数理解析研究所講究録
第1817巻2012年38-51

ホロ球面の幾何による双曲空間の特徴付けについて

筑波大学 数学系　伊藤 光弘
Mitsuhiro Itoh
Institute of Mathematics, University of Tsukuba

東京電機大学 情報環境学部　佐藤 弘康
Hiroyasu Satoh
School of Information Environment, Tokyo Denki University

1 はじめに

1.1 Hadmard 多様体とホロ球面

(X, g) を n 次元 Hadamard 多様体，つまり，完備，単連結，非正曲率 Riemann 多様体とする．このとき，X には理想境界とよばれる多様体 ∂X が自然の定まる．理想境界とは，X 上の弧長をパラメーターとする半開測地線[*1]全体の集合 $\{\gamma : [0, \infty) \to X \mid \|\dot{\gamma}(t)\| = 1\}$ 上の同値関係「$\gamma_1 \sim \gamma_2 \iff \exists C > 0, \forall t \geq 0, d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) < C$」に関する同値類の集合として定義される空間である．$\theta \in \partial X$ の代表元となる測地線 γ を本稿では「θ に収束する測地線」とよぶことにする．$X \cup \partial X$ には n 次元円板に同相となるような位相が定まる．Cartan-Hadamard の定理と「任意の測地線 γ' と任意の点 $p \in X$ に対し，$\gamma(0) = p$ かつ $\gamma \sim \gamma'$ を満たす半開測地線 γ が唯一つ存在する（[5, Proposition 1.2] を参照)」ことから，∂X は $(n-1)$ 次元球面 $S^{(n-1)}(\simeq U_pX \subset T_pX)$ と同相である．

1 点 $o \in X$ を固定し，$\theta \in \partial X$ に対して

$$B_\theta(x) = \lim_{t \to \infty} (d(\gamma(t), x) - t) \tag{1.1}$$

で定義される関数[*2]$B_\theta : X \to \mathbb{R}$ を **Buseman** 関数とよぶ．ただし，γ は o を始点とし θ

[*1] 以後，測地線はすべて弧長パラメーターであるとする．

[*2] 一般には半開測地線 γ に対して定まる X 上の関数として定義する．Hadamard 多様体において 1 点 $o \in X$ を固定するとき，o を始点とする測地線を定めることと理想境界上の点を定めることは同値であ

に収束する測地線とする．Busemann 関数は C^1 級凸関数かつ $\|\nabla B_\theta\| = 1$[*3]を満たす関数として特徴づけられる [18]．Busemann 関数の等位超曲面

$$H_{(x,\theta)} = \{y \in X \mid B_\theta(y) = B_\theta(x)\} \tag{1.2}$$

を $\theta \in \partial X$ を中心とし，$x \in X$ を通るホロ球面とよぶ．ホロ球面 $H = H_{(x,\theta)}$ の法線ベクトル場 $\nu = -\nabla B_\theta$ に関する形作用素を $\mathcal{S}_{(x,\theta)}$（または $\mathcal{S}_H$），第 2 基本形式を $h_{(x,\theta)}$ と書く．つまり，

$$h_{(x,\theta)}(v, w) = g(\mathcal{S}_H v, w) = -\mathrm{Hess}(B_\theta)(v, w) \tag{1.3}$$

と定義する．

1.2 目的と主結果

本稿の目的は Hadamard 多様体内のホロ球面族の性質によって（実，複素，四元数）双曲空間の特徴付けを与えるいくつかの結果について述べることである．

1 つ目はホロ球面族の主曲率による特徴付けである；

定理 1.1 ([12])**.** (X^n, g) を Hadamard 多様体とする．X の各ホロ球面 $H_{(x,\theta)}$ が全臍的かつ主曲率が各ホロ球面上一定値 $k = k_{(x,\theta)}$ で，k は $x \in X$ にも $\theta \in \partial X$ にも依らないとする．このとき，(X, g) はユークリッド空間 $E^n_{\mathbb{R}}$ $(k = 0)$，または断面曲率 $-k^2$ の実双曲空間 $H^n_{\mathbb{R}}$ $(k < 0)$ である．さらに，このとき各ホロ球面は平坦である．

定理 1.2 ([12])**.** (X^{2m}, g, J) を nearly Kähler[*4] Hadamard 多様体とする $(m \geq 2)$．各ホロ球面の構造ベクトル ξ $(= -J\nabla B_\theta)$ が主曲率 $k = k_{(x,\theta)}$ の主方向ベクトルであり[*5]，k は $x \in X$ にも $\theta \in \partial X$ にも依らないとする．このとき，(X, g) は複素ユークリッド空間 $E^m_{\mathbb{C}}$ $(k = 0)$，または正則断面曲率 $-k^2$ の複素双曲空間 $H^m_{\mathbb{C}}$ $(k < 0)$ である．さらに，このとき各ホロ球面は自然に導入される概接触計量構造に関して佐々木空間形である．

定理 1.3 ([12])**.** $(X^{4m}, g, \{J_1, J_2, J_3\})$ を四元数 Kähler[*6] Hadamard 多様体とする $(m \geq 2)$．各ホロ球面の構造ベクトルの三つ組 $\{\xi_i\ (= -J_i \nabla B_\theta)\}$ が主曲率 $k = k_{(x,\theta)}$ の

る．

[*3] x を始点とし，$\theta \in \partial X$ に収束する測地線を $\sigma(t)$ とすると $\nabla B_\theta(x) = -\dot{\sigma}(0)$ となる．

[*4] 概 Hermite 構造 (J, g) が **nearly Kähler** であるとは，任意の接ベクトル v に対し，$(\nabla_v J)v = 0$ が成り立つときをいう．

[*5] 一般に，概 Hermite 多様体 $(\bar{M}, J, \bar{g})$ 内の超曲面 M と M 上の単位法線ベクトル場 ν に対し，各点で $J\nu$ が M の主方向ベクトルとなるとき，M を $\bar{M}$ の **Hopf** 超曲面という．

[*6] (M, g) を $4m$ 次元 Riemann 多様体とし，$\mathcal{V}$ を $\mathrm{End}(TM)$ の 3 次元部分束で，「M の各点で $J_1^2 = J_2^2 = J_3^2 = -\mathrm{Id}$，$J_1 J_2 = J_3$ を満たす局所枠場 $\{J_i\}$ が存在する」とする（このような $\mathcal{V}$ を M の四元

主方向ベクトルであり，k は $x \in X$ にも $\theta \in \partial X$ にも依らないとする．このとき，(X,g) は四元数ユークリッド空間 $E^m_{\mathbb{H}}$ $(k=0)$，または Q-断面曲率 $-k^2$ の四元数双曲空間 $H^m_{\mathbb{H}}$ $(k<0)$ である．

2 つ目は漸近的調和 Hadamard 多様体の剛性定理による特徴づけである．一般に共役点を持たない Riemann 多様体 M^n に対し，すべてのホロ球面が平均曲率一定で，その値が $x \in M$ にも $\theta \in \partial M$ にもよらないとき，M は漸近的調和であるという（[8]）．漸近的調和 Hadamard 多様体のホロ球面の平均曲率は体積エントロピーとよばれる不変量と関係がある．Riemann 多様体 M に対し，

$$\rho = \rho(M) := \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \log \mathrm{vol}(B(p;r)) \tag{1.4}$$

を M の体積エントロピーとよぶ．ただし $B(p;r)$ は中心が $p \in M$，半径 r の測地球とする．(1.4) の右辺は $p \in M$ の選び方に依らないことに注意する（[17]）．M がコンパクトの場合は M の普遍被覆空間 $\tilde{M}$ における体積増大度を M の体積エントロピーとする．漸近的調和 Hadamard 多様体については以下のことが成り立つ．

定理 1.4 ([13])**.** (X^n,g) を n 次元漸近的調和 Hadamard 多様体とし，ホロ球面の平均曲率を $-\frac{c}{n-1}$ とする（つまり，$\Delta B_\theta = -c$）．このとき，$c=\rho$ である．

この定理 1.4 と定理 1.1, 1.2, 1.3 から，それぞれ次の漸近的調和 Hadamard 多様体についての剛性定理を得る；

定理 1.5 ([13])**.** (X^n,g) を漸近的調和 Hadamard 多様体とし，$\mathrm{Ric} \geq -(n-1)$*7とする．このとき，体積エントロピーは $\rho \leq (n-1)$ を満たす．また，等号成立は (X,g) が実双曲空間のときに限る．

複素と四元数の場合は，Ricci テンソルの有限性についての条件の他に，第 2 基本形式の構造ベクトルにおける値に関する仮定が必要である．

定理 1.6 ([13])**.** (X^{2m},g,J) を漸近的調和，nearly Kähler Hadamard 多様体とし，$\mathrm{Ric} \geq -2(m+1)$ とする．さらに，任意のホロ球面に対して $h_{(x,\theta)}(\xi,\xi) \leq -2$ を仮定する．このとき，$\rho \leq 2m$ が成り立つ．また，等号成立は (X,g,J) が正則断面曲率 -4 の複

数構造という）．さらに，(i) g が上の各 J_i に対して不変，(ii) g の Levi-Civita 接続に対して，$\mathcal{V}$ が平行のとき，$(M,g,\mathcal{V})$ を四元数 **Kähler** 構造という（[9] を参照）．

*7 本質的な条件は Ricci テンソルが下に有界であるということ．計量を適当に定数倍し，$\mathrm{Ric} \geq -(n-1)$ となるよう正規化する．

素双曲空間のときに限る．

定理 **1.7** ([13]). $(X^{4m}, g, \{J_1, J_2, J_3\})$ を漸近的調和，四元数 Kähler Hadamard 多様体とし，スカラー曲率が $s \geq -16m(2m+1)$[*8]を満たすとする（$m \geq 2$）．さらに，$\sum_{i=1}^{3} h_{(x,\theta)}(\xi_i, \xi_i) \leq -6$ を仮定する．このとき，$\rho \leq 2(2m+1)$ が成り立つ．また，等号成立は $(X, g, \{J_1, J_2, J_3\})$ が Q-断面曲率 -4 の四元数双曲空間のときに限る．

コンパクト Riemann 多様体についての剛性定理は Ledrappier-Wang により得られている [16]．定理 1.5, 1.6, 1.7 は Ledrappier-Wang の定理の非コンパクト・漸近的調和版とみることができる；

定理 **1.8** ([16, Theorem 2]). (M^n, g) をコンパクト Riemann 多様体とし，$\mathrm{Ric} \geq -(n-1)$ とする．このとき，M の正規被覆 $\pi : \tilde{M} \to M$ に対し，$\rho(\tilde{M}) \leq (n-1)$ が成り立つ．また，等号成立は $(\tilde{M}, g)$ が実双曲空間のときに限る．

定理 **1.9** ([16, Theorem 3]). (M^{2m}, g) をコンパクト Kähler 多様体とし，双正則断面曲率が $K_{\mathbb{C}} \geq -2$ であるとする．このとき，M の正規被覆 $\pi : \tilde{M} \to M$ に対し，$\rho(\tilde{M}) \leq 2m$ が成り立つ．また，等号成立は $(\tilde{M}, \tilde{g})$ が複素双曲空間のときに限る．

定理 **1.10** ([16, Theorem 4]). (M^{4m}, g) をコンパクト四元数 Kähler 多様体とし，$s = -16n(2n+1)$ とする．このとき，M の正規被覆 $\pi : \tilde{M} \to M$ に対し，$\rho(\tilde{M}) \leq 2(2m+1)$ が成り立つ．また，等号成立は $(\tilde{M}, \tilde{g})$ が四元数双曲空間のときに限る．

1.3 動機：Poisson 核と確率測度の空間の幾何

ここでは，Hadamard 多様体のホロ球面の幾何，特に漸近的調和 Hadamard 多様体の研究の動機となった Poisson 核と確率測度の空間の幾何について述べたい．

可微分多様体 M 上の正値確率測度全体のなす空間 $\mathcal{P}(M)$ には統計学や情報理論における Fisher 情報行列に由来する Riemann 計量 G が自然に定義される（これを **Fisher 情報計量**とよぶ）[4]．

Hadamard 多様体 (X, g) において，古典的 Dirichlet 問題の類推として $X \cup \partial X$ 上の無限遠 Dirichlet 問題を考えることができる．つまり，境界条件 $f \in C^0(\partial X)$ に対し，

$$\Delta_X u = 0, \quad u|_{\partial X} = f \tag{1.5}$$

*8 四元数 Kähler 多様体は Einstein 多様体なので，Ricci テンソルの条件はスカラー曲率の条件として表される．

を満たす $X\cup\partial X$ 上の関数 u を求める問題である．この問題の基本解，つまり (1.5) の解が $u(x)=\int_{\partial X} f(\theta)\,P(x,\theta)\,d\theta$ と積分表示されるときの関数 $P(x,\theta)$ を X 上 **Poisson** 核とよぶ*9．Poisson 核は X から ∂X 上の確率測度の空間 $\mathcal{P}(\partial X)$ への写像

$$\varphi:(X,g)\longrightarrow(\mathcal{P}(\partial X),G)\,;\quad x\longmapsto P(x,\theta)\,d\theta \tag{1.6}$$

を定める．Poisson 核は調和解析的に定まる関数であるが，距離関数の極限関数として幾何学的に定義される Busemann 関数と指数関数を介して

$$P(x,\theta)=\exp(-c\,B_\theta(x)) \tag{1.7}$$

と表される場合がある．例えば，階数 1 非コンパクト型対称空間（[2]）や，それらの拡張である Damek-Ricci 空間*10（[10]）がその例である．等質 Hadamard 多様体 (X^n,g) に対し，X 上の Poisson 核が存在し (1.7) の形で表されるとき*11，X 上の Poisson 核写像 φ は相似写像，つまり $\varphi^*G=\frac{c^2}{n}g$ を満たし，かつ φ は調和写像となることを明らかにした（[10, Proposition 1] [11, Theorem 1.2]）．逆に Poisson 核写像が相似的かつ調和写像ならば，Poisson 核は (1.7) の形で表され，Poisson 核の調和性から，X は漸近的調和空間となることがわかる（[11, Theorem 1.3]）．では，Poisson 核写像が相似的かつ調和となるような（漸近的調和）Hadamard 多様体はどのような空間か？ Damek-Ricci 空間に限るのか？これを明らかにすることが我々の目標である．

本稿第 2 節では定理の証明の道具となる Jacobi テンソル場について述べる．第 3 節では，定理 1.2, 1.4, 1.6 の証明について述べる．そして第 4 節では定理 1.2 と定理 1.3 に関連し，四元数双曲空間内のホロ球面の幾何構造のついて述べる．

2 Jacobi テンソル場

(M,g) を共役点を持たない Riemann 多様体とする．測地線 γ に対し，$\dot\gamma(t)^\perp(\subset T_{\gamma(t)}M)$ の線形変換を与える $(1,1)$-テンソル場 $Y(t)$ で，

$$\ddot Y(t)+R(t)\circ Y(t)=O \tag{2.1}$$

*9 すべての Hadamard 多様体上で存在するとは限らない．断面曲率 K_X が $-a^2\le K_X\le -b^2<0$ を満たすならば，X 上に Poisson 核が存在することが知られている．詳しくは [19] を参照．

*10 Damek-Ricci 空間についての詳細は [1] を参照．

*11 この例が階数 1 非コンパクト型対称空間を含む Damek-Ricci 空間である．

を満たすものを測地線 γ に沿う **Jacobi** テンソル場という．ここで，ドットは γ に沿った共変微分を表し，$R(t)$ は g の曲率テンソル R を用いて $R(t)v = R(v, \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t)$ と定義される $\gamma(t)$ に沿うテンソル場とする．γ に沿う Jacobi テンソル場 $Y(t)$ と平行ベクトル場 v に対して，$Y(t)v$ は Jacobi ベクトル場となる．Jacobi ベクトル場と同様，与えられた Y_i に対し，初期条件 $Y(0) = Y_0, \dot{Y}(0) = Y_1$，または境界条件 $Y(0) = Y_0, Y(s) = Y_s$ を満たす Jacobi テンソル場 $Y(t)$ は唯一つ存在する．(2.1) より $\mathcal{Y}(t) = \dot{Y}(t) \circ Y^{-1}(t)$ は Riccati 方程式

$$\dot{\mathcal{Y}}(t) + \mathcal{Y}(t)^2 + R(t) = O \tag{2.2}$$

を満たす．

測地線 γ に沿う 2 つの Jacobi テンソル場 $Y(t), Z(t)$ に対し，その Wronskian

$$W(Y, Z)(t) = \dot{Y}^*(t) \circ Z(t) - Y^*(t) \circ \dot{Z}(t)$$

は γ に沿って平行である．ただし，Y^* は g に関する Y の随伴作用素を表す．特に，$W(Y, Y)(t) = O$ を満たす Jacobi テンソル場 $Y(t)$ を **Lagrange** テンソル場とよぶ．Lagrange テンソル場 $Y(t)$ に対して，$\dot{Y}(t) \circ Y^{-1}(t)$ はある超曲面の形作用素となる（[5] を参照)．特に

- 初期条件 $A(0) = O$, $A'(0) = \mathrm{Id}$ を満たす Jacobi テンソル場 $A(t)$ は Lagrange テンソル場である．これに対し，$\dot{A}(t) \circ A^{-1}(t)$ は $\gamma(0)$ を中心とする半径 t の測地球面 $G = G_{(\gamma(0);t)}$ の $\gamma(t)$ における形作用素 $\mathcal{S}_G(t)$ である．
- 境界条件 $U_s(0) = \mathrm{Id}$, $U_s(s) = O$ を満たす Jacobi テンソル場 $U_s(t)$ に対し，この極限 $U(t) = \lim_{s \to -\infty} U_s(t)$ は γ に沿う Lagrange テンソル場である．そして，$\dot{U}(t) \circ U^{-1}(t)$ は測地線 $\sigma(t) = \gamma(-t)$ を代表元とする理想境界の点 $-\theta$ を中心とするホロ球面の $\gamma(t)$ における形作用素 $\mathcal{S}_H(t)$ である．

補題 2.1. 測地線 γ に対し，$A(t), U(t)$ を上で定義した Jacobi テンソル場とする．このとき，

$$\mathcal{S}_G(t) - \mathcal{S}_H(t) = (A^*)^{-1}(t) \circ U^{-1}(t) \tag{2.3}$$

が成り立つ．

証明. Jacobi テンソル場の性質と $A(t), U(t)$ の定め方から，$W(A(t), U(t)) = \mathrm{Id}$ となる．このことから，(2.3) を得る． □

補題 2.2. (X,g) を Hadamard 多様体とする．補題 2.1 の仮定の下で，

$$|\mathrm{tr}\,(\mathcal{S}_G(t)) - \mathrm{tr}\,(\mathcal{S}_H(t))\,| \le \frac{(n-1)}{t} \tag{2.4}$$

が成り立つ．

証明. (2.3) より，

$$\begin{aligned}|\mathrm{tr}\,(\mathcal{S}_G(t)) - \mathrm{tr}\,(\mathcal{S}_H(t))\,| &= \sqrt{\mathrm{tr}\,((A^*)^{-1}(t)\circ Y^{-1}(t))^2} \\ &\le \sqrt{\mathrm{tr}\,((A^*)^{-1}(t)\circ A^{-1}(t))\cdot \mathrm{tr}\,\big((Y^*)^{-1}(t)\circ Y_u^{-1}(t)\big)}.\end{aligned}$$

Rauch の比較定理[*12]を用いて，n 次元 Euclid 空間と比較すると，

$$g(A(t)v, A(t)v) \ge t^2 g(v,v) \qquad (v \in \dot{\gamma}(t)^{\perp})$$

が成り立つ．したがって，$\{e_i\}$ を $T_{\gamma(t)}X$ の正規直交基底（ただし，$e_1 = \dot{\gamma}(t)$）とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\big((A^*)^{-1}(t)\circ A^{-1}(t)\big) &= \sum_{i=2}^{n} g((A^*)^{-1}(t)\circ A^{-1}(t)e_i, e_i) \\ &= \sum g(A^{-1}(t)e_i, A^{-1}(t)e_i) \le \sum \frac{1}{t^2} = \frac{n-1}{t^2}.\end{aligned}$$

一方，Hadamard 多様体上の Jacobi ベクトル場の凸性より，

$$g(U(t)v, U(t)v) \ge g(U(0)v, U(0)v) = g(v,v)$$

が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,\big((U^*)^{-1}(t)\circ U^{-1}(t)\big) &= \sum_{i=2}^{n} g((U^*)^{-1}(t)\circ U^{-1}(t)e_i, e_i) \\ &= \sum g(U^{-1}(t)e_i, U^{-1}(t)e_i) \\ &\le \sum g(e_i, e_i) = n-1.\end{aligned}$$

以上のことから，(2.4) を得る． □

[*12] M_1, M_2 を Riemannian 多様体，$\gamma_1 : [0,T] \to M_1, \gamma_2 : [0,T] \to M_2$ を測地線とする（γ_2 は共役点を持たないとする）．y_1，y_2 を γ_1, γ_2 にそれぞれ沿った Jacobi ベクトル場で $y_1(0) = y_2(0) = 0$ and $|y_1'(0)| = |y_2'(0)|$ を満たすとする．M_1, M_2 の $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2$ を含むすべての平面の断面曲率が $K_1 \le K_2$ ならば，$|y_1| \ge |y_2|$ が成り立つ．

3 定理の証明

3.1 定理 1.2

単位接ベクトル $v \in T_pX$ を任意に選ぶ．γ を $\dot{\gamma}(0) = v$ を満たし，$\theta \in \partial X$ に収束する測地線とする．$\xi_t = -J\nabla B_\theta(\gamma(t)) = J\dot{\gamma}(t)$ とおき，ホロ球面 $H_{(x,\theta)}$ の $\gamma(t)$ における形作用素を $\mathcal{S}(t)$ とおくと，仮定から $\mathcal{S}(t)\xi_t = k\,\xi_t$ となる．X は nearly Kähler であるから，

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi_t = (\nabla_{\dot{\gamma}(t)}J)\dot{\gamma}(t) + J\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t) = 0,$$

つまり，ξ_t は γ に沿って平行なベクトル場である．このことから，

$$\dot{\mathcal{S}}(t)\xi_t = (\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\mathcal{S}(t))(\xi_t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}(\mathcal{S}(t)(\xi_t)) - \mathcal{S}(t)(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\xi_t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}(k\,\xi_t) = 0 \quad (3.1)$$

を得る．第 2 節の議論から，$\mathcal{S}(t)$ は Riccati 方程式を満たすので，$R(t)\xi_t = -\mathcal{S}(t)^2\xi_t = -k^2\xi_t$．$t = 0$ とすることにより，任意の v に対して $g(R(Jv,v)v,Jv) = -k^2$ が成り立つことがわかる．したがって，X の正則断面曲率は一定値 $-k^2$ をとる．Gray による nearly Kähler 多様体の分類（[6]）により，X は複素ユークリッド空間 $E^n_{\mathbb{C}}$（$k = 0$），または正則断面曲率 $-k^2$ の複素双曲空間 $H^n_{\mathbb{C}}$（$k < 0$）である．

ホロ球面の幾何構造については第 4 節で述べる．

注意 **3.1.** 定理 1.3 の証明についても，定理 1.2 と同様の議論によって，X の Q-断面曲率が一定値 $-k^2$ となることを示す．

3.2 定理 1.4

$u \in U_pX \subset T_pX$ に対し，γ を $\dot{\gamma}(0) = u$ を満たす測地線とする．T_pX の正規直交基底 $\{e_1 = u, e_2, \ldots, e_n\}$ に対し，$y_i(0) = 0, y_i'(0) = e_i$ を満たす γ に沿う Jacobi ベクトル場を $y_i(t)$ とする．これに対し，$J(u,t) := r^{-(n-1)}\sqrt{\det(\,g(y_i(t),y_j(t))\,)}$ とおくと

$$(\exp_p)^*_{\gamma_u(r)}(dv_g) = J(u,t)\,t^{n-1}\,dt\,du$$

となる（[7, p.166] を参照）．

ここで，$\mathcal{V}(p;t) = \int_{B(p;t)} dv_g = \int_0^t \mathcal{A}(p;r)\,dr$ とおく．すなわち，

$$\mathcal{A}(p;t) = \int_{u\in U_pX} t^{n-1}J(u,t)\,du. \quad (3.2)$$

l'Hospital の定理により，体積エントロピーは

$$\rho = \lim_{t\to\infty} \frac{\log \mathcal{V}(p;t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{V}'(p;t)}{\mathcal{V}(p;t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}(p;t)}{\int_0^t \mathcal{A}(p;r)\,dr} = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}'(p;t)}{\mathcal{A}(p;r)} \tag{3.3}$$

となる．ここでプライムは t に関する微分を表す．

r を点 p からの距離関数 $r(x) = d(p,x)$ とする．このとき，

$$\Delta r = -\frac{n-1}{r} - \frac{J'(u,r)}{J(u,r)} \qquad (\text{ただし，} x = \exp_p(ru))$$

が成り立つ（[7, 4.16 Proposition]）．測地球面 $G = G_{(p;r)}$ の $x = \exp_p(ru)$ における平均曲率を $\mu(u,r)$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t \mu(u,r)\,dr = -\int_{t_0}^t \Delta r\,dr & \\ =&(n-1)\,[\log r]_{t_0}^t + [\log J(u,r)]_{t_0}^t \\ =&(n-1)(\log t - \log t_0) + (\log J(u,t) - \log J(u,t_0)) \\ =&\log t^{n-1} J(u,t) - \log t_0^{n-1} J(u,t_0).\end{aligned}$$

したがって，$t^{n-1}J(u,t) = t_0^{n-1}J(u,t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \mu(u,r)\,dr\right)$ を得る．これと (3.2) を (3.3) に代入すると

$$\begin{aligned}\rho =& \lim_{t\to\infty} \frac{\mathcal{A}'(p;t)}{\mathcal{A}(p;t)} \\ =& \lim_{t\to\infty} \frac{\int_{u\in S^{n-1}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{t_0^{n-1}J(u,t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \mu(u,r)\,dr\right)\right\} du}{\int_{u\in S^{n-1}} t_0^{n-1}J(u,t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \mu(u,r)\,dr\right) du} \\ =& \lim_{t\to\infty} \frac{\int_{u\in S^{n-1}} \mu(u,t)\,t_0^{n-1}J(u,t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \mu(u,r)\,dr\right) du}{\int_{u\in S^{n-1}} t_0^{n-1}J(u,t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \mu(u,r)\,dr\right) du} \\ =&c + \lim_{t\to\infty} \frac{\int_{u\in S^{n-1}} (\mu(u,t)-c)\,t_0^{n-1}J(u,t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \mu(u,r)\,dr\right) du}{\int_{u\in S^{n-1}} t_0^{n-1}J(u,t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \mu(u,r)\,dr\right) du}\end{aligned}$$

となり，

$$|\rho - c| \le \lim_{t\to\infty} \frac{\int_{u\in S^{n-1}} |\mu(u,t)-c|\,t_0^{n-1}J(u,t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \mu(u,r)\,dr\right) du}{\int_{u\in S^{n-1}} t_0^{n-1}J(u,t_0)\exp\left(\int_{t_0}^t \mu(u,r)\,dr\right) du} \tag{3.4}$$

を得る．補題 2.2 より，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，十分大きい t をとると $|\mu(u,t) - c| < \varepsilon$ とできる．したがって，(3.4) より，$|\rho - c| < \varepsilon$ となる．

3.3 定理 1.6

ホロ球面 $H = H_{(x,\theta)}$ の形作用素を $\mathcal{S}_H$ とする．また，$\xi = -J\nabla B_\theta$ に対し，$\mathcal{S}_0 \in \mathrm{End}(T_y H_{(x,\theta)})$ を

$$\mathcal{S}_0 v = -v - g(\xi, v)\,\xi \tag{3.5}$$

と定義する．このとき，

$$0 \le \operatorname{tr}\left(\mathcal{S}_H - \frac{\rho}{2m}\mathcal{S}_0\right)^2 = \operatorname{tr}(\mathcal{S}_H)^2 - \frac{(m-1)\rho^2}{2m^2} + \frac{\rho}{m}h(\xi,\xi) \tag{3.6}$$

が成り立つ[*13]．Bochner の公式

$$g(\nabla(\Delta f), \nabla f) = |\nabla df|^2 + \frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f) \tag{3.7}$$

を B_θ に適用すると，$\|\nabla B_\theta\| = 1$ かつ $\Delta B_\theta =$ 一定であるから，$\operatorname{tr}(\mathcal{S}_H)^2 = \|\mathrm{Hess}(B_\theta)\|^2 = -\mathrm{Ric}(\nabla B_\theta, \nabla B_\theta)$ となる．これと (3.6) より，

$$\frac{(m-1)\rho^2}{2n^2} - \frac{\rho}{m}h(\xi,\xi) \le \operatorname{tr}(\mathcal{S}_H)^2 = -\mathrm{Ric}(\nabla B_\theta, \nabla B_\theta) \le 2(m+1),$$

つまり，

$$\frac{(m-1)\rho^2}{2m^2} - \frac{\rho}{n}h(\xi,\xi) - 2(m+1) \le 0 \tag{3.8}$$

が成り立つ．ρ に関する 2 次不等式 (3.8) を $h(\xi,\xi) \le -2$ の仮定の下で解くことにより $\rho \le 2m$ を得る．等号が成立するのはすべてのホロ球面において形作用素が $\mathcal{S}_H = \frac{\rho}{2m}\mathcal{S}_0$ と書けるときである．これは定理 1.2 の仮定を満たす．したがって，X は複素双曲空間となる．

4 Damek-Ricci 空間としての四元数双曲空間とホロ球面の幾何構造

複素双曲空間 $H^m_{\mathbb{C}}$ の概 Kähler 構造を (J, g) とすると

$$\xi = -J\nabla B_\theta, \quad Jv = \phi v + \eta(v)\nabla B_\theta \tag{4.1}$$

---

*13 定理 1.4 から得られる等式 $\operatorname{tr}\mathcal{S}_H = -\rho$ を使っている．

により，ホロ球面 $H = H_{(x,\theta)}$ 上の構造ベクトル場 ξ，微分 1 形式 η，$\phi \in \mathrm{End}(TH)$ が定まり，$(\xi, \eta, \phi, g|_H)$ は H 上の概接触計量構造*14を定める*15．さらに，$H^m_{\mathbb{C}}$ の正則断面曲率が -4 になるように計量をスケーリングすると，H の形作用素は $\mathcal{S}_H = -\mathrm{Id} - \eta \otimes \xi$ と書ける．したがって，Tashiro の結果*16（[3, 20] を参照）よりホロ球面の概接触計量構造は佐々木構造*17となる．佐々木空間形*18となることは Gauss-Codazzi の公式を用いて証明される．

では四元数双曲空間 $H^m_{\mathbb{H}}$ の場合，ホロ球面には佐々木構造と類似の構造が自然に導入されるだろうか．四元数 Kähler 多様体には 3 つの概 Hermite 構造が備わっているので，そのホロ球面にも 3 つの概接触計量構造が導入される．これを**概接触計量 3-構造**とよぶ (詳細は [3, Chapter 14] を参照)．特に，3 つとも接触計量構造*19のときを**接触計量 3-構造**，3 つとも佐々木構造のときを **3-佐々木構造**とよぶ．

$H^n_{\mathbb{H}}$ 内のホロ球面に自然に導入される概接触計量 3-構造は 3-佐々木構造にはならないことを Kashiwada による結果を用いて 2 つの方法で示す．

1 つ目の事実は「3-佐々木多様体はスカラー曲率正の Einstein 多様体である」ことである（[14][3, Theorem 14.3]）．しかし，次の定理から，$H^n_{\mathbb{H}}$ 内のホロ球面のスカラー曲率は負一定値であるので，3-佐々木多様体には成り得ないことがわかる．

定理 4.1 ([12])**.** (X^n, g) を漸近的調和 Hadamard 多様体で，g は Einstein 計量とする．このとき，ホロ球面 $H_{(x,\theta)}$ のスカラー曲率 $\hat{s}_{(x,\theta)}$ は非正一定値で，すべてのホロ球面に対して共通一定値をとる．特に，$\hat{s}_{(x,\theta)} = 0$ となるのは (X, g) がユークリッド空間 $E^n_{\mathbb{R}}$ か，または実双曲空間 $H^n_{\mathbb{R}}$ のときに限る．

2 つ目の事実は「接触計量 3-構造は自然に 3-佐々木構造となる」*20ということである ([15][3, Theorem 14.1])．したがって，ホロ球面に自然に導入される概接触計量 3-構造が接触計量 3-構造には成り得ないことを示せばよい．これを示すため，$H^n_{\mathbb{H}}$ の Damek-Ricci

---

*14 (i) $\eta(\xi) = 1$, (ii) $\phi^2 = -\mathrm{Id} + \eta \otimes \xi$, (iii) $g(\phi\,\cdot\,, \phi\,\cdot\,) = g - \eta \otimes \eta$ を満たす．

*15 一般に，概 Hermite 多様体内の実超曲面上には概 Hermite 構造から同様にして概接触計量構造が定まる．

*16 M を Kähler 多様体内の実超曲面とする．M 上の概接触計量構造 (ξ, η, ϕ, g) が佐々木構造となるための必要十分条件は M の形作用素が $\mathcal{S}_M = -\mathrm{Id} + f\eta \otimes \xi$ となることである．

*17 概接触計量構造 (ξ, η, ϕ, g) が佐々木構造であるとは，$(\nabla_v \phi)w = g(v, w)\xi - \eta(w)v$ を満たすときをいう．

*18 ϕ-断面曲率が一定な佐々木多様体

*19 概接触計量構造 (ξ, η, ϕ, g) が接触計量構造であるとは，$d\eta(v, w) = g(v, \phi w)$ を満たすときをいう．

*20 佐々木構造は接触計量構造だが，一般に逆は成り立たない．

空間としての構造を用いて，ホロ球面上の概接触計量 3-構造の $d\eta_i$ を具体的に計算する．

まず，Damek-Ricci 空間の定義を簡単に述べる*21．$\mathfrak{n}=(\mathfrak{n},[\cdot,\cdot],\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を 2-step 冪零 Lie 環，$\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{n}$ の中心，$\mathfrak{v}$ をその直交補空間とする．線形写像 $J:\mathfrak{z}\to\mathrm{End}(\mathfrak{v})$ を

$$\langle J_Z V, V'\rangle = \langle Z,[V,V']\rangle \qquad (V,V'\in\mathfrak{v},\ Z\in\mathfrak{z})$$

と定義する．任意の $Z\in\mathfrak{z}$ に対し，$J_Z\circ J_Z=-|Z|^2\,\mathrm{Id}_{\mathfrak{v}}$ が成り立つとき，$\mathfrak{n}$ を一般化 **Heisenberg** 代数（または **H-type** 代数）とよび，$\mathfrak{n}$ を Lie 環とする単連結 Lie 群 N を一般化 **Heisenberg** 群（または **H-type** 群）とよぶ．

一般化 Heisenberg 代数 $\mathfrak{n}=\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{z}$ の 1 次元拡大 $\mathfrak{s}=\mathfrak{v}\oplus\mathfrak{z}\oplus\mathbb{R}A$ にブラケット積 $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{s}}$ と内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{s}}$ を

$$\begin{aligned}
[V+Z+lA, V'+Z'+l'A]_{\mathfrak{s}} &= \left(\frac{l}{2}V'-\frac{l'}{2}V\right)+(lZ'-l'Z+[X,X']),\\
\langle V+Z+lA, X'+Z'+l'A\rangle_{\mathfrak{s}} &= \langle V,V'\rangle+\langle Z,Z'\rangle+ll'
\end{aligned}$$

と定義する．$(\mathfrak{s},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{s}})$ を Lie 環とし，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{s}}$ を左不変に拡張した計量 g を備えた単連結 Lie 群 S を **Damek-Ricci** 空間とよぶ．$S\simeq\mathfrak{v}\times\mathfrak{z}\times\mathbb{R}_+$ と座標を入れると S の群構造は

$$(V,Z,a)\cdot(V',Z',a')=\left(V+\sqrt{a}V',\ Z+aZ'+\frac{\sqrt{a}}{2}[V,V'],\ aa'\right).$$

と表される．Damek-Ricci 空間は Hadamard 多様体であり，その理想境界は一般化 Heisenberg 群に無限遠点付け加えた集合 $N\cup\{\infty\}$ と同一視することができる．

$\dim\mathfrak{z}=3$ かつ $\mathfrak{n}$ が J^2-条件*22を満たすとする．この N を 1 次元拡大した Damek-Ricci 空間は四元数双曲空間と等長的である（[1, p.79]）．四元数構造 $\{J_1,J_2,J_3\}$ は以下のようにして定めることができる．$\mathfrak{z}$ の正規直交基底 $\{Z_1,Z_2,Z_3\}$ を $J_{Z_1}\circ J_{Z_2}=J_{Z_3}$ をみたすようにとる．これに対し，$\mathfrak{s}=\mathfrak{n}\oplus\mathbb{R}A$ 上の線形変換 J_i を

$$J_i=J_{Z_i}\circ\pi_{\mathfrak{v}}-Z_i^\flat\otimes A+Z_j^\flat\otimes Z_k-Z_k^\flat\otimes Z_j+A^\flat\otimes Z_i \tag{4.2}$$

と定義する．ただし，$\pi_{\mathfrak{v}}:\mathfrak{s}\to\mathfrak{v}$ は自然な射影，$Z^\flat$ は $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathfrak{s}}$ に関する Z の双対ベクトルを表すとする．また，i に対して添字 j,k を $\mathrm{sign}(i\ j\ k)=\mathrm{sign}(1\ 2\ 3)$ となるように

*21 詳細は [1] を参照

*22 $\langle Z_1,Z_2\rangle=0$ を満たす $Z_1,Z_2\in\mathfrak{z}$ に対し，$J_{Z_1}\circ J_{Z_2}=J_{Z_3}$ を満たす $Z_3\in\mathfrak{z}$ が存在すること．J^2-条件を満たすことと，その Damek-Ricci 空間の断面曲率が負であることは同値である．曲率が真に負である Damek-Ricci 空間は階数 1 非コンパクト型対称空間に限る．

定める．S の群作用により，J_i を S 全体に左不変に拡張し，Damek-Ricci 空間における Levi-Civita 接続の公式 [1, p.28] を用いて ∇J_i を計算すると

$$\nabla J_i = -Z_k^\flat \otimes J_j + Z_j^\flat \otimes J_k \tag{4.3}$$

となることがわかる．したがって，$\{J_i\}$ は S 上の四元数 Kähler 構造を与える．

$\infty \in \partial S$ を中心とするホロ球面は $N \times \{aA\} \simeq N$ と同一視できる．N に導入される概接触計量 3-構造は

$$\xi_i = Z_i, \quad \eta_i = Z_i^\flat, \quad \phi_i = J_{Z_i} \circ \pi_{\mathfrak{v}} + Z_j^\flat \otimes Z_k - Z_k^\flat \otimes Z_j$$

で与えられる．再び [1, p.28] を用いて，$d\eta_i$ を計算すると，

$$d\eta_i(V + Z, V' + Z') = -g(\phi_i V, V') \tag{4.4}$$

を得る（ただし，$V, V' \in \mathfrak{v}$，$Z, Z' \in \mathfrak{z}$）．このことから直ちに $d\eta_i$ の退化次元が 3 次元であることがわかる．しかし，接触計量構造であれば $d\eta_i$ の退化次元は 1 次元なので，計量をいくらスケール変換しても接触計量 3-構造にななり得ないことがわかる．

参考文献

[1] J. Berndt, F. Tricerri and L. Vanhecke, Generalized Heisenberg groups and Damek-Ricci harmonic spaces, Lecture Notes in Math. **1598**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[2] G. Besson, G. Courtois and S. Gallot, *Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), 731-799.

[3] D. E. Blair, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, and ed., Progress in Math. **203**,

[4] T. Friedrich, *Die Fisher-Information und symplektische Strukturen*, Math. Nachr. **153** (1991), 273-296.

[5] J.- H. Eschenburg and J. J. O' Sullivan, *Jacobi tensors and Ricci curvature*, Math. Ann. **252** (1980), 1-26.

[6] A. Gray, *Classification des variétés approximativement kählériennes de courbure sectionelle holomorphe constante*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A. **279** (1974), 797-800.

[7] S. Gallot, D. Hulin and J. Lafontaine, Riemannian geometry. 2nd ed., Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[8] J. Heber, *On harmonic and asymptotically harmonic homogeneous spaces*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 869-890.

[9] S. Ishihara, *Quaternion Khlerian manifolds*, J. Differential Geom. **9** (1974), 483-500.

[10] M. Itoh and H. Satoh, *Information geometry of Poisson kernels on Damek-Ricci spaces*, Tokyo J. Math. **33** (2010), 129-144.

[11] M. Itoh and H. Satoh, *The Fisher Information metric, Poisson kernel and harmonic map*, Differential Geom. Appl. **29** (2011), S107-S115.

[12] M. Itoh and H. Satoh, *Horospheres and Hyperbolic Spaces*, (2012), submitted.

[13] M. Itoh and H. Satoh, *Mean curvature of horospheres and volume entropy of asymptotically harmonic manifolds*, (2012), preprint.

[14] T. Kashiwada, *A note on a Riemannian space with Sasakian 3-structure*, Natural Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **22** (1971), 1-2.

[15] T. Kashiwada, *On a contact 3-structure*, Math. Z. **238** (2001), 829-832.

[16] F. Ledrappier and X. Wang, *An integral formula for the volume entropy with applications to rigidity*, J. Differential Goem. **85** (2010), 461-477.

[17] A. Manning, *Topological entropy for geodesic flows*, Ann. of Math. **110** (1979), 567-573.

[18] 酒井 隆, リーマン幾何学, 数学選書 11, 裳華房, 1992.

[19] R. Schoen and S.T. Yau, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology I., International Press, Cambridge, MA, 1994.

[20] Y. Tashiro, *On contact structures of hypersurfaces in complex manifolds I*, Tohoku Math. J. **15** (1963), 62-78.