数理解析研究所講究録
第 1820 巻 2012 年 138-151

バナッハ空間における均衡問題に関する収束定理について

Convergence theorems for equilibrium problems in Banach spaces

光塩女子学院　善林　啓 (Kei Zembayashi)
Kone Girls' School

1　はじめに

本論文では，不動点問題と均衡問題の共通解への収束定理について，解説を行う。
E をバナッハ空間, C を E の空でない部分集合とする. 不動点問題とは, 写像 $T:C\to C$ が与えられたとき, その不動点を求める問題をいう. 均衡問題とは, 関数 $f:C\times C\to\mathbb{R}$ が与えられたとき,

$$f(\hat{x},y)\geq 0,\ \forall y\in C.$$

を満たす $\hat{x}\in C$ を求める問題をいう. この均衡問題は, 最適化理論, 不動点理論, 変分問題, 鞍点問題, 非協力ゲームにおける Nash 均衡問題など, 様々な問題を含むことが知られていることから, これまでさまざまな研究が行われてきた [2, 4, 9, 12, 17].
本論文では, この二つの問題の共通解を求める問題を扱い, 特に共通解へ収束する点列の構成法を考えることにする. ここでは, とくに 2003 年に Nakajo–Takahashi によって強収束性が示されたハイブリッド法, 2008 年に Takahashi–Takeuchi–Kubota によって強収束性が示された収縮射影法を用いることする.

定理 1 (Nakajo and Takahashi[10]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, T を C からそれ自身への不動点集合が空でない非拡大写像とする.
$x_1=x\in C$ とし $\{x_n\}$ を以下の方法で構成する:

$$\begin{cases} y_n=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)Tx_n,\\ C_n=\{z\in C:\|y_n-z\|\leq\|x_n-z\|\},\\ Q_n=\{z\in C:\langle x_n-z,x-x_n\rangle\geq 0\},\\ u_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}x,\quad n\in\mathbb{N}, \end{cases}$$

ただし, $P_{C_n\cap Q_n}$ は C から $C_n\cap Q_n$ への距離射影, 点列 $\{\alpha_n\}$ は $0\leq\alpha_n\leq a<1$ を満たすものとする. そのとき, $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}x$ に強収束する.

定理 2 (Takahashi, Takeuchi and Kubota[16]). C をヒルベルト空間 H の空でない閉凸集合とし, T を C からそれ自身への不動点集合が空でない非拡大写像とする.
$x_0\in H$, $C_1=C$ そして $u_1=P_{C_1}x_0$ とし, $\{u_n\}$ を以下の方法で構成する:

$$\begin{cases} y_n=\alpha_n u_n+(1-\alpha_n)Tu_n,\\ C_{n+1}=\{z\in C_n:\|y_n-z\|\leq\|u_n-z\|\},\\ u_{n+1}=P_{C_{n+1}}x_0,\quad n\in\mathbb{N}, \end{cases}$$

ただし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $0 \leq \alpha_n \leq a < 1$ を満たすものとする. そのとき, $\{u_n\}$ は $z_0 = P_{F(T)}x_0$ に強収束する.

2 準備

$\mathbb{N}$ は正の整数の集合を, $\mathbb{R}$ は実数の集合を表すものとする. E は実バナッハ空間, E^* は E の双対空間を表すことにする. $x \in E$ と $x^* \in E^*$ に対して, x^* の x における値を $\langle x, x^* \rangle$ で表すことにする. そのとき, 任意の $x \in E$ に対して E 上の双対写像 J を

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

で定義する. Hahn-Banach の定理から, $J(x)$ は空でない; [13] を参照せよ. $\{x_n\}$ が x へ強収束することを $x_n \to x$, $\{x_n\}$ が x へ弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ で表す. また, $\{x_n^*\}$ が x^* へ汎弱収束することを $x_n^* \overset{*}{\rightharpoonup} x^*$ と表す.
バナッハ空間 E が, $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$ を満たす任意の $x, y \in E$ に対し $\frac{\|x+y\|}{2} < 1$ が成り立つとき狭義凸であるという. また, 任意の $\epsilon \in (0, 2]$ に対し, $\delta > 0$ が存在して, $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x - y\| \geq \epsilon$ を満たす $x, y \in E$ に対し $\frac{\|x+y\|}{2} \leq 1 - \delta$ が成り立つとき一様凸であるという. すべての $x, y \in S(E) = \{z \in E : \|z\| = 1\}$ に対して, 極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

が存在するとき, バナッハ空間 E は smooth であるという. $x, y \in S(E)$ に対して一様に極限が存在するとき uniformly smooth であるという. E が狭義凸, smooth かつ回帰的なバナッハ空間であるとき, 双対写像 J は一価写像, 全射, 1 対 1 である; [13] を参照せよ.
E を smooth, 狭義凸かつ回帰的なバナッハ空間とし, C をその空でない閉凸部分集合とする. 関数 $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ を

$$\phi(y, x) = \|y\|^2 - 2\langle y, Jx \rangle + \|x\|^2, \ \forall y, x \in E$$

で定義する. Alber [1] により, E から C の上への擬射影 (generalized projection) Π_C が

$$\Pi_C(x) = \arg\min_{y \in C} \phi(y, x), \ \forall x \in E$$

で定義された. E がヒルベルト空間のとき, $\phi(y, x) = \|y - x\|^2$ であり, Π_C は H から C の上への距離射影と一致することがわかる. 擬射影について次の事実が知られている.

補題 1 (Alber[1], Kamimura and Takahashi[5]). *E を smooth, 狭義凸かつ回帰的なバナッハ空間とし, C をその空でない閉凸部分集合とする. このとき*

$$\phi(x, \Pi_C y) + \phi(\Pi_C y, y) \leq \phi(x, y), \ \forall x \in C \ , \ y \in E$$

が成り立つ.

補題 2 (Alber[1], Kamimura and Takahashi[5]). *E を smooth, 狭義凸かつ回帰的なバナッハ空間とし, C をその空でない閉凸部分集合とする. $x \in E$ と $z \in C$ に対して*

$$z = \Pi_C x \Longleftrightarrow \langle y - z, Jx - Jz \rangle \leq 0, \ \forall y \in C$$

が成り立つ.

E を smooth, 狭義凸かつ回帰的なバナッハ空間とし, C をその空でない閉凸部分集合, そして T を C 上の写像とする. T の不動点集合を $F(T)$ で表す. 点 $p \in C$ が漸近的不動点であるとは, $x_n \rightharpoonup p$ かつ $\lim_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$ を満たす C の点列 $\{x_n\}$ が存在するときをいう. T の漸近的不動点の集合を $\hat{F}(T)$ で表す. 写像 T が次を満たすとき, 擬非拡大であるといわれる [7]:

(1) $F(T)$ が空でない;

(2) $\phi(u, Tx) \le \phi(u, x)$, $\forall u \in F(T)$, $x \in C$;

(3) $\hat{F}(T) = F(T)$.

擬非拡大写像について次の事実が知られている.

補題 3 (Matsushita and Takahashi[7]). *E を smooth, 狭義凸かつ回帰的なバナッハ空間とし, C をその空でない閉凸部分集合, そして写像 $T : C \to C$ を擬非拡大とする. そのとき $F(T)$ は閉凸集合である.*

補題 4 (Kamimura and Takahashi[5]). *E を smooth かつ一様凸なバナッハ空間とする. $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を E 上の点とし $\{x_n\}$ の $\{y_n\}$ のどちらか一方が有界であるとする. そのとき $\lim_n \phi(x_n, y_n) = 0$ ならば, $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$.*

補題 5 (Xu[18], Zălinescu[19, 20]). *E を一様凸バナッハ空間とし $r > 0$ とする. そのとき狭義単調増加, 連続かつ凸な関数 $g : [0, 2r] \to \mathbb{R}$ が存在して, $g(0) = 0$ かつ*

$$\|tx + (1-t)y\|^2 \le t\|x\|^2 + (1-t)\|y\|^2 - t(1-t)g(\|x - y\|) \quad \forall x, y \in B_r, \quad t \in [0, 1]$$

を満たす, ただし $B_r = \{z \in E : \|z\| \le r\}$.

補題 6 (Kamimura and Takahashi[5]). *E を smooth かつを一様凸バナッハ空間とし $r > 0$ とする. そのとき狭義単調増加, 連続かつ凸な関数 $g : [0, 2r] \to \mathbb{R}$ が存在して, $g(0) = 0$ かつ*

$$g(\|x - y\|) \le \phi(x, y) \quad \forall x, y \in B_r$$

を満たす.

E をバナッハ空間, C を E の空でない部分集合, $f : C \times C \to \mathbb{R}$ を関数とする. 均衡問題とは,

$$f(\hat{x}, y) \ge 0, \ \forall y \in C.$$

を満たす $\hat{x} \in C$ を求める問題をいう. このとき, $\hat{x}$ を均衡問題の解といい, 解の集合を $EP(f)$ と表す.

均衡問題を解くにあたり, 関数 f に以下の条件を仮定する:

(A1) $f(x, x) = 0 \ \ \forall x \in C$;

(A2) f は単調, すなわち $f(x, y) + f(y, x) \le 0 \ \ \forall x, y \in C$;

(A3) $\forall x, y, z \in C$,

$$\limsup_{t \downarrow 0} f(tz + (1-t)x, y) \le f(x, y);$$

(A4) $\forall x \in C$, $f(x, \cdot)$ は凸かつ下半連続.

以下の事実が知られている [2]

補題 7 (Blum and Oettli[2]). E を *smooth,* 狭義凸かつ回帰的なバナッハ空間とし, C をその空でない閉凸部分集合, 関数 $f : C \times C \to \mathbb{R}$ が *(A1)-(A4)* を満たしているとする. $r > 0$ とし $x \in E$ とする. そのとき, $z \in C$ が存在して

$$f(z,y) + \frac{1}{r}\langle y - z, Jz - Jx\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C$$

を満たす.

補題 8 (Takahashi and Zembayashi[17]). E を *smooth,* 狭義凸かつ回帰的なバナッハ空間とし, C をその空でない閉凸部分集合, 関数 $f : C \times C \to \mathbb{R}$ が *(A1)-(A4)* を満たしているとする. $r > 0$ と $x \in E$ に対し, 写像 $T_r : E \to C$ を以下で定義する:

$$T_r(x) = \left\{ z \in C : f(z,y) + \frac{1}{r}\langle y - z, Jz - Jx\rangle \geq 0 \ \ \forall y \in C \right\} \quad \forall x \in C.$$

そのとき, 以下が成り立つ:

(1) T_r は一価写像;

(2) T_r は *firmly nonexpansive-type* 写像 *[6],* すなわち $\forall x, y \in E$,

$$\langle T_r x - T_r y, JT_r x - JT_r y\rangle \leq \langle T_r x - T_r y, Jx - Jy\rangle;$$

(3) $F(T_r) = EP(f)$;

(4) $EP(f)$ は閉凸集合.

補題 9 (Takahashi and Zembayashi[17]). E を *smooth,* 狭義凸かつ回帰的なバナッハ空間とし, C をその空でない閉凸部分集合, 関数 $f : C \times C \to \mathbb{R}$ が *(A1)-(A4)* を満たしているとする. $r > 0$, $x \in E$, $q \in F(T_r)$ とする. そのとき,

$$\phi(q, T_r x) + \phi(T_r x, x) \leq \phi(q, x).$$

3 ハイブリッド法による強収束定理

定理 3. E を *uniformly smooth* かつ一様凸なバナッハ空間とし, C をその空でない閉凸部分集合とする. 擬非拡大写像 $S : C \to C$ と条件 *(A1)-(A4)* を満たす関数 $f : C \times C \to \mathbb{R}$ が与えられ, $F(S) \cap EP(f) \neq \emptyset$ とする. $\{x_n\}$ を $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して,

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n \in C \ \textit{such that} \ f(x_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - x_n, Jx_n - Jy_n\rangle \geq 0, \ \forall y \in C, \\ u_n = J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JSy_n), \\ H_n = \{z \in C : \phi(z, u_n) \leq \phi(z, x_n)\}, \\ W_n = \{z \in C : \langle x_n - z, Jx - Jx_n\rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n} x \end{cases}$$

で定義する, ただし J は E 上の双対写像, $\{\alpha_n\} \subset [0,1)$ が $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ を満たし, ある $a > 0$ に対し $\{r_n\} \subset [a, \infty)$ とする. そのとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_{F(S)\cap EP(f)} x$ に強収束する.

Proof. まず, $H_n \cap W_n$ が閉凸集合であることを示す. H_n が閉集合であることと W_n が閉凸集合であることは明らか.

$$
\begin{aligned}
&\phi(z, u_n) \leq \phi(z, x_n) \\
\Longleftrightarrow &\|u_n\|^2 - \|x_n\|^2 - 2\langle z, Ju_n - Jx_n\rangle \geq 0,
\end{aligned}
$$

より, H_n は凸集合. よって, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, $H_n \cap W_n$ は E の閉凸部分集合である.

$u \in F(S) \cap EP(f)$ をとる. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し, $y_n = T_{r_n} x_n$ とおくと, T_{r_n} が擬非拡大であることがわかる. S もまた擬非拡大であることから,

$$
\begin{aligned}
\phi(u, u_n) &= \phi(u, J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JSy_n)) \\
&= \phi(u, J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JST_{r_n}x_n)) \\
&= \|u\|^2 - 2\langle u, \alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JST_{r_n}x_n\rangle + \|\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JST_{r_n}x_n\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 - 2\alpha_n\langle u, Jx_n\rangle - 2(1-\alpha_n)\langle u, JST_{r_n}x_n\rangle \\
&\qquad + \alpha_n\|x_n\|^2 + (1-\alpha_n)\|ST_{r_n}x_n\|^2 \\
&= \alpha_n\phi(u, x_n) + (1-\alpha_n)\phi(u, ST_{r_n}x_n) \\
&\leq \phi(u, x_n).
\end{aligned}
$$

すなわち, $u \in H_n$ となる. このことから

$$F(S) \cap EP(f) \subset H_n, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

次に, 帰納法を用いることにより, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, $F(S) \cap EP(f) \subset H_n \cap W_n$ を示す. $W_0 = C$ から,

$$F(S) \cap EP(f) \subset H_0 \cap W_0.$$

$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して, $F(S) \cap EP(f) \subset H_k \cap W_k$ を仮定する. そのとき $x_{k+1} \in H_k \cap W_k$ が存在して

$$x_{k+1} = \Pi_{H_k \cap W_k} x.$$

x_{k+1} の定義から, 任意の $z \in H_k \cap W_k$ に対して,

$$\langle x_{k+1} - z, Jx - Jx_{k+1}\rangle \geq 0.$$

$F(S) \cap EP(f) \subset H_k \cap W_k$ から,

$$\langle x_{k+1} - z, Jx - Jx_{k+1}\rangle \geq 0, \ \forall z \in F(S) \cap EP(f)$$

すなわち, $z \in W_{k+1}$. よって

$$F(S) \cap EP(f) \subset W_{k+1}.$$

それゆえ,

$$F(S) \cap EP(f) \subset H_{k+1} \cap W_{k+1}.$$

これは $\{x_n\}$ が well-defined であることを意味している.

W_n の定義から, $x_n = \Pi_{W_n} x$. $x_n = \Pi_{W_n} x$ より, 任意の $u \in F(S) \cap EP(f) \subset W_n$ に対して,

$$\phi(x_n, x) = \phi(\Pi_{W_n} x, x) \leq \phi(u, x) - \phi(u, \Pi_{W_n} x) \leq \phi(u, x)$$

よって, $\phi(x_n, x)$ は有界. それゆえ, $\{x_n\}$ と $\{T_{r_n}x_n\} = \{y_n\}$ も有界である.

$x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n} x \in H_n \cap W_n \subset W_n$ と $x_n = \Pi_{W_n} x$ から,

$$\phi(x_n, x) \le \phi(x_{n+1}, x), \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

すなわち $\{\phi(x_n, x)\}$ は単調非減少である. つまり, $\{\phi(x_n, x)\}$ の極限が存在する. $x_n = \Pi_{W_n} x$ から, 任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して,

$$\begin{aligned}\phi(x_{n+1}, x_n) &= \phi(x_{n+1}, \Pi_{W_n} x) \\ &\le \phi(x_{n+1}, x) - \phi(\Pi_{W_n} x, x) \\ &= \phi(x_{n+1}, x) - \phi(x_n, x).\end{aligned}$$

これは $\lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, x_n) = 0$ を意味している. $x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n} x \subset H_n$ から,

$$\phi(x_{n+1}, u_n) \le \phi(x_{n+1}, x_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

それゆえ,

$$\lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, u_n) = 0.$$

$\lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, x_n) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_{n+1}, u_n) = 0$ と E が一様凸かつ smooth であることから, 補題 4 より

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - u_n\| = 0.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0.$$

J が有界集合上で一様連続であり, かつ $\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0$ から,

$$\lim_{n\to\infty} \|Jx_n - Ju_n\| = 0.$$

$r = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|x_n\|, \|y_n\|\}$ とする. E が uniformly smooth バナッハ空間であることから, E^* は一様凸バナッハ空間である. それゆえ, 補題 5 から, 連続, 狭義単調増加, 凸関数 g が存在して, $g(0) = 0$ かつ

$$\|\alpha x^* + (1-\alpha)y^*\|^2 \le \alpha\|x^*\|^2 + (1-\alpha)\|y^*\|^2 - \alpha(1-\alpha)g(\|x^* - y^*\|) \ \ \forall x^*, y^* \in B_r^*, \ \ \alpha \in [0,1]$$

を満たす. よって, $u \in F(S) \cap EP(f)$ に対し,

$$\begin{aligned}\phi(u, u_n) &= \phi(u, J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JSy_n)) \\ &= \|u\|^2 - 2\langle u, \alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JSy_n\rangle + \|\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JSy_n\|^2 \\ &\le \|u\|^2 - 2\alpha_n\langle u, Jx_n\rangle - 2(1-\alpha_n)\langle u, JSy_n\rangle + \alpha_n\|x_n\|^2 + (1-\alpha_n)\|Sy_n\|^2 \\ &\quad - \alpha_n(1-\alpha_n)g(\|Jx_n - JSy_n\|) \\ &= \alpha_n\phi(u, x_n) + (1-\alpha_n)\phi(u, Sy_n) - \alpha_n(1-\alpha_n)g(\|Jx_n - JSx_n\|) \\ &\le \phi(u, x_n) - \alpha_n(1-\alpha_n)g(\|Jx_n - JSy_n\|).\end{aligned}$$

それゆえ

$$\alpha_n(1-\alpha_n)g(\|Jx_n - JSy_n\|) \le \phi(u, x_n) - \phi(u, u_n), \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

を得る．

$$\begin{aligned}\phi(u,x_n)-\phi(u,u_n)&=\|x_n\|^2-\|u_n\|^2-2\langle u,Jx_n-Ju_n\rangle\\&\le\left|\|x_n\|^2-\|u_n\|^2\right|+2|\langle u,Jx_n-Ju_n\rangle|\\&\le|\|x_n\|-\|u_n\||\,(\|x_n\|+\|u_n\|)+2\|u\|\|Jx_n-Ju_n\|\\&\le\|x_n-u_n\|\,(\|x_n\|+\|u_n\|)+2\|u\|\|Jx_n-Ju_n\|,\end{aligned}$$

より

$$\lim_{n\to\infty}(\phi(u,x_n)-\phi(u,u_n))=0.$$

$\liminf_{n\to\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)>0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}g(\|Jx_n-JSy_n\|)=0.$$

それゆえ，g の性質より

$$\lim_{n\to\infty}\|Jx_n-JSy_n\|=0$$

を得る．J^{-1} が有界集合上一様連続であることから，

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-Sy_n\|=0.$$

$y_n=T_{r_n}x_n$ と 補題 9 から，

$$\begin{aligned}\phi(y_n,x_n)=\phi(T_{r_n}x_n,x_n)&\le\phi(u,x_n)-\phi(u,T_{r_n}x_n)\\&=\phi(u,x_n)-\phi(u,y_n).\end{aligned}$$

$\phi(u,u_n)\le\alpha_n\phi(u,x_n)+(1-\alpha_n)\phi(u,y_n)$ から，

$$\phi(u,y_n)\ge\frac{\phi(u,u_n)-\alpha_n\phi(u,x_n)}{1-\alpha_n}$$

よって

$$\begin{aligned}\phi(u,x_n)-\phi(u,y_n)&\le\phi(u,x_n)-\frac{\phi(u,u_n)-\alpha_n\phi(u,x_n)}{1-\alpha_n}\\&=\frac{\phi(u,x_n)-\phi(u,u_n)}{1-\alpha_n}.\end{aligned}$$

それゆえ，

$$\lim_{n\to\infty}\phi(y_n,x_n)=0.$$

E が一様凸かつ smooth であることから，補題 4 より

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0. \tag{1}$$

$\lim_{n\to\infty}\|x_n-Sy_n\|=0$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-Sy_n\|=0.$$

$\{x_n\}$ が有界であることから，$\{x_n\}$ の部分点列 $\{x_{n_k}\}$ が存在して，$x_{n_k}\rightharpoonup\hat{x}$. また $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$ から，$y_{n_k}\rightharpoonup\hat{x}$. よって S が擬非拡大だることから，$\hat{x}\in\hat{F}(S)=F(S)$ を得る．

J が有界集合上一様連続であり, かつ (3) から

$$\lim_{n\to\infty}\|Jx_n - Jy_n\| = 0.$$

$r_n \geq a$ より,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|Jx_n - Jy_n\|}{r_n} = 0. \tag{2}$$

$y_n = T_{r_n}x_n$ より,

$$f(y_n, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - y_n, Jy_n - Jx_n\rangle \geq 0,\ \forall y \in C.$$

n を n_k とすると, (A2) より

$$\frac{1}{r_{n_k}}\langle y - y_{n_k}, Jy_{n_k} - Jx_{n_k}\rangle \geq -f(y_{n_k}, y) \geq f(y, y_{n_k}),\ \forall y \in C.$$

$k \to \infty$ とすると, (4) と (A4) から

$$f(y, \hat{x}) \leq 0,\ \forall y \in C.$$

$0 < t \leq 1$ を満たす t と $y \in C$ に対し, $y_t = ty + (1-t)\hat{x}$ とする. $y \in C$ かつ $\hat{x} \in C$ から, $y_t \in C$ すなわち $f(y_t, \hat{x}) \leq 0$. よって, (A1) から

$$\begin{aligned} 0 &= f(y_t, y_t) \\ &\leq tf(y_t, y) + (1-t)f(y_t, \hat{x}) \\ &\leq tf(y_t, y). \end{aligned}$$

$0 < t \leq 1$ より,

$$f(y_t, y) \geq 0,\ \forall y \in C.$$

$t \downarrow 0$ とすると, (A3) から

$$f(\hat{x}, y) \geq 0,\ \forall y \in C.$$

それゆえ, $\hat{x} \in EP(f)$.

$w = \Pi_{F(S)\cap EP(f)}x$ とする.

$x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n}x$ かつ $w \in F(S) \cap EP(f) \subset H_n \cap W_n$ から,

$$\phi(x_{n+1}, x) \leq \phi(w, x).$$

ノルムは弱下半連続より

$$\begin{aligned} \phi(\hat{x}, x) &= \|\hat{x}\|^2 - 2\langle \hat{x}, Jx\rangle + \|x\|^2 \\ &\leq \liminf_{k\to\infty}\left(\|x_{n_k}\|^2 - 2\langle x_{n_k}, Jx\rangle + \|x\|^2\right) \\ &= \liminf_{k\to\infty}\phi(x_{n_k}, x) \\ &\leq \limsup_{k\to\infty}\phi(x_{n_k}, x) \\ &\leq \phi(w, x). \end{aligned}$$

$\Pi_{F(S)\cap EP(f)}$ の定義より, $\hat{x}=w$. すなわち $\lim_{k\to\infty}\phi(x_{n_k},x)=\phi(w,x)$. それゆえ

$$\begin{aligned}0&=\lim_{k\to\infty}(\phi(x_{n_k},x)-\phi(w,x))\\&=\lim_{k\to\infty}(\|x_{n_k}\|^2-\|w\|^2-2\langle x_{n_k}-w,Jx\rangle)\\&=\lim_{k\to\infty}(\|x_{n_k}\|^2-\|w\|^2).\end{aligned}$$

E が Kadec-Klee property を持つことから, $x_{n_k}\to w=\Pi_{F(S)\cap EP(f)}x$. それゆえ, $\{x_n\}$ は $\Pi_{F(S)\cap EP(f)}x$ に強収束する. □

4 収縮射影法による強収束定理

定理 4. Eを *uniformly smooth* かつ一様凸なバナッハ空間とし, C をその空でない閉凸部分集合とする. 擬非拡大写像 $S:C\to C$ と条件 *(A1)-(A4)* を満たす関数 $f:C\times C\to\mathbb{R}$ が与えられ, $F(S)\cap EP(f)\neq\emptyset$ とする. $\{x_n\}$ を $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して,

$$\begin{cases}x_0=x\in C,\\ y_n\in C \textit{ such that } f(x_n,y)+\frac{1}{r_n}\langle y-x_n,Jx_n-Jy_n\rangle\geq 0,\ \forall y\in C,\\ u_n=J^{-1}(\alpha_nJx_n+(1-\alpha_n)JSy_n),\\ H_0=C,\\ H_{n+1}=\{z\in H_n:\phi(z,u_n)\leq\phi(z,x_n)\},\\ x_{n+1}=\Pi_{H_{n+1}}x\end{cases}$$

で定義する, ただし J は E 上の双対写像, $\{\alpha_n\}\subset[0,1)$ が $\liminf_{n\to\infty}\alpha_n(1-\alpha_n)>0$ を満たし, ある $a>0$ に対し $\{r_n\}\subset[a,\infty)$ とする. そのとき, $\{x_n\}$ は $\Pi_{F(S)\cap EP(f)}x$ に強収束する.

Proof. 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し, $y_n=T_{r_n}x_n$ とおくと, 補題 9 から T_{r_n} が擬非拡大であることがわかる.

まず, H_n が閉凸集合であることを示す. H_n が閉集合であることは明らか.

$$\begin{aligned}&\phi(z,u_n)\leq\phi(z,x_n)\\ \Longleftrightarrow&\|u_n\|^2-\|x_n\|^2-2\langle z,Ju_n-Jx_n\rangle\geq 0\end{aligned}$$

から, H_n は凸集合. よって, 任意の $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して, H_n が E の閉凸部分集合であることがわかる.

次に, 帰納法を用いることにより, 任意の $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して, $F(S)\cap EP(f)\subset H_n$ を示す. $H_0=C$ から,

$$F(S)\cap EP(f)\subset H_0.$$

$k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して, $F(S)\cap EP(f)\subset H_k$ を仮定する. $u\in F(S)\cap EP(f)\subset H_k$ とする. T_{r_k}

と S は擬非拡大であることから

$$\begin{aligned}
\phi(u, u_k) &= \phi(u, J^{-1}(\alpha_k Jx_k + (1-\alpha_k)JSy_k)) \\
&= \phi(u, J^{-1}(\alpha_k Jx_k + (1-\alpha_k)JST_{r_k}x_k)) \\
&= \|u\|^2 - 2\langle u, \alpha_k Jx_k + (1-\alpha_k)JST_{r_k}x_k\rangle + \|\alpha_k Jx_k + (1-\alpha_k)JST_{r_k}x_k\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 - 2\alpha_k\langle u, Jx_k\rangle - 2(1-\alpha_k)\langle u, JST_{r_k}x_k\rangle \\
&\qquad + \alpha_k\|x_k\|^2 + (1-\alpha_k)\|ST_{r_k}x_k\|^2 \\
&= \alpha_k\phi(u, x_k) + (1-\alpha_k)\phi(u, ST_{r_k}x_k) \\
&\leq \phi(u, x_k).
\end{aligned}$$

すなわち, $u \in H_{k+1}$. このことから

$$F(S) \cap EP(f) \subset H_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

これは $\{x_n\}$ が well-defined であることを示している.
x_n の定義から, 任意の $u \in F(S) \cap EP(f) \subset H_n$ に対して

$$\phi(x_n, x) = \phi(\Pi_{H_n}x, x) \leq \phi(u, x) - \phi(u, \Pi_{H_n}x) \leq \phi(u, x).$$

よって, $\phi(x_n, x)$ は有界. それゆえ, $\{x_n\}$ と $\{T_{r_n}x_n\} = \{y_n\}$ も有界である.
$H_{n+1} \subset H_n$ から,

$$\phi(x_n, x) \leq \phi(x_{n+1}, x),\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

すなわち $\{\phi(x_n, x)\}$ は単調非減少. よって, $\{\phi(x_n, x)\}$ の極限が存在する. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
\phi(x_{n+1}, x_n) &= \phi(x_{n+1}, \Pi_{H_n}x) \\
&\leq \phi(x_{n+1}, x) - \phi(\Pi_{H_n}x, x) \\
&= \phi(x_{n+1}, x) - \phi(x_n, x)
\end{aligned}$$

から, $\lim_{n\to\infty}\phi(x_{n+1}, x_n) = 0$. $x_{n+1} = \Pi_{H_{n+1}}x \in H_{n+1}$ から,

$$\phi(x_{n+1}, u_n) \leq \phi(x_{n+1}, x_n),\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

それゆえ,

$$\lim_{n\to\infty}\phi(x_{n+1}, u_n) = 0.$$

$\lim_{n\to\infty}\phi(x_{n+1}, x_n) = \lim_{n\to\infty}\phi(x_{n+1}, u_n) = 0$ と E が一様凸かつ smooth であることから, 補題 4 より

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_{n+1} - u_n\| = 0.$$

よって

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - u_n\| = 0.$$

J が有界集合上で一様連続であり, かつ $\lim_{n\to\infty}\|x_n - u_n\| = 0$ から,

$$\lim_{n\to\infty}\|Jx_n - Ju_n\| = 0.$$

$r = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|x_n\|, \|y_n\|\}$ とする. E が uniformly smooth バナッハ空間であることから, E^* は一様凸バナッハ空間である. それゆえ, 補題 5 から, 連続, 狭義単調増加, 凸関数 g が存在して, $g(0) = 0$ かつ

$$\|\alpha x^* + (1-\alpha)y^*\|^2 \le \alpha\|x^*\|^2 + (1-\alpha)\|y^*\|^2 - \alpha(1-\alpha)g(\|x^* - y^*\|) \quad \forall x^*, y^* \in B_r^*, \quad \alpha \in [0,1]$$

を満たす. よって, $u \in F(S) \cap EP(f)$ に対し,

$$\begin{aligned}
\phi(u, u_n) &= \phi(u, J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JSy_n)) \\
&= \|u\|^2 - 2\langle u, \alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JSy_n\rangle + \|\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JSy_n\|^2 \\
&\le \|u\|^2 - 2\alpha_n\langle u, Jx_n\rangle - 2(1-\alpha_n)\langle u, JSy_n\rangle + \alpha_n\|x_n\|^2 + (1-\alpha_n)\|Sy_n\|^2 \\
&\quad - \alpha_n(1-\alpha_n)g(\|Jx_n - JSy_n\|) \\
&= \alpha_n\phi(u, x_n) + (1-\alpha_n)\phi(u, Sy_n) - \alpha_n(1-\alpha_n)g(\|Jx_n - JSx_n\|) \\
&\le \phi(u, x_n) - \alpha_n(1-\alpha_n)g(\|Jx_n - JSy_n\|).
\end{aligned}$$

それゆえ

$$\alpha_n(1-\alpha_n)g(\|Jx_n - JSy_n\|) \le \phi(u, x_n) - \phi(u, u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

を得る.

$$\begin{aligned}
\phi(u, x_n) - \phi(u, u_n) &= \|x_n\|^2 - \|u_n\|^2 - 2\langle u, Jx_n - Ju_n\rangle \\
&\le \left|\|x_n\|^2 - \|u_n\|^2\right| + 2|\langle u, Jx_n - Ju_n\rangle| \\
&\le \left|\|x_n\| - \|u_n\|\right|(\|x_n\| + \|u_n\|) + 2\|u\|\|Jx_n - Ju_n\| \\
&\le \|x_n - u_n\|(\|x_n\| + \|u_n\|) + 2\|u\|\|Jx_n - Ju_n\|,
\end{aligned}$$

より

$$\lim_{n\to\infty}(\phi(u, x_n) - \phi(u, u_n)) = 0.$$

$\liminf_{n\to\infty}\alpha_n(1-\alpha_n) > 0$ から,

$$\lim_{n\to\infty} g(\|Jx_n - JSy_n\|) = 0.$$

それゆえ, g の性質より

$$\lim_{n\to\infty}\|Jx_n - JSy_n\| = 0$$

を得る. J^{-1} が有界集合上一様連続であることから,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - Sy_n\| = 0.$$

$y_n = T_{r_n}x_n$ と 補題 9 から,

$$\begin{aligned}
\phi(y_n, x_n) = \phi(T_{r_n}x_n, x_n) &\le \phi(u, x_n) - \phi(u, T_{r_n}x_n) \\
&= \phi(u, x_n) - \phi(u, y_n).
\end{aligned}$$

$\phi(u, u_n) \le \alpha_n\phi(u, x_n) + (1-\alpha_n)\phi(u, y_n)$ から,

$$\phi(u, y_n) \ge \frac{\phi(u, u_n) - \alpha_n\phi(u, x_n)}{1-\alpha_n}$$

よって

$$\begin{aligned}\phi(u,x_n)-\phi(u,y_n) &\le \phi(u,x_n)-\frac{\phi(u,u_n)-\alpha_n\phi(u,x_n)}{1-\alpha_n}\\ &=\frac{\phi(u,x_n)-\phi(u,u_n)}{1-\alpha_n}.\end{aligned}$$

それゆえ,

$$\lim_{n\to\infty}\phi(y_n,x_n)=0.$$

E が一様凸かつ smooth であることから, 補題 4 より

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-x_n\|=0. \tag{3}$$

$\lim_{n\to\infty}\|x_n-Sy_n\|=0$ から,

$$\lim_{n\to\infty}\|y_n-Sy_n\|=0.$$

$\{x_n\}$ が有界であることから, $\{x_n\}$ の部分点列 $\{x_{n_k}\}$ が存在して, $x_{n_k}\rightharpoonup\hat{x}$. また $\lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$ から, $y_{n_k}\rightharpoonup\hat{x}$. よって S が擬非拡大だることから, $\hat{x}\in\hat{F}(S)=F(S)$ を得る.

J が有界集合上一様連続であり, かつ (3) から

$$\lim_{n\to\infty}\|Jx_n-Jy_n\|=0.$$

$r_n\ge a$ より,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|Jx_n-Jy_n\|}{r_n}=0. \tag{4}$$

$y_n=T_{r_n}x_n$ より,

$$f(y_n,y)+\frac{1}{r_n}\langle y-y_n,Jy_n-Jx_n\rangle\ge 0,\ \forall y\in C.$$

n を n_k とすると, (A2) より

$$\frac{1}{r_{n_k}}\langle y-y_{n_k},Jy_{n_k}-Jx_{n_k}\rangle\ge -f(y_{n_k},y)\ge f(y,y_{n_k}),\ \forall y\in C.$$

$k\to\infty$ とすると, (4) と (A4) から

$$f(y,\hat{x})\le 0,\ \forall y\in C.$$

$0<t\le 1$ を満たす t と $y\in C$ に対し, $y_t=ty+(1-t)\hat{x}$ とする. $y\in C$ かつ $\hat{x}\in C$ から, $y_t\in C$ すなわち $f(y_t,\hat{x})\le 0$. よって, (A1) から

$$\begin{aligned}0&=f(y_t,y_t)\\ &\le tf(y_t,y)+(1-t)f(y_t,\hat{x})\\ &\le tf(y_t,y).\end{aligned}$$

$0<t\le 1$ より,

$$f(y_t,y)\ge 0,\ \forall y\in C.$$

$t\downarrow 0$ とすると, (A3) から

$$f(\hat{x},y)\ge 0,\ \forall y\in C.$$

それゆえ, $\hat{x} \in EP(f)$.
$w = \Pi_{F(S)\cap EP(f)}x$ とする.
$x_{n+1} = \Pi_{H_n \cap W_n} x$ かつ $w \in F(S) \cap EP(f) \subset H_n \cap W_n$ から,

$$\phi(x_{n+1}, x) \leq \phi(w, x).$$

ノルムは弱下半連続より

$$\begin{aligned} \phi(\hat{x}, x) &= \|\hat{x}\|^2 - 2\langle \hat{x}, Jx\rangle + \|x\|^2 \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \left(\|x_{n_k}\|^2 - 2\langle x_{n_k}, Jx\rangle + \|x\|^2\right) \\ &= \liminf_{k\to\infty} \phi(x_{n_k}, x) \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \phi(x_{n_k}, x) \\ &\leq \phi(w, x). \end{aligned}$$

$\Pi_{F(S)\cap EP(f)}$ の定義より, $\hat{x} = w$. すなわち $\lim_{k\to\infty} \phi(x_{n_k}, x) = \phi(w, x)$. それゆえ

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k\to\infty} \left(\phi(x_{n_k}, x) - \phi(w, x)\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\|x_{n_k}\|^2 - \|w\|^2 - 2\langle x_{n_k} - w, Jx\rangle\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\|x_{n_k}\|^2 - \|w\|^2\right). \end{aligned}$$

E が Kadec-Klee property を持つことから, $x_{n_k} \to w = \Pi_{F(S)\cap EP(f)}x$. それゆえ, $\{x_n\}$ は $\Pi_{F(S)\cap EP(f)}x$ に強収束する. □

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, in: A. G. Katrosatos (Ed.), Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] E. Blum, W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student, **63** (1994), 123–145.

[3] I. Cioranescu, *Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*, Kluwer, Dordrecht, 1990.

[4] P. L. Combettes, S. A. Hirstoaga, *Equilibrium programming in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal., **6** (2005), 117–136.

[5] S. Kamimura, W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim., **13** (2002), 938–945.

[6] F. Kohsaka, W. Takahashi, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive type mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl.,**2010** (2010), 1–15.

[7] S. Matsushita, W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl., **2004** (2004), 37–47.

[8] S. Matsushita, W. Takahashi, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory, **134** (2005), 257–266.

[9] A. Moudafi, *Second-order differential proximal methods for equilibrium problems*, J. Inequal. Pure Appl. Math., **4** (2003), art. 18.

[10] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl, **279** (2003), 372–379.

[11] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distance*, in: A. G. Katrosatos (Ed.), Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Marcel Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.

[12] A. Tada, W. Takahashi, *Strong convergence theorem for an equilibrium problem and a nonexpansive mapping*, in: W. Takahashi and T. Tanaka(Eds.), Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2006, pp. 609–617.

[13] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[14] 高橋渉, **凸解析と不動点近似**, 横浜図書, 2000.

[15] W. Takahashi , *Convergence theorems and nonlinear projections in Banach spaces. Banach and function spaces*, Yokohama Publ., Yokohama, (2004), 145–174.

[16] W. Takahashi, Y. Takeuchi and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl., **341** (2008), 276–286.

[17] W. Takahashi and K. Zembayashi, *Strong and weak convergence theorems for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal., **70** (2009), 45–57.

[18] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal., **16** (1991), 1127–1138.

[19] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions*, J. Math. Anal. Appl., **95** (1983), 344–374.

[20] C. Zălinescu, *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, River Edge, NJ, USA, 2002.