

# 回転球殻内の Boussinesq 熱対流問題の 安定性と分岐構造及び熱対流が両側球に及ぼす影響

木村恵二\*, 竹広真一, 山田道夫  
京都大学 数理解析研究所

Keiji KIMURA, Shin-ichi TAKEHIRO and Michio YAMADA  
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

## 概要

内側球の 3 軸回転を許容する回転球殻内の Boussinesq 熱対流問題について, 静止解が不安定化する点 (臨界点) からの分岐解である, 方位角 (経度) 方向に伝播する定常進行波を Newton 法によって求め, その安定領域を定めた. パラメタは半径比を 0.4, Prandtl 数を 1 に固定し, Taylor 数が  $52^2 \leq T \leq 500^2$ , Rayleigh 数がおよそ  $1500 \leq R \leq 10000$  の範囲を調べた. このパラメタ領域では臨界点から方位角方向の基本波数が 4 である定常進行波が分岐するが, 分岐した解の性質及び安定領域は, 両側球が同じ回転角速度で回転 (同期回転) する場合とほとんど変化がなかった. しかし臨界点から離れた  $R = 30,000$  で時間積分を行った結果, 両側球が同期回転する場合は準周期的な振る舞いをするのに対し, 両側球の 3 軸回転を許容した場合はカオス的な振る舞いをするのが分かった. また  $R = 50,000$  でも計算を行い,  $R = 30,000$  では外側球と内側球の回転軸は一致しているが,  $R = 50,000$  では回転軸が有意な角度をもつ状態になることが見出された.

## 1 イントロダクション

回転球殻内における Boussinesq 流体の熱対流問題は, 恒星や巨大惑星大気および惑星の流体核で生じていると考えられている天体規模の熱対流現象を理解するためのもっとも基本的な枠組みである. この問題は 1961 年に Chandrasekhar [2] による定式化が行われて以来半世紀以上にわたって盛んに研究されてきた.

この問題は, Chandrasekhar や Roberts [11], Busse [3, 4] によって先駆的な研究が行われて以後, 非常に多くの研究が行われているが, これらほぼ全ての研究において, 内側球と外側球の回転角速度が一定 (以下, 両側球が同期回転している, と呼ぶことにする) であることを仮定している. しかし実際の天体を念頭においた場合, 両側球が同期回転している必要はない. 実際に, 近年の地震波観測によって, 地球内核とマントルが異なる回転角速度で回転していることが示唆されている (回転角速度の向きや速さについてはなお議論が続いている) [12, 14, 13, 15]. 熱対流と磁場の相互作用を考慮した MHD ダイナモモデルでは, 熱対流及び磁場によるトルクの影響を考慮して内側球の差動回転を許容したモデルはいくつか存在する [5, 1, 6, 7] もの, 熱対流のみの問題で内側球, 両側球の自由回転を考慮した研究はほとんど無い. 両側球が 3 軸回転するモデルは MHD ダイナモモデルを含めてもほとんど考えられていない. そこでまず我々は, 以前の研究 [8]

\*E-mail: kimura@kurims.kyoto-u.ac.jp

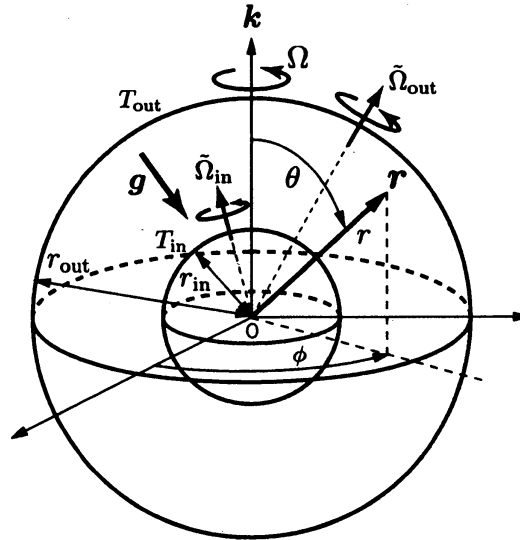


図 1: 系の設定を表す模式図.

で求めた, 臨界点から分岐する定常進行波が両側球に及ぼすトルクを計算した. その結果, 定常進行波の安定領域内で熱対流が及ぼすトルクは内側球を回転させるのに十分な大きさであることを見出した [9]. これは, 内側球の回転も考慮する場合, 熱対流が及ぼすトルクは無視できないことを示している. そこで本論文では, より物理的に自然な状況を考えるため, 両側球が熱対流によるトルクを受けて 3 軸回転するモデルを構築し, 両側球がトルクを受けて回転する場合に, 熱対流パターン並びに両側球の回転角速度の振る舞いを, 両側球が同期回転する場合と比較しつつ議論しようとした.

2 節では系の設定と支配方程式ならびに数値計算方法について述べる. 3 節では臨界点から分岐する定常進行波 TW4 の安定領域並びにパターンを, 両側球が同期回転する場合と内側球のみがトルクを受けて回転する場合で比較する. 4 節では臨界点から離れたところでの時間積分結果を, 両側球が同期回転する場合と比較しつつ議論する. 5 節はまとめである.

## 2 系の設定と支配方程式および数値計算方法

図 1 のように, 内殻の半径が  $r_{in}$ , 外殻の半径が  $r_{out}$  であるような回転球殻領域内の Boussinesq 流体を考える. 内側球, 外側球はそれぞれ熱対流によるトルクを受けて別個の回転角速度で回転しているとし, 単位ベクトル  $\mathbf{k}$  の方向を軸として一定回転角速度  $\Omega$  で回転している系に対して, 内側球が  $\tilde{\Omega}_{in}$ , 外側球が  $\tilde{\Omega}_{out}$  で回転しているとする. これはすなわち静止系では内側球, 外側球がそれぞれ  $\Omega\mathbf{k} + \tilde{\Omega}_{in}$ ,  $\Omega\mathbf{k} + \tilde{\Omega}_{out}$  で回転していることを意味する. 球殻領域内には一様に内部熱源  $H$  (単位質量あたり) が分布しているとする. この場合, 回転角速度  $\Omega$  で回転する系での熱伝導解は  $T_s^*(r) = -\beta r^2/2 + T_0^*$  となる. ここで  $\beta \equiv H/(3\kappa C_p)$ ,  $\kappa$  は熱拡散係数,  $C_p$  は定圧比熱,  $T_0^*$  は定数を表す. さらに一様な密度  $\rho_0$  からなる物体の自己重力場

$$\mathbf{g} = -\gamma\mathbf{r}, \quad (1)$$

が流体に作用しているとする. ここで  $\gamma$  は定数であり,  $\mathbf{r}$  は球の中心からの位置ベクトルである.

球殻の厚さ  $d \equiv r_{out} - r_{in}$  を長さスケール, 粘性拡散時間  $d^2/\nu$  を時間スケール, 温度スケールを  $\nu^2/(\gamma\alpha d^4)$  とする. ここで  $\nu$  は動粘性係数,  $\alpha$  は熱膨張率である. これらのスケールを用いて

速度場, 温度場, 圧力場および内側球, 外側球の慣性モーメントを無次元化する. 一定角速度  $\Omega \mathbf{k}$  で回転する系での無次元化された Boussinesq 方程式系は以下ようになる.

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \tau \mathbf{k} \times \mathbf{U} = -\nabla \pi + \Theta \mathbf{r} + \Delta \mathbf{U}, \quad (3)$$

$$P \left( \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta \right) = R \mathbf{U} \cdot \mathbf{r} + \nabla^2 \Theta, \quad (4)$$

$$I_{\text{in}} \frac{d\tilde{\Omega}_{\text{in}}}{dt} = N_{\text{in}}(\mathbf{U}), \quad (5)$$

$$I_{\text{out}} \frac{d\tilde{\Omega}_{\text{out}}}{dt} = N_{\text{out}}(\mathbf{U}). \quad (6)$$

ただし  $\mathbf{U}$  は無次元化された速度場,  $\Theta$  は無次元化された温度攪乱場 (無次元化された熱伝導解  $T_s$  からの変動) を表し,  $I_{\text{in}}, I_{\text{out}}$  は無次元化された内側球, 外側球の慣性モーメント,  $N_{\text{in}}, N_{\text{out}}$  はそれぞれ内側球, 外側球に働く無次元化されたトルクを表す.

この系の無次元パラメタは

$$\eta = \frac{r_{\text{in}}}{r_{\text{out}}}, \quad \tau = \sqrt{T} = \frac{2\Omega d^2}{\nu}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad R = \frac{\alpha \beta \gamma d^6}{\nu \kappa}, \quad I_{\text{in}} = \frac{I_{\text{in}}^*}{\rho_0 d^5}, \quad I_{\text{out}} = \frac{I_{\text{out}}^*}{\rho_0 d^5}, \quad (7)$$

である.  $\eta$  は半径比,  $T$  は Taylor 数,  $P$  は Prandtl 数,  $R$  は Rayleigh 数である.  $I_{\text{in}}^*, I_{\text{out}}^*$  はそれぞれ次元を持った内側球, 外側球の慣性モーメントを表す.

本研究では  $\eta = 0.4$ ,  $P = 1$  と固定し,  $\tau$  と  $R$  はおよそ  $52 \leq \tau \leq 500$ ,  $1500 \leq R \leq 50000$  の範囲で変化させることにする. また内側球慣性モーメントについては, 内側球内部が流体と同じ密度で一様であると仮定した場合に計算される値  $I_{\text{in}} = 8\pi(\eta/(1-\eta))^5/15 \simeq 0.22$  を用いる. これは式 (1) と無矛盾となっている. 外側球の慣性モーメントについては,  $I_{\text{out}} = 100$ , もしくは  $I_{\text{out}} = \infty$  すなわち外側球は一定回転角速度  $\Omega$  で  $\mathbf{k}$  軸回りを回転するとする.

本研究では, 熱対流によるトルクを受けて内側, 外側球が回転することを考えるため, 境界条件として両側球表面で粘着境界条件を用いる. また温度場に関しては両側球面で温度固定境界条件を用いる. すなわち両側球面上で

$$\mathbf{U}(r = r_{\text{in}}, \theta, \phi, t) = \tilde{\Omega}_{\text{in}} \times r_{\text{in}} \mathbf{e}_r, \quad \Theta(r = r_{\text{in}}, \theta, \phi, t) = 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{U}(r = r_{\text{out}}, \theta, \phi, t) = \tilde{\Omega}_{\text{out}} \times r_{\text{out}} \mathbf{e}_r, \quad \Theta(r = r_{\text{out}}, \theta, \phi, t) = 0, \quad (9)$$

を満たすとする. ただし  $\mathbf{e}_r$  は動径方向の単位ベクトルである.

速度場が非発散であることから, 速度場をトロイダルポテンシャルとポロイダルポテンシャルを用いて分解する. ただし速度場の境界条件を考慮して,

$$\mathbf{U} \equiv \nabla \times (\mathbf{r}(w + w_S)) + \nabla \times \{\nabla \times (\mathbf{r}v)\}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} w_S(\mathbf{r}, \tilde{\Omega}_{\text{in}}, \tilde{\Omega}_{\text{out}}) \equiv & -\frac{r_{\text{in}}^3}{r_{\text{out}}^3 - r_{\text{in}}^3} \left( r - \frac{r_{\text{out}}^3}{r^2} \right) (\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\Omega}_{\text{in}}) \\ & + \frac{r_{\text{out}}^3}{r_{\text{out}}^3 - r_{\text{in}}^3} \left( r - \frac{r_{\text{in}}^3}{r^2} \right) (\mathbf{e}_r \cdot \tilde{\Omega}_{\text{out}}), \end{aligned} \quad (11)$$

と分解する. ただしここで  $w_S$  は式 (3) において, 速度場の境界条件を満たしつつ圧力項と粘性項が釣り合う Stokes 解である (Landau and Lifshitz [10]).  $v$  および  $w$  の境界条件は

$$v = \frac{\partial v}{\partial r} = w = 0 \quad \text{at } r = r_{\text{in}}, r_{\text{out}}, \quad (12)$$

となる。これらのポテンシャルを用いて支配方程式を書き直すと以下の様になる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{L}_2 w) = & \left[ \nabla^2 \hat{L}_2 + \tau \frac{\partial}{\partial \phi} \right] w - \tau \hat{Q} v + \left[ \left( \nabla^2 - \frac{\partial}{\partial t} \right) \hat{L}_2 + \tau \frac{\partial}{\partial \phi} \right] w_S \\ & - \mathbf{r} \cdot [\nabla \times ((\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U})], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{L}_2 \nabla^2 v) = & \left[ \nabla^2 \hat{L}_2 + \tau \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \nabla^2 v + \tau \hat{Q} w - \hat{L}_2 \Theta + \tau \hat{Q} w_S \\ & - \mathbf{r} \cdot [\nabla \times \nabla \times ((\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U})], \end{aligned} \quad (14)$$

$$P \frac{\partial \Theta}{\partial t} = R \hat{L}_2 v + \nabla^2 \Theta - P (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta, \quad (15)$$

$$I_{\text{in}} \frac{d\tilde{\Omega}_{\text{in}}}{dt} = N_{\text{in}}(\mathbf{U}), \quad (16)$$

$$I_{\text{out}} \frac{d\tilde{\Omega}_{\text{out}}}{dt} = N_{\text{out}}(\mathbf{U}). \quad (17)$$

ここで  $\hat{L}_2$ ,  $\hat{Q}$  は天頂角 (余緯度)  $\theta$  と方位角 (経度)  $\phi$  を用いて

$$\hat{L}_2 = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right], \quad (18)$$

$$\hat{Q} \equiv \mathbf{k} \cdot \nabla - \frac{1}{2} \left[ \hat{L}_2 (\mathbf{k} \cdot \nabla) + (\mathbf{k} \cdot \nabla) \hat{L}_2 \right], \quad (19)$$

と表される演算子である。

式 (13)–(17) および (12) を数値的に解くために Galerkin スペクトル法を用いる。従属変数  $v$ ,  $w$ ,  $\Theta$  を、動径方向には Chebyshev 多項式を境界条件を満たすように組み合わせた関数系で展開し、立体角方向には球面調和関数で展開する。

まず臨界点から超臨界分岐する経度方向に伝播する非線形定常進行波解を Newton 法によって求める。ただし定常進行波を求める場合は、外側球が  $\tau$  で回転している系に対して静止しているとする、すなわち  $\tilde{\Omega}_{\text{out}} = \mathbf{0}$  とする。内側球の回転角速度も未知数であることに注意し、詳細は [8] を参照されたい。この数値計算の際には、Chebyshev 多項式の最高次数  $N$ 、球面調和関数の切断波数  $L$  をそれぞれ  $(N, L) = (21, 21)$  とし、適宜切断波数を増やして数値計算の妥当性を確認している。また、非線形項の評価は変換法を用いる。ただし aliasing error を除去するため、実空間での格子点数を  $(N_r, N_\theta, N_\phi) = (32, 32, 64)$  として計算を行う。ここで  $N_r$  は動径方向、 $N_\theta$  は天頂角 (余緯度) 方向、 $N_\phi$  は方位角 (経度) 方向の格子点数を表す。

時間積分を行う際には、拡散項に Crank-Nicolson 法、それ以外の項については 2 次 Adams-Bashforth を用いる。また Chebyshev 多項式の最高次数  $N = 42$ 、球面調和関数の切断波数  $L = 42$ 、変換法に用いる格子点数を  $(N_r, N_\theta, N_\phi) = (64, 64, 128)$  として aliasing error を除去している。また初期値は温度場のみに乱数を与えるとする。

### 3 臨界点から分岐する定常進行波

この節では、内側球がトルクを受けて回転する場合に、臨界点から分岐する定常進行波の性質について、両側球が同期回転している場合と比較しつつ述べる。ただしこの節では外側球は  $\tau$  で回転している系に対して静止している、すなわち  $\tilde{\Omega}_{\text{out}} = \mathbf{0}$  と固定する。また、熱対流が発生するまでは内側球と外側球の回転角速度は同じ、すなわち同期回転しているとする。内側球がトルクを受けて回転する場合も、熱対流が発生するまではトルクが発生しないため、同期回転とする。そのため内側球がトルクを受けて回転する場合も、 $\eta = 0.4$ ,  $P = 1$ ,  $52 \leq \tau \leq 500$  のパラメ

$\tau$	$R_c$	$R_c^{TW4}$	$R_{cf}^{TW4}$	
52	1612.5026	2133	2161	+1.3%
100	2070.3920	3675	3695	+0.5%
200	3224.8090	3902	3900	-0.0%
300	4324.7513	5044	5040	-0.0%
400	5355.1777	6924	6914	-0.1%
500	6386.6056	9605	9552	-0.6%

表 1: 臨界 Rayleigh 数  $R_c$  および TW4 が不安定化する Rayleigh 数 (marginal Rayleigh number)  $R_c^{TW4}$ ,  $R_{cf}^{TW4}$  を示した表.  $R_c^{TW4}$  は両側球が同期回転する場合の値,  $R_{cf}^{TW4}$  は内側球のみがトルクを受けて回転できる場合の値を示している. また最右列は  $(R_{cf}^{TW4} - R_c^{TW4})/R_c^{TW4}$  を示している.  $R_c^{TW4}$ ,  $R_{cf}^{TW4}$  の誤差は最大で  $\pm 5$  程度である.

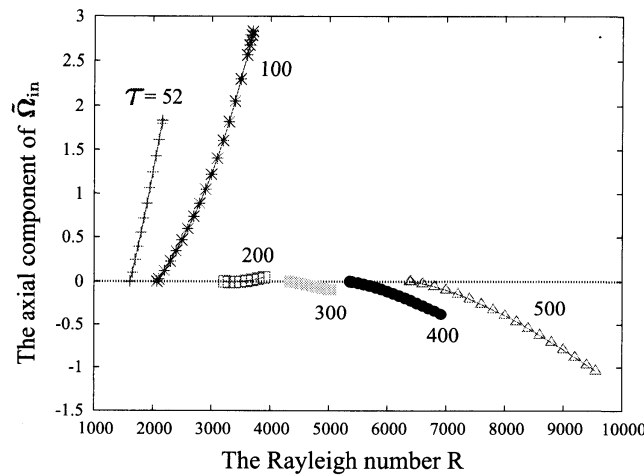


図 2: TW4 が安定な領域における, 内側球の回転角速度  $\tilde{\Omega}_{in}$  の  $k$  軸方向成分  $\tilde{\Omega}_{in,z}$ .

タ領域では, 臨界点から, 方位角 (経度) 方向に伝播する, 経度方向の基本波数が 4 であるような定常進行波 TW4 が分岐する.

表 1 は TW4 の中立点を表したものである.  $R_c^{TW4}$  は両側球が同期回転している場合,  $R_{cf}^{TW4}$  は内側球のみトルクを受けて回転する場合の TW4 の marginal Rayleigh 数を表す. この  $R_{cf}^{TW4}$  よりも大きな Rayleigh 数では TW4 は不安定である. また最右列は, 同期回転している場合と内側球がトルクを受けて回転する場合の TW4 の中立 Rayleigh 数の比  $(R_{cf}^{TW4} - R_c^{TW4})/R_c^{TW4}$  を示している.  $R_c^{TW4}$ ,  $R_{cf}^{TW4}$  の誤差は最大で  $\pm 5$  程度である. この表 1 の最右列から, 安定領域の変化は最大 1% 程度と大きくないことがわかる.

両側球が同期回転する場合と同じく, 臨界点から分岐する TW4 は南北対称なパターンであるため  $\tilde{\Omega}_{in}$  は外側球回転軸方向の成分しかもたない, すなわち  $\tilde{\Omega}_{in} = \tilde{\Omega}_{in,z} \mathbf{k}$  と表せる. 図 2 は,  $\tilde{\Omega}_{in,z}$  を, TW4 が安定な領域内で示した図である. この図 2 から, 外側球の回転が遅い  $\tau \lesssim 100$  の場合には内側球の回転角速度が外側球の回転角速度よりも速くなるが,  $\tau = 200 \sim 300$  では内側球と外側球の回転角速度はほとんど変わらず, 逆に外側球の回転が遅い  $\tau \gtrsim 400$  の場合には内側球の回転角速度が外側球の回転角速度よりも遅くなることを見出された. これは同期回転する場合に内側球に働くトルクの方法と同じ傾向であり, 同期回転する場合はトルクの方法の変化は平均

	$\tau$	$R$
(I)	52	2100
(II)	100	3600
(III)	200	3800
(IV)	300	5000
(V)	400	6900
(VI)	500	9200

表 2: 図 3 で示す TW4 の典型的なパラメタ. TW4 の中立 Rayleigh 数は表 1 を参照.

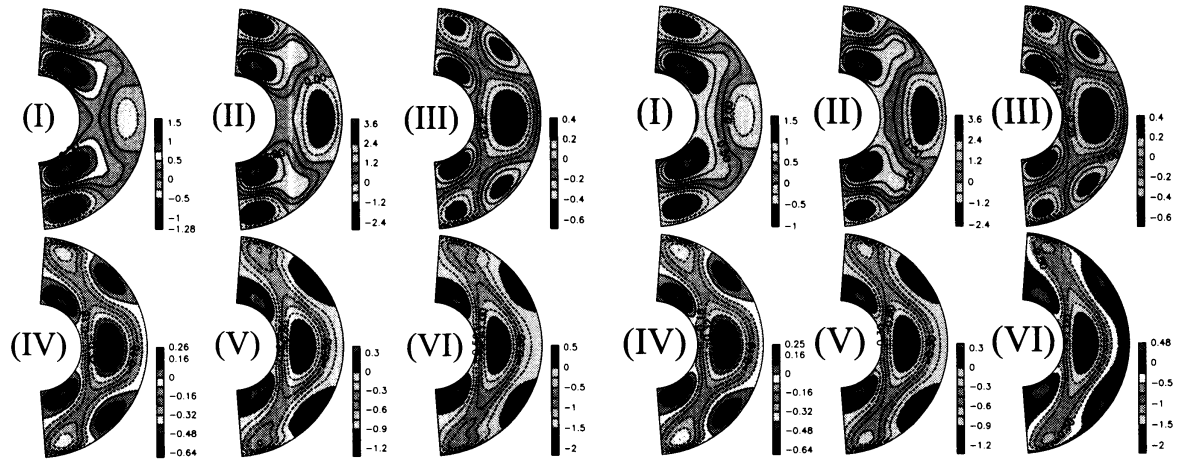


図 3: 内側球のみがトルクを受けて回転する場合の安定な TW4 の平均帯状流分布  $\langle u_\phi \rangle$ . ここで  $\langle \cdot \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int \cdot d\phi$ . (左): 両側球が同期回転する場合, (右): 内側球のみがトルクを受けて回転する場合. パラメタの詳細は表 2 を参照.

帯状流分布の構造の変化として理解できた [9].

図 3 は安定な TW4 の平均帯状流分布  $\langle u_\phi \rangle$  である. この右側 6 枚の図から, 回転が遅い領域では内側球付近に強い prograde な平均帯状流が生成され, 回転が速くなるにつれて内側球付近に強い retrograde な平均帯状流が生成されることが確認できる. これは図 2 で示した内側球の回転方向の変化と対応しており, 内側球に働くトルクの変化の場合と同様, 内側球の回転方向の変化も平均帯状流の構造の変化として解釈することができる. また図 2 から, 両側球が同期回転している場合と内側球がトルクを受けて回転する場合とを比較して, 平均帯状流の構造は定性的に変化が無く, 振幅も大きくは変化していないことが分かる.

表 3 は, TW4 が安定な領域内における  $\tilde{\Omega}_{in,z}$  の振幅が最大の値を示したものである. この表 3 から, TW4 の安定領域内では内側球の回転角速度の変化は最大でも 7% 程度と小さくなく, この結果, 表 1 に示したように安定領域の変化が小さく, また平均帯状流分布の変化も小さくなっていると考えられる. なお, 紙面の都合上掲載は割愛するが, 安定な TW4 の赤道断面 ( $\theta = 90^\circ$ ) における速度場動系方向成分  $u_r$  と子午断面 ( $\Phi = 22.5^\circ$ ) における渦度場回転軸方向成分  $\omega_z = \mathbf{k} \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$  もパターンに定性的な変化は見られない.

$\tau$	$\Omega = \tau/2$	$\text{sgn}(\tilde{\Omega}_{\text{in},z}) \cdot \max  \tilde{\Omega}_{\text{in},z} $	
52	26	+1.84	+7.08%
100	50	+2.83	+5.66%
200	100	-0.05	-0.05%
300	150	-0.09	-0.06%
400	200	-0.38	-0.19%
500	250	-1.04	-0.42%

表 3: 各  $\tau$  に対する外側球の回転角速度  $\Omega$ , TW4 の安定領域内での内側球の回転角速度の絶対値が最大の値  $\text{sgn}(\tilde{\Omega}_{\text{in},z}) \cdot \max |\tilde{\Omega}_{\text{in},z}|$ , およびそれらの比  $\text{sgn}(\tilde{\Omega}_{\text{in},z}) \cdot \max |\tilde{\Omega}_{\text{in},z}|/\Omega$  を表す.

#### 4 臨界点から離れたところでの時間積分結果

この節では内側球の慣性モーメント  $I_{\text{in}} \simeq 0.22$ , 外側球の慣性モーメント  $I_{\text{out}} = 100$  とし, 支配方程式を時間積分することによって, Rayleigh 数を増大させたときに発現する熱対流パターンを調べる. 以下では系の回転角速度を比較的速い領域  $\tau = 500$  に固定し,  $R = 30,000 (\simeq 4.7R_c)$  と  $50,000 (\simeq 7.8R_c)$  の場合の時間積分結果を示す (臨界 Rayleigh 数については表 1 を参照).

図 4 の上二枚は,  $\tau = 500$ ,  $R = 30,000$  の場合の, 内側球および外側球の回転角速度の時間変化を示したものである. この図から,  $R = 30,000$  では  $\tilde{\Omega}_{\text{in},z}$  および  $\tilde{\Omega}_{\text{out},z}$  のみが有意な値を持ち, なおかつその時間変化はカオス的であることが分かる. 図 4 の下三枚は殻内平均運動エネルギーの時間変化および  $t = 31$  における熱対流パターンを示している. ただしここで殻内平均運動エネルギー  $E$  および各方位角方向波数毎の殻内平均運動エネルギー  $E^m$  を  $E \equiv \frac{1}{V_{\text{shell}}} \int_{V_{\text{shell}}} \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 dV$ ,  $E^m \equiv \frac{1}{V_{\text{shell}}} \int_{V_{\text{shell}}} \frac{1}{2} |\mathbf{u}^m|^2 dV$  で定義する. ただし  $V_{\text{shell}}$  は球殻の体積を表し,  $V_{\text{shell}} \equiv \frac{4}{3}\pi (r_{\text{out}}^3 - r_{\text{in}}^3) = \frac{4}{3}\pi \frac{1-\eta^3}{(1-\eta)^3}$  であり,  $\mathbf{u}^m$  は各経度波数毎の速度場を表し  $m \neq m'$  において  $\int_{V_{\text{shell}}} \mathbf{u}^m \cdot \mathbf{u}^{m'} dV = 0$  が成立するため,  $\mathbf{u} = \sum_{m=0}^L \mathbf{u}^m$  および  $E = \sum_{m=0}^L E^m$  が成立する. この左下図から熱対流は各波数毎にカオス的な変動をしており, これは上二枚の回転角速度の時間変化からも分かる. またこの右下図から熱対流パターンが南北対称であることが分かり, これは回転角速度の回転軸方向成分のみが有意な値を持っていることから確認できる. また方位角方向波数  $m = 2$  のエネルギーが他の波数に対して卓越しており, これは中央の図からも確認できる. 以上より,  $R = 30,000$  では熱対流パターンは臨界波数  $m_c = 4$  よりも大きな構造である  $m = 2$  の成分が卓越し, カオス的な振る舞いをするが, 南北対称を保っていることが見出された.

図 5 は両側球が同期回転する場合の,  $\tau = 500$ ,  $R = 30,000$  における殻内平均運動エネルギーの時間変化および  $t = 51$  における熱対流パターンを示している. まず方位角方向波数  $m = 2$  のエネルギーが他の波数に対して圧倒的に卓越しており, これは中央の図からも確認できる. またエネルギーはどの経度波数でも時間的に準周期的な振る舞いをしていることが分かる. さらに右図から, わずかであるが南北反対称モードが誘起され, 南北非対称パターンが発現していることが分かる. 以上から, 両側球が同期回転する場合は  $R = 30,000$  においてエネルギーが準周期的な変動をしつつパターンは南北非対称となっているが, 両側球がトルクを受けて回転する場合はエネルギーがカオス的な変動をするもののパターンは南北対称を保っていることが分かる. ここから  $R = 30,000$  では両側球の運動によって解の性質が異なることが見出された. これは内側球の回転角速度の変化が TW4 の安定領域内での変化と比較して大きくなったためであると考えられる.

図 6 は両側球がトルクを受けて回転する場合の,  $\tau = 500$ ,  $R = 50,000$  における回転角速度の時間変化 (上二枚) とエネルギーの時間変化 (左下) 及び熱対流パターン (中央下, 右下) を示して

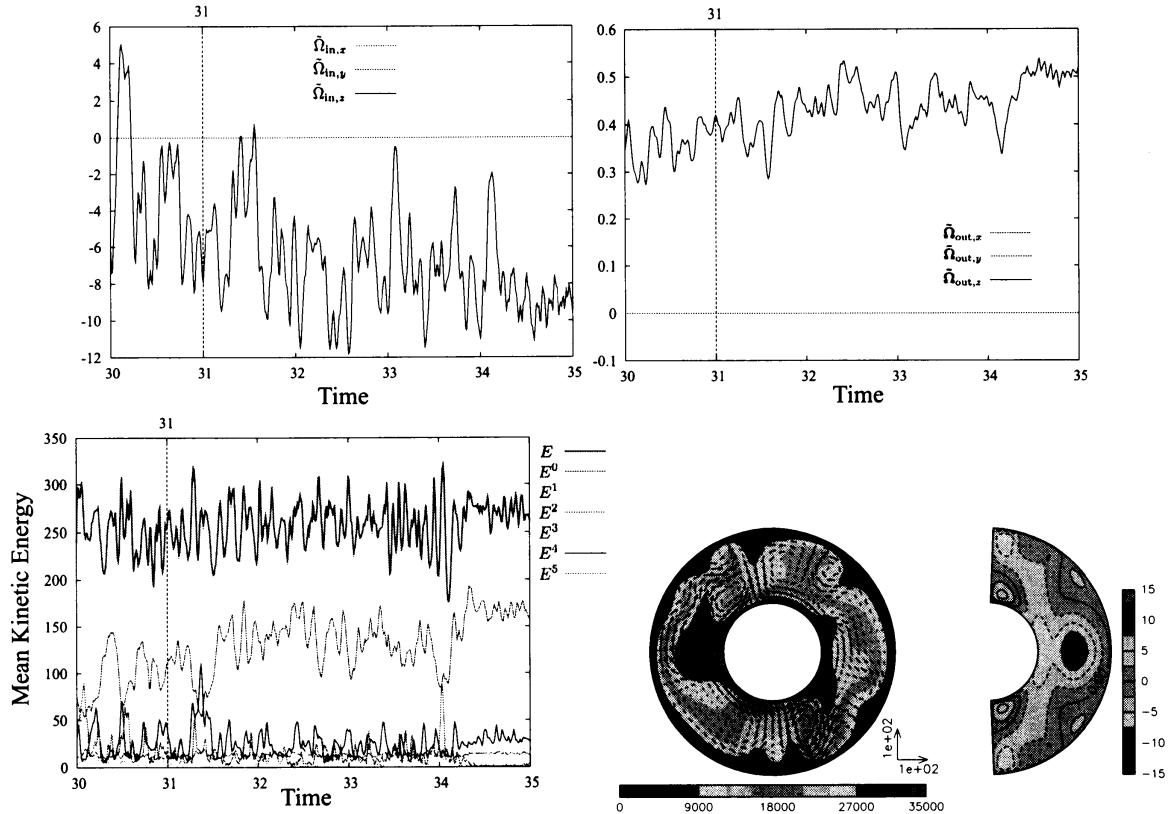


図 4: 両側球がトルクを受けて回転する場合の,  $\tau = 500$ ,  $R = 30,000$  における内側球 (左上) 及び外側球 (右上) の回転角速度の時間変化. ただし黒線: 回転軸方向成分, 赤線: 回転軸に垂直かつ  $\phi = 0$  の方向の成分, 青線: 回転軸に垂直かつ  $\phi = \pi/2$  の方向の成分. (左下): 殻内平均運動エネルギー ( $E$  および  $E^0 - E^5$ ), (中央下):  $t = 31$  での赤道断面の速度場 (矢印) 及び温度場 (tone), (右下):  $t = 31$  での平均帯状流分布.

いる. まず上二枚から, 回転角速度の回転軸方向成分のみならず回転軸方向に垂直な成分も有意な値をもってカオス的な時間変化をしていることが分かる. ここから  $R = 50,000$  では熱対流パターンが南北非対称となり, 両側球が 3 軸回転していることが見出された. パターンが南北非対称であることは右下図からも確認できる. また左下図から, どの経度波数のエネルギーもカオス的な変動をしており, なおかつ様々な経度波数のエネルギーが拮抗していることが分かる.

## 5 結果とまとめ

内側球がトルクを受けて回転する場合に, 同じく半径比  $\eta = 0.4$ , Prandtl 数  $P = 1$ , 粘着・温度固定境界条件の下,  $52 \leq \tau \leq 500$  の範囲で, 臨界点から分岐する, 方位角方向に伝播する定常進行波 TW4 のパターンと安定領域を求めた. その結果, 内側球の回転角速度は,  $\tau \lesssim 100$  では内側球が外側球よりも速く回転するが,  $200 \lesssim \tau \lesssim 300$  では両側球はほぼ同じ回転角速度で回転し,  $\tau \gtrsim 400$  では内側球が外側球に比べて遅く回転することが見出された. 内側球と外側球の回転角速度の比は, 外側球の回転が遅い  $\tau = 52$  の場合にもっとも大きく, 最大 7% 程度変化するが, 外側球の回転が速い領域では最大 0.4% 程度である. TW4 の安定領域については, 内側球が外側球よりも速く回転する  $\tau \lesssim 100$  では同期回転する場合と比べて安定領域が広がり, 内側球が



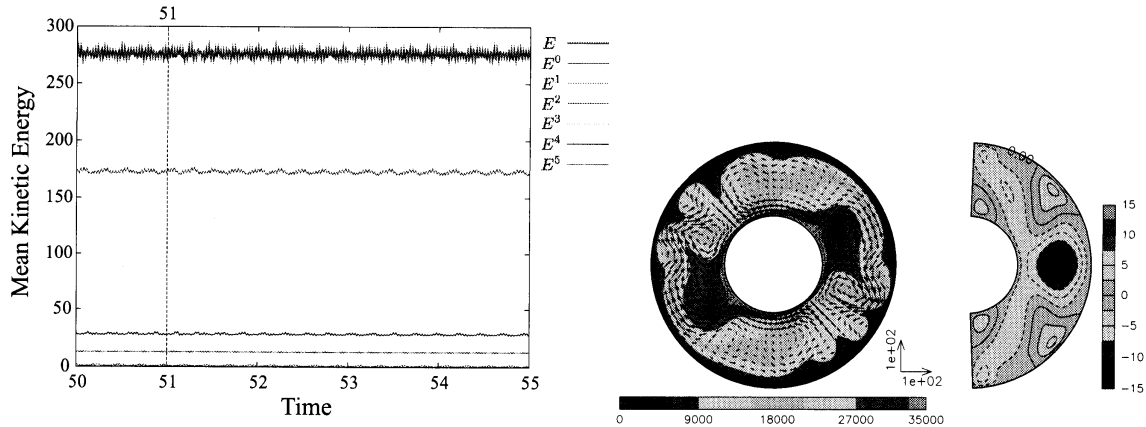


図 5: 両側球が同期回転する場合の  $\tau = 500$ ,  $R = 30,000$  での (左): 殻内平均運動エネルギー ( $E$  および  $E^0 - E^5$ ), (中央):  $t = 51$  での赤道断面の速度場 (矢印) 及び温度場 (tone), (右):  $t = 51$  での平均帯状流分布.

外側球よりも遅く回転する  $\tau \gtrsim 400$  では安定領域が狭くなることが見出された. しかしこの安定領域の変化は最大 1% 程度と大きくなく, また TW4 のパターンについては, TW4 が安定な領域では内側球がトルクを受けて回転する場合と両側球が同期回転する場合で定性的に変化は無い. 従って, TW4 が安定な領域では, 内側球の回転角速度の変化があまり大きくないため, 内側球の回転角速度の変化の TW4 に与える影響が小さいと考えられる.

次に, 両側球がトルクを受けて回転する場合,  $\eta = 0.4$ ,  $P = 1$ ,  $\tau = 500$ ,  $I_{in} \simeq 0.22$ ,  $I_{out} = 100$ , Rayleigh 数を  $R = 30,000 (\simeq 4.7R_c)$ ,  $R = 50,000 (\simeq 7.8R_c)$  と選択して時間積分を行った.  $R = 30,000$  では熱対流パターンがカオス的な振る舞いをするが, 南北対称なパターンを保っており, また経度方向の波数  $m = 2$  のエネルギー  $E^2$  が卓越していることを見出した. 両側球が同期回転している場合と同じパラメタ,  $R = 30,000$  で時間積分を行った結果, 熱対流パターンは準周期的な振る舞いをし, わずかだが南北非対称なパターンとなっていること,  $E^2$  のエネルギーが卓越していることを見出した. これらの結果より, TW4 の場合と異なり, 両側球の回転によって解の性質が大きく変化していることを見出された. これは内側球の回転角速度の変化が TW4 の安定領域内での変化と比較して大きくなったためであると考えられる. また  $R = 50,000$  では熱対流パターンはカオス的な振る舞いをし, なおかつ南北非対称であり, 両側球が 3 軸回転していることを見出された. これは Rayleigh 数が増大し, 熱対流が激しくなったためであると考えられる.

今後の課題として, 熱対流パターンが南北非対称となり両側球が 3 軸回転しだす Rayleigh 数の探索, およびその Rayleigh 数の  $\tau$  依存性を調べたい. これは我々が構築したモデルの強みである両側球の 3 軸回転がどのパラメタ領域で影響を及ぼすかを調べたいためである. また同時に南北対称パターンから南北非対称パターンへと遷移するメカニズムも重要な課題であると考えている.

## 謝辞

この研究は文部科学省の GCOE プログラム “数学のトップリーダーの育成-コア研究の深化と新領域の開拓” による支援を受けている. 計算機資源として京都大学情報メディアセンター (IMCC) の大型計算機 HX600 クラスタおよび京都大学数理解析研究所の高速計算機システムを用いた. また, 支配方程式の時間積分および Newton 法により非線形定常進行波を求める際, ス

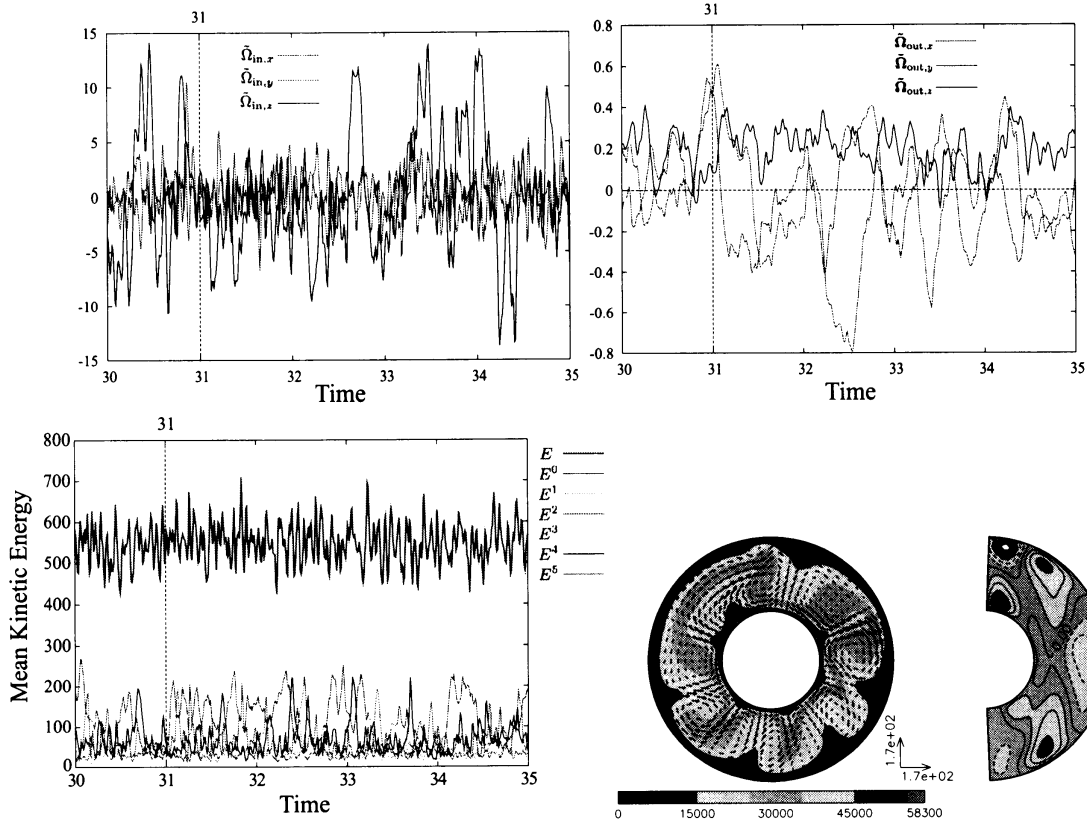


図 6: 両側球がトルクを受けて回転する場合の,  $\tau = 500$ ,  $R = 50,000$  における内側球 (左上) 及び外側球 (右上) の回転角速度の時間変化. (左下): 殻内平均運動エネルギー ( $E$  および  $E^0 - E^5$ ), (中央下):  $t = 31$  での赤道断面の速度場 (矢印) 及び温度場 (tone), (右下):  $t = 31$  での平均帯状流分布. これらの並びは図 4 に対応している.

ベクトル変換ライブラリ “ISPACK” (<http://www.gfd-dennou.org/library/ispack/>) と Fortran90 ラッパーライブラリ “SPMODEL” (<http://www.gfd-dennou.org/library/spmodel/>) を用いた. また解の安定性を調べる際の固有値計算は Fujitsu 科学計算ライブラリ SSLII および “LAPACK” (<http://www.netlib.org/lapack/>) を用いた. データ入出力ルーチンとして “gtool5” (<http://www.gfd-dennou.org/library/gtool/>) を用い, データ解析及び可視化には電脳 Ruby プロジェクト (<http://www.gfd-dennou.org/library/ruby/>) のソフトウェア “Gphys” を用いた.

## 参考文献

- [1] J.M. Aurnou and P.L. Olson, “Control of inner core rotation by electromagnetic, gravitational and mechanical torques,” *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **117**, 111 (2000).
- [2] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and Hydromagnetic stability*, Oxford Univ. Press, pp654 (1961).
- [3] F.H. Busse, “Differential rotation in stellar convection zones,” *Astrophys. J.*, **159**, 629 (1970).

- [4] F.H. Busse, "Thermal instabilities in rapidly rotating systems," *J. Fluid Mech.*, **44**, part3, 441 (1970).
- [5] G.A. Glatzmaier and P.H. Roberts, "A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle," *Phys. Earth Planet. Inter.*, **91**, 63 (1995).
- [6] R. Hollerbach, "A spectral solution of the magneto-convection equations in spherical geometry," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **32**, 773 (2000).
- [7] U.R. Christensen, J. Aubert, P. Cardin, E. Dormy, S. Gibbons, G.A. Glatzmaier, E. Grote, Y. Honkura, C. Jones, M. Kono, M. Matsushima, A. Sakuraba, F. Takahashi, A. Tilgner, J. Wicht, K. Zhang, "A numerical dynamo benchmark," *Phys. Earth Planet. Inter.*, **128**, 25 (2001).
- [8] K. Kimura, S. Takehiro and M. Yamada, "Stability and bifurcation diagram of Boussinesq thermal convection in a moderately rotating spherical shell," *Phys. Fluids*, **23**, 074101 (2011).
- [9] K. Kimura, S. Takehiro and M. Yamada, "Torques on the Inner and Outer Spheres Induced by the Boussinesq Thermal Convection in a Rotating Spherical Shell," *J. Phys. Soc. Japan* (2012, submitted).
- [10] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics, Second edition: Volume 6 (Course of Theoretical Physics)*, Butterworth-Heinemann (1987).
- [11] P.H. Roberts, "On the thermal instability of a rotating-fluid sphere containing heat sources" *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, **263**, 93 (1968).
- [12] X. Song and P.G. Richards, "Seismological evidence for differential rotation of the Earth's inner core," *Nature*, **382**, 221-224 (1996).
- [13] A. Souriau, R. Garcia and G. Poupinet, "The seismological picture of the inner core: structure and rotation," *C.R.Geoscience*, **335**, 51 (2003).
- [14] J. Tromp, "Inner-core anisotropy and rotation," *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, **29**, 47, 2001.
- [15] J. Zhang, X. Song, Y. Li, P.G. Richards, X. Sun and F. Waldhauser, "Inner core differential motion confirmed by earthquake waveform doublets," *Science*, **309**, 1357 (2005).