*"] & H^1(S^n) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{n-1}_\beta(EC_p) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f^*_\beta"] & H^n_\alpha(EC_p) \arrow[r, "\alpha^*"] \arrow[d, "f^*_\alpha"] & H^n(EC_p) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "f^*"] & H^n_\beta(EC_p) \arrow[r] \arrow[d, "f^*_\beta"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{n-1}_\beta(S^n) \arrow[r, "\delta"] & H^n_\alpha(S^n) \arrow[r, "\alpha^*"] & H^n(S^n) \arrow[r, "i^*"] & H^n_\beta(S^n) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

容易に $(\alpha^*)^0 : H^0_\alpha(S^n) \to H^0(S^n)$ が同型であることがわかる. $(\alpha^*)^0 : H^0_\alpha(EC_p) \to H^0(EC_p)$ および $(f^*)^0 : H^0(S^n) \to H^0(S^n)$ も同型なので, 上の図式の可換性より $(f^*_\alpha)_0 : H^0_\alpha(EC_p) \to H^0_\alpha(S^n)$ も同型である.

同様にして, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0_\beta(EC_p) \arrow[r, "\beta^*"] \arrow[d, "f^*_\beta"] & H^0(EC_p) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "f^*"] & H^0_\alpha(EC_p) \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "f^*_\alpha"] & H^1_\beta(EC_p) \arrow[r, "\beta^*"] \arrow[d, "f^*_\beta"] & H^1(EC_p) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & H^0_\beta(S^n) \arrow[r, "\beta^*"] & H^0(S^n) \arrow[r, "j^*"] & H^0_\alpha(S^n) \arrow[r, "\delta'"] & H^1_\beta(S^n) \arrow[r, "\beta^*"] & H^1(S^n) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{n-1}_\alpha(EC_p) \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "f^*_\alpha"] & H^n_\beta(EC_p) \arrow[r, "\beta^*"] \arrow[d, "f^*_\beta"] & H^n(EC_p) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "f^*"] & H^n_\alpha(EC_p) \arrow[r] \arrow[d, "f^*_\alpha"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{n-1}_\alpha(S^n) \arrow[r, "\delta'"] & H^n_\beta(S^n) \arrow[r, "\beta^*"] & H^n(S^n) \arrow[r, "j^*"] & H^n_\alpha(S^n) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

より $(f^*_\beta)^0 : H^0_\beta(EC_p) \to H^0_\beta(S^n)$ が同型であることが示される.

$n > 1$ のときは, $H^1(S^n) = 0$ と $(i^*)^0 = 0$ より, $(\delta)^1 : H^0_\beta(S^n) \to H^1_\alpha(S^n)$ は同型である. 同様にして, $(\delta')^1 : H^0_\alpha(S^n) \to H^1_\beta(S^n)$ も同型である. また, $(\delta)^1 : H^0_\beta(EC_p) \to H^1_\alpha(EC_p)$ および $(\delta')^1 : H^0_\alpha(EC_p) \to H^1_\beta(EC_p)$ も同型である. $(f^*_\alpha)^1 \circ (\delta)^1 = (\delta)^1 \circ (f^*_\beta)^0$ および $(f^*_\beta)^1 \circ (\delta')^1 = (\delta')^1 \circ (f^*_\alpha)^0$ から, $(f^*_\alpha)^1 : H^1_\alpha(EC_p) \to H^1_\alpha(S^n)$ と $(f^*_\beta)^1 : H^1_\beta(EC_p) \to H^1_\beta(S^n)$ が同型であることがわかる ($H^1_\alpha(S^n) \cong H^1_\beta(S^n) \cong \boldsymbol{Z}/p$ となっている).

これを繰り返すことにより, ($n = 1$ のときを含めて)$0 \leqq k \leqq n-1$ で $(f^*_\alpha)^k : H^k_\alpha(EC_p) \to H^k_\alpha(S^n)$ と $(f^*_\beta)^k : H^k_\beta(EC_p) \to H^k_\beta(S^n)$ が同型であることがわかる ($H^k_\alpha(S^n) \cong H^k_\beta(S^n) \cong \boldsymbol{Z}/p$ である).

上の２つの可換図式で

$$0 \to H_\beta^{n-1}(S^n) \xrightarrow{\delta} H_\alpha^n(S^n) \xrightarrow{\alpha^*} H^n(S^n) \xrightarrow{j^*} H_\beta^n(S^n) \to 0$$
$$0 \to H_\alpha^{n-1}(S^n) \xrightarrow{\delta'} H_\beta^n(S^n) \xrightarrow{\beta^*} H^n(S^n) \xrightarrow{j^*} H_\alpha^n(S^n) \to 0$$

がともに完全であることから $H_\alpha^n(S^n) \cong \boldsymbol{Z}/p$, $H_\beta^n(S^n) \cong \boldsymbol{Z}/p$ であり, $\delta\colon H_\beta^{n-1}(S^n) \to H_\alpha^n(S^n)$ は同型写像である. $(f_\beta^*)^{n-1} : H_\beta^{n-1}(EC_p) \to H_\beta^{n-1}(S^n)$ が同型であり, $(f_\alpha^*)^n \circ (\delta)^n = (\delta)^n \circ (f_\beta^*)^{n-1}$ が成り立っていることから, $(f_\alpha^*)^n\colon H_\alpha^n(EC_p) \to H_\alpha^n(S^n)$ は同型写像である.∎

この定理より, C_p-作用の Borsuk-Ulam の定理が得られる.

系 4.2. p を奇素数とし, S^m, S^n に自由に C_p が作用しているとするとき, 同変写像 $f\colon S^m \to S^n$ が存在するならば, $m \leqq n$ である.

証明. 同変写像 $f\colon S^m \to S^n$ が存在するとき, 同変写像 $g\colon S^n \to EC_p$ が存在し, 定理 4.1 より $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\colon H^m(BC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H^m(S^m/C_p; \boldsymbol{Z}/p)$ は同型写像である. したがって, $H^m(S^n/C_p; \boldsymbol{Z}/p) \neq 0$ でなければならない. これより $m \leqq n$ である. ∎

定理 4.1 および系 4.2 の証明と同様にして, 次のことを示すことができる.

命題 4.3. X が n 連結で C_p が X および S^m に自由に作用するとき, X から S^m への同変写像が存在するならば $m \geqq n+1$ である.

このように EC_p への同変写像から定まる軌道空間の間の cohomology の準同型を調べることにより同変写像の存在を調べることができる. 命題 4.3 では n 連結の場合について書いたが, n 連結でない場合にも次のようなことが成り立つ.

定理 4.4([2]). X を C_p が自由に作用するハウスドルフ空間とする. $H^n(X; \boldsymbol{Z}/p) = 0$ で, 同変写像 $f\colon X \to EC_p$ が $(\bar{f}^*)^n \neq 0\colon H^n(BC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H^n(X/C_p; \boldsymbol{Z}/p)$ を満たすとき, $(\bar{f}^*)^{n+1}\colon H^{n+1}(BC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H^{n+1}(X/C_p; \boldsymbol{Z}/p)$ は自明な準同型ではない.

証明. n が奇数のとき, 命題 3.4 より, $i^*\colon H_\beta^n(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H_\alpha^n(EC_p; \boldsymbol{Z}/p)$ は同型写像. $(\bar{f}^*)^n \neq 0\colon H^n(BC_p; \boldsymbol{Z}/p) \to H^n(X/C_p; \boldsymbol{Z}/p)$ より, $(f_\alpha^*)^n \neq 0$. よって, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} H_\beta^n(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{i^*} & H_\alpha^n(EC_p; \boldsymbol{Z}/p) \\ (f_\beta^*)^n \downarrow & & (f_\alpha^*)^n \downarrow \\ H_\beta^n(X; \boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{i_X^*} & H_\alpha^n(X; \boldsymbol{Z}/p) \end{array}$$

を考えると, $(f_\beta^*)^n \neq 0$ がわかる. 定理 2.3 の完全系列からできる可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \xrightarrow{\alpha^*} & H^n(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{i^*} & H_\beta^n(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{\delta} & H_\alpha^{n+1}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) & \to \cdots \\
& (f^*)^n \downarrow & & (f_\beta^*)^n \downarrow & & (f_\alpha^*)^{n+1} \downarrow & \\
\cdots \xrightarrow{\alpha^*} & H^n(X;\boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{i_X^*} & H_\beta^n(X;\boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{\delta_X} & H_\alpha^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}/p) & \to \cdots
\end{array}$$

で $H^n(X;\boldsymbol{Z}/p)=0$ より, δ_X^* は単射. したがって,

$$(f_\alpha^*)^{n+1}\circ\delta^{n+1}=\delta_X^{n+1}\circ(f_\beta^*)^n\neq 0\,.$$

よって, n が奇数のときに $(f_\alpha^*)^{n+1}\neq 0$ がわかる.

n が偶数のとき, 定理 2.3 の完全系列からできる可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \xrightarrow{\beta^*} & H^n(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{j^*} & H_\alpha^n(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{\delta'} & H_\beta^{n+1}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) & \to \cdots \\
& (f^*)^n \downarrow & & (f_\alpha^*)^n \downarrow & & (f_\beta^*)^{n+1} \downarrow & \\
\cdots \xrightarrow{\beta^*} & H^n(X;\boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{j_X^*} & H_\alpha^n(X;\boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{\delta'_X} & H_\beta^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}/p) & \to \cdots
\end{array}$$

において, $H^n(X;\boldsymbol{Z}/p)=0$ なので δ'_X が単射であることと, $(f_\alpha^*)^n\neq 0$ であることより $(f_\beta^*)^{n+1}\circ(\delta')^{n+1}=(\delta'_X)^{n+1}\circ(f_\alpha^*)^n$ を用いて $(f_\beta^*)^{n+1}\neq 0$ が証明できる.

$(f_\alpha^*)^{n+1}=0$ が成り立つと仮定すると,
定理 2.3 の完全系列からできる可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots \xrightarrow{\alpha^*} & H^n(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{i^*} & H_\beta^n(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{\delta} & H_\alpha^{n+1}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) & \to \cdots \\
& (f^*)^n \downarrow & & (f_\beta^*)^n \downarrow & & (f_\alpha^*)^{n+1} \downarrow & \\
\cdots \xrightarrow{\alpha^*} & H^n(X;\boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{i_X^*} & H_\beta^n(X;\boldsymbol{Z}/p) & \xrightarrow{\delta_X} & H_\alpha^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}/p) & \to \cdots
\end{array}$$

において, $\delta_X\colon H_\beta^n(X;\boldsymbol{Z}/p)\to H_\alpha^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}/p)$ が単射であることと, $(f_\alpha^*)^{n+1}=0$ より $(f_\alpha^*)^{n+1}\circ\delta^{n+1}=\delta_X^{n+1}\circ(f_\beta^*)^n$ を用いて, $(f_\beta^*)^n=0$ がいえる. 完全系列

$$0\to\boldsymbol{Z}\xrightarrow{p}\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Z}/p\to 0$$

より次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{cccc}
\cdots\to & H_\beta^n(EC_p;\boldsymbol{Z}) & \to & H_\beta^n(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) \\
& \tilde{f}_\beta^*\downarrow & & f_\beta^*\downarrow \\
\cdots\to & H_\beta^n(X;\boldsymbol{Z}) & \to & H_\beta^n(X;\boldsymbol{Z}/p)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\to & H_\beta^{n+1}(EC_p;\boldsymbol{Z}) & \to & H_\beta^{n+1}(EC_p;\boldsymbol{Z}) & \to & H_\beta^{n+1}(EC_p;\boldsymbol{Z}/p) & \to \\
(1) & \tilde{f}_\beta^*\downarrow & & \tilde{f}_\beta^*\downarrow & (2) & f_\beta^*\downarrow & \\
\to & H_\beta^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}) & \to & H_\beta^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}) & \to & H_\beta^{n+1}(X;\boldsymbol{Z}/p) & \to
\end{array}$$

ここで, 係数が $\boldsymbol{Z}$ の Smith special cohomology における f から導かれる準同型は係数が $\boldsymbol{Z}/p$ の場合と区別するために $\tilde{f}^*_\beta$ と書いている.

n が偶数であることより, $H^n_\beta(X;\boldsymbol{Z})=0$ である. このことから, 可換図式の (1) の部分で $H^n_\beta(EC_p;\boldsymbol{Z}/p)\to H^{n+1}_\beta(EC_p;\boldsymbol{Z})$ は同型である. このことと $(f^*_\beta)^n=0$ であることから $(\tilde{f}^*_\beta)^{n+1}\colon H^{n+1}_\beta(X;\boldsymbol{Z})\to H^{n+1}_\beta(X;\boldsymbol{Z})$ は自明な準同型 (つまり $(\tilde{f}^*_\beta)^{n+1}=0$) である.

また, 可換図式の (2) の部分で $H^{n+1}_\beta(EC_p;\boldsymbol{Z})\to H^{n+1}_\beta(EC_p;\boldsymbol{Z}/p)$ は同型となり, $(f^*_\beta)^{n+1}\neq 0$ であることから $(\tilde{f}^*_\beta)^{n+1}\colon H^{n+1}_\beta(X;\boldsymbol{Z})\to H^{n+1}_\beta(X;\boldsymbol{Z})$ は自明な準同型とはならない. これは上の (1) の部分から得た結果と矛盾する.

したがって, n が偶数のときも $(f^*_\alpha)^{n+1}\neq 0$ である.

$(f^*_\alpha)^{n+1}\neq 0$ なので, $(\bar{f}^*)^{n+1}\colon H^{n+1}(BC_p;\boldsymbol{Z}/p)\to H^{n+1}(X/C_p;\boldsymbol{Z}/p)$ は自明な準同型ではない. ∎

この定理から, X が n 連結でないような場合に, 次のような Borsuk-Ulam の定理の一般化を得る.

系 4.5. X を 不動点を持たない C_p-CW 複体とし, $H^n(X;\boldsymbol{Z}/p)=0$ をみたすものとする. 分類写像 $f\colon X/C_p\to BC_p$ に対して, $(f^*)^n\colon H^n(BC_p;\boldsymbol{Z}/p)\to H^n(X/C_p;\boldsymbol{Z}/p)$ が $(f^*)^n\neq 0$ をみたすとき, 自由な C_p 作用を考えた球面 S^m に対して C_p 写像 $g\colon X\to S^m$ が存在するならば, $m\geqq n+1$ である.

証明. C_p 写像 $h\colon S^m\to EC_p$ が存在して, C_p 写像 $h\circ g\colon X\to EC_p$ から定まる軌道空間の間の写像は分類写像である. したがって, $((\overline{h\circ g})^*)^n\neq 0\colon H^n(BC_p;\boldsymbol{Z}/p)\to H^n(X/C_p;\boldsymbol{Z}/p)$ であり, $H^n(X;\boldsymbol{Z}/p)=0$ であることから, $(\bar{g}^*)^{n+1}\circ(\bar{h}^*)^{n+1}=((\overline{h\circ g})^*)^{n+1}\neq 0$. これより $H^{n+1}(S^m/C_p;\boldsymbol{Z}/p)\neq 0$ なので $m\geqq n+1$ である. ∎

References

[1] G. E. Bredon, Introduction to compact transformation groups. Pure and Applied Mathematics, Vol. 46. Academic Press, 1972.

[2] Y. Hara and D. Kishimoto, *Borsuk-Ulam theorem and weights of cohomology classes*, preprint

[3] K. Kawakubo, The theory of transformation groups. Oxford University Press, 1991.

[4] I. Nagasaki, T. Kawakami, Y. Hara and F. Ushitaki, *The Smith homology and Borsuk-Ulam type theorems,* Far East J. Math. Sci. **38**(2010), no. 2, 205–216.

[5] W. T. Wu, A theory of imbedding, immersion, and isotopy of polytopes in a euclidean space. Science Press, Peking 1965.

[6] 長崎生光, 川上智博, 原靖浩, 牛瀧文宏, The Smith homology and a generalized Borsuk-Ulam Theorem, 数理解析研究所講究録 1670「変換群論の新たな展開」(2009), 34–39