

大自由度散逸力学系における熱力学的分岐現象について

大阪大学・情報科学研究科 茶碗谷 毅

Tsuyoshi Chawanya

Graduate School of Information Science and Technology

Osaka University

この講演では、平均場結合をもつ区分線形写像系という比較的単純な構造を持つ力学系をとりあげて、いろいろなスケールで見えてくる非自明な構造を紹介してそれらの間の関係について議論した。

散逸力学系における集団運動 散逸力学系における「集団運動」の代表例としては振動子集団の引き込み現象が思い浮かぶ。この場合系全体が秩序だった挙動を示すのに対応して、アトラクターの次元は小さくなり、すべての振動子が完全に引き込んで振動する状態は 1 次元のリミットサイクルアトラクター上の運動に対応すると考えられる。これに対してアトラクターの自由度が減少するような「引き込み」的秩序形成が起こらないにもかかわらず現れる「集団的運動」も存在する。大域結合写像系はこの様な集団運動についての研究でしばしば用いられ多くの報告がある代表的な系の 1 つとなっている。

大域結合写像系のうちでも特にロジスティック写像の結合系は集団的な運動を含む変化に富んだ挙動を示し [1, 2]、多くの研究の対象となってきているが、この系がもつ非双曲性は相空間の構造を極めて複雑なものにしている。集団的な運動が現れると考えられるパラメータ領域においては、集団的運動に対応するアトラクター（もしくは弱い不安定性を持つサドル）が出現するだけでなく、極めて狭い basin を持つ漸近安定アトラクター、漸近安定性を持たないミルナーの弱い意味でのアトラクター、アトラクターではないものの長い時間軌道を捕捉する「アトラクターの残骸」と呼べるような性質を持つカオス的サドルなど様々なタイプのアトラクターやアトラクターもどきなども同時に相空間内に共存していると考えられる。そのため観測される挙動は系の自由度や観測時間、数値計算の精度などによっても大きく変わってしまう可能性がありそれらを系統的に整理して理解するのは極めて困難になっていると考えられる。

ここで扱う区分線形写像の平均場結合系はロジスティック写像の結合系と比べるとその挙動は単純で扱いやすいが、この系においても（低次元のアトラクターに引き込まれるわけではないのに現れる）非自明な集団的な運動が発生することが知られており [3]、集団的な運動について調べる上では都合のよい性質を持っている系の一つである。

ここではまずこの系の基本的な性質について簡単に触れた後、ある意味でこの系の大自由度極限での挙動に対応すると考えられる非線形ペロンフロベニウス系を紹介する。これらの 2 つの系はそれぞれ大自由度の結合写像系に対する「微視的」と「巨視的」な記述と呼ぶこともできるものになっている。

そこで、次にそれら2つの描像に基づいてえられる数値的な時系列、軌道まわりでの摂動に対する「線形」安定性、大域的な分岐構造などの点について、それぞれ比較対照して、一見逆説的にも見える興味深い食いちがいについて紹介する。最後に、有限の大自由度系で巨視的な集団運動と「巨視的」描像の範囲では見えてこない大偏差の揺らぎが共存することによって生じる現象として見ることができる、べき的な持続時間分布を持つ間欠的挙動などについても簡単に紹介する。

作業モデル系：Globally Coupled Map 系 (GCM) ここで考える系（区分線形写像の平均場結合系）は実 N 変数の写像系で、時刻 t における状態を $(x_1(t), \dots, x_N(t))$ として、その時間発展は

$$x_i(t+1) = a(1-k)f_a(x_i(t)) + \frac{k}{N} \sum_{j=1}^N f_a(x_j(t)), \quad (1)$$

$$f_a(x) = \begin{cases} -2-x, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & x > 1 \end{cases} \quad (2)$$

のように与えられる。「局所写像」の傾き a と結合強度 k は実数パラメータ、素子数（=系の自由度） N は整数値をとるパラメータとして扱う。

「巨視的」モデル (NLPF 系) ここでは N 個の変数を個別に扱うのではなく、分布として扱う「巨視的」な記述にあたる Non-Linear Perron Frobenius (NLPF) 系を導入する。[4, 5] ρ_t は $\int \rho_t(x) dx = 1$ で規格化された実数上の分布を表し、その時間発展が次のようにして与えられるとする。

$$\begin{aligned} \rho_{t+1}(x) &= \int \delta(F(y,t) - x) \rho_t(y) dy \\ F(x,t) &= (1-k)f_a(x) + kh(t) \\ h(t) &= \int f_a(x) \rho_t(x) dx \end{aligned}$$

a, k, f_a はそれぞれ GCM 系の対応するパラメータ、関数と同じものを表すものとしておく。

この系は ρ_t を GCM 系の一体状態変数の確率分布とすると平均場の値を期待値で評価してその時間発展を記述するものとみることができる。また ρ_t が (δ の和で与えられるような) GCM 系の一体状態の分布の場合の時間発展を記述するものとも考えることもできる。この系において ρ_t として適当な密度関数を持つような分布を考えたものは、ある意味で大自由度の GCM 系の典型的な初期条件を持つ軌道の挙動に対応することが期待できるだろう。

ここで考えているような区分線形写像に対応する NLPF 系で $a(1-k) > 1$ が成り立つパラメータ領域の場合、有界変動な密度関数を持つ分布から出発した軌道は、階段関数の無限級数で表される密度関数をもつ分布の空間に漸

近する。そのため密度関数を階段関数の級数として展開することで、比較的
低い計算コストで長時間かつ高精度の数値計算を行い、系の漸近的挙動につ
いて調べることが可能になっている。

GCM 系 と NLPF 系の関係 次にこれら 2 つの系の関係について幾つか
の点について比較してみることにする。

数値実験でえられた平均場のゆらぎ 図 1 に $N = 10, 100, 1000$ の GCM 系
及び NLPF 系の数値計算で得られた平均場の時系列を delay coordinate plot
したものを示す。自由度が大きくなるとともに、平均場の揺らぎのなかにあ
る準周期的な構造が浮かび上がってきている。ここでみられるような揺らぎ
の構造に関しては NLPF 系が「 $N = \infty$ 」の GCM 系に対応しているように
みえる。

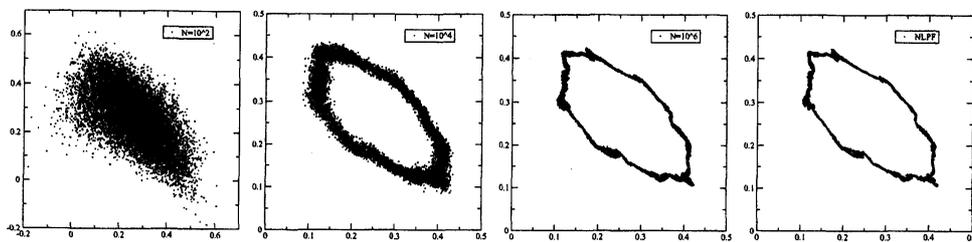


図 1: delay coordinate plot でみた平均場のゆらぎの構造：

自由度 $N = 10^2, 10^4, 10^6$ の GCM 系（左側 3 つ）と NLPF 系（右端）で
えられた平均場の時系列について、時間遅れ座標系 $(h(t), h(t+1))$ を使っ
て表示したもの。いずれもパラメータは $a = 3.0, k = 0.45$ で、初期条件は
 $w = 0.4$ のアトラクター（残骸）付近として、 10^4 ステップ分のデータを表
示してある。

「線形」安定性 次に集団揺らぎの構造を調べる上で重要な手がかりになる
と考えられる不動点や軌道の「線形安定性」について考えてみることにする。

GCM 系は相空間において

- 原点を中心とする一様な a 倍の引き延ばし
- $x_i = \pm 1, (i = 1 \dots N)$ における折りたたみ
- 「対角線」 $\{x_1 = x_2 = \dots = x_N\}$ への $(1 - k)$ 倍の縮小（平均場結合）

の 3 つを順に作用させたものと等価となっており、典型的な点のまわりの十
分小さな球は、長軸（1 次元）方向 a 倍、短軸（ $N - 1$ 次元）方向 $a(1 - k)$
の楕円体に写される。したがって $a(1 - k) > 1$ が成り立つ限りこの写像は局
所的に拡大的でアトラクターの次元は全空間と等しく N となり、またリア

プノフ指数はすべて（自由度 N の値によらず） $[\log(a(1-k)), \log(a)]$ の範囲にあることがわかる。

一方、NLPF 系についてはどのような意味での安定性を考えるのが妥当であるかは自明ではない。ここではある時刻での平均場の値に対する摂動（つまり分布全体の平行移動）が、その後の時刻における平均場の値にもたらずれの大きさ（が時間とともに増大するのか減衰するのか）により安定性を評価することにする。

この系は傾き $a(1-k)$ の区分線形写像の自然不変測度に対応する定常解をもつが、このような定常解に微小な平均場の摂動を加えた場合を考えてみる。平均値の定常解からの揺らぎを $\xi(t)$ で表し、これが限りなく小さいとして形式的な「線形応答」を考えると、

$$\xi(t) = k[L_1\xi(t-1) + \dots + L_\tau\xi(t-\tau) + \dots] \quad (3)$$

のような漸化式が得られる。ここで k は結合強度のパラメータで、線形応答係数 $\{L_i\}$ は平均値が 0 で絶対値が一定の数値で、符号は元の定常解の形によって決まるが典型的な場合には不規則な数列となる。例外的な場合を除き $k \neq 0$ では常に $\xi = 0$ の定常解は不安定となることが予想され、揺らぎの最大の成長率は $O(k^2)$ 程度と見積もられる。定常解以外の解のまわりの安定性についても同様な見積りが可能で、やはり k の値が 0 に近いところでは 0 に近い正の成長率を持つと考えられる。特にある程度結合が弱い領域を考えると NLPF 系における最大成長率は 0 に近い値をとると見積もられるが、生の GCM における線形成長率は自由度 N によらない 0 から離れた下限を持っており、GCM 系の自由度無限大の極限を考えてもこれらが単純に対応することはないことがわかる。

観測される時系列にみられる大自由度 GCM 系と NLPF 系間の対応関係と、「線形安定性」をみたときの不一致はやや逆説的なようにも見えるが、これは NLPF 系の「線形」不安定性（リアプノフ指数）は、有限自由度の GCM 系においては自由度に応じた精度で粗視化したときにえられる「有限振幅リアプノフ数」と対応しており、自由度無限大の極限においてはこの粗視化のスケールの下限が 0 に近づくと考えるのが自然であるように思われる。

大域的な分岐構造 ここで考えている系の単体の局所写像 f_a は、 $a < 2$ の場合は $[-2, 0]$, $[0, 2]$ の区間内にそれぞれアトラクターをもつが、 $a = 2$ においてこれらは衝突して 1 つのアトラクターとなる。（さらに $a = 3$ においてクライシスを起こして有界なアトラクターは消失する。）

N 自由度 GCM 系の場合には、 $a < 2$ かつ $a(1-k) > 1$ を満たすパラメータ領域では 2^N 個のアトラクター¹が共存しているが、これらは a の増加とともに壊れていき $a = 3$ までの間に 1 つに融合する。NLPF 系でもやはり

¹ 2^n -周期の概周期的カオスに対応してアトラクターがさらに細かく分かれているパラメータ領域も存在するがここでは気にしないでおく

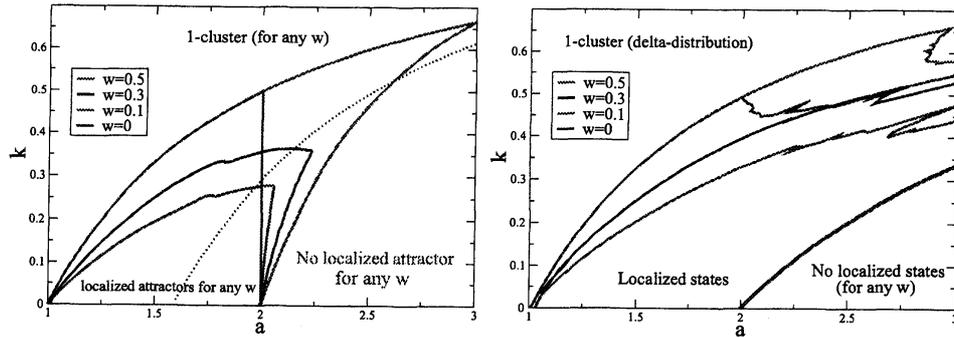


図 2: 2つのグループに分かれた局在化状態がアトラクターとなるパラメータ領域:

(左):GCM系(右):NLPF系, いずれも (a, k) 平面上で $w = 0.5, 0.3, 0.1, 0$ の4種類の分割比率の局在化アトラクターが存在するパラメータ領域をそれぞれ数値的に求め、それらの境界線をプロットしてある。

$a < 2$ かつ $a(1 - k) > 1$ を満たすパラメータ領域では、 x が負の部分に全体のうちの割合 w 、正の部分に $(1 - w)$ が載っている状態に対応する「アトラクター」の 1-parameter 族が存在すると考えられる。ただしこれらの「局在状態」に対応するアトラクターが存在するパラメータ (a, k) の範囲は GCM 系と NLPF 系では大きく食い違っている。

数値的な結果から、GCM 系における局在状態アトラクターの存在範囲は、全体の自由度 N にはよらず、正の側と負の側に局在する素子数の比率のみに依存して決まることが予想される。特に図2のくさび状領域の右側では $w:(1-w)$ の割合でわかれて局在化した2グループの状態に対応するアトラクターは N の値によらずに存在しないことは示すことができる。²

一方 NLPF 系の対応するアトラクターは GCM 系の対応するアトラクターよりも壊れにくく、その存在領域は $a = 3$ を越えて大きな a の値にまで広がっている。

これらを比較してみると、状態変数が正と負の2つのグループに分かれてそれぞれ局在化する状態の安定性に関して、これら2つの描像の間で食い違うパラメータ領域がかなり広い範囲にわたることがわかる。この領域においては、2つのグループにわかれた局在状態は(有限自由度 GCM 系では)自

²写像による相空間の体積拡大率と折り返しによる写像度の関係から、 $a^3(1 - k)^2 > 4$ が成り立つ場合自由度3以上ではアトラクター上でそのうち少なくとも2個の要素の衝突が発生する(アトラクターがある不変超平面 $\{x_i = x_j\}$, $(\exists i, j, i \neq j)$ と交わる)こと、さらに GCM 系のアトラクターが 2-cluster 状態に対応する不変平面と交わる(つまりアトラクター上の典型的な軌道を考えて、2-cluster 状態に限りなく接近する)ことを示すことができる。2-cluster 状態に対応する不変平面上のダイナミクスは2自由度の区分線形写像系として表され、元の N 自由度 GCM 系が局在アトラクターをもつためには、この2自由度系が局在状態に対応するアトラクターを持つことが必要条件となる。この2自由度系のアトラクターは、クライシス直上を除くと臨界線の像でかこまれた多角形となるので正確に求めることができる。そのためこの2次元系における分岐が起きるパラメータの値についてはよい精度で計算することができる。この2自由度系のクライシスが起るパラメータ値を数値的に求めたものが図2のくさび状の境界線に対応する。

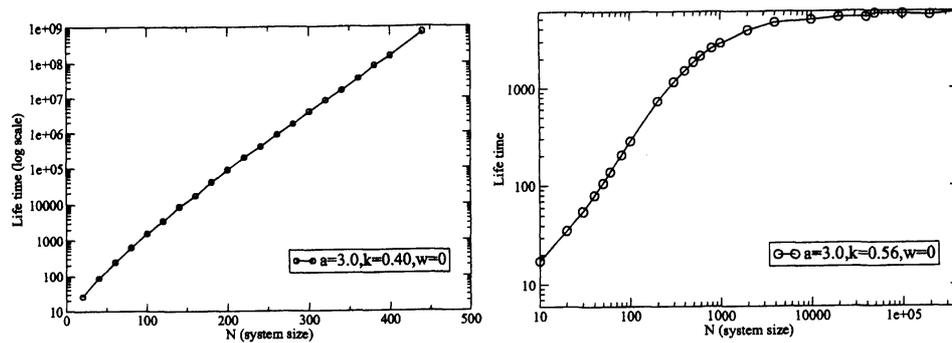


図 3: 系の自由度と局在化状態の寿命の関係：

左：「準安定状態」GCM系では不安定だが NLPF系では安定の場合

右：NLPF系においても不安定の場合

自由度がいくら大きってもアトラクターとはなることはないが、NLPF系においては対応する局在状態が永続するということになる。

このようなパラメータ領域においても、局在状態における平均場の時系列をみるとこれら2つはよく対応しているように見える（図1はこのようなパラメータ領域内のものである）ので、このような相図の食い違いがあるのは意外ではある。ただし、この領域における局在状態の寿命と自由度の関係を実験で調べてみると、自由度の増大とともに局在状態の寿命は指数関数的に伸びており、自由度無限大の極限では寿命が発散すると考えられるので、GCM系の自由度無限大の極限とNLPF系の挙動の間にはやはりある意味では対応関係があることがわかる。

このパラメータ領域におけるGCM系の挙動に対しては次のような見方で整理することができるだろう。

- 局在状態からの脱出には、片方の集団からもう一方への遷移を引き起こすのに必要な、あるしきい値を越えた平均場の大きな揺らぎが必要である
- 集団的な運動による平均場の揺らぎ、つまり「期待値通り」の平均場の揺らぎでは、局在状態からの脱出は発生しない
- 脱出を引き起こすためには期待値から外れた大偏差の揺らぎが必要であり、その発生頻度は自由度に対して指数関数的に依存して小さくなる、

間欠相とその内部構造 大自由度のGCM系においては、広いパラメータ領域わたっていろいろな分割比率に対応する「準安定状態」が相空間内で共存すると考えられ、そこでは準安定状態間の間欠的な状態遷移が永久に続くことになる。これらの準安定状態の寿命は、

$$\exp\{(\text{“分割比率に依存する rate function”})(\text{“自由度 } N'')\}$$

程度として見積もることができるだろう。その結果、ある程度自由度が大きな系においては対数スケール上で $O(N)$ 程度の幅に広がった寿命の分布を持つ多数の準安定状態が共存することになることが期待され、数値実験でもそのような構造が観測されている。今回の発表では詳しく触れられなかったが、このパラメータ領域において、準安定状態間の遷移頻度分布に注目すると、定性的に異なるいくつかの「相」に分かれていることがわかる。この違いは例えば準安定状態間遷移の時間間隔の分布などに現れており、例えばそのうちの一つの相では遷移イベントの時間間隔は指数 -1 のロバストなべき則がみられている。

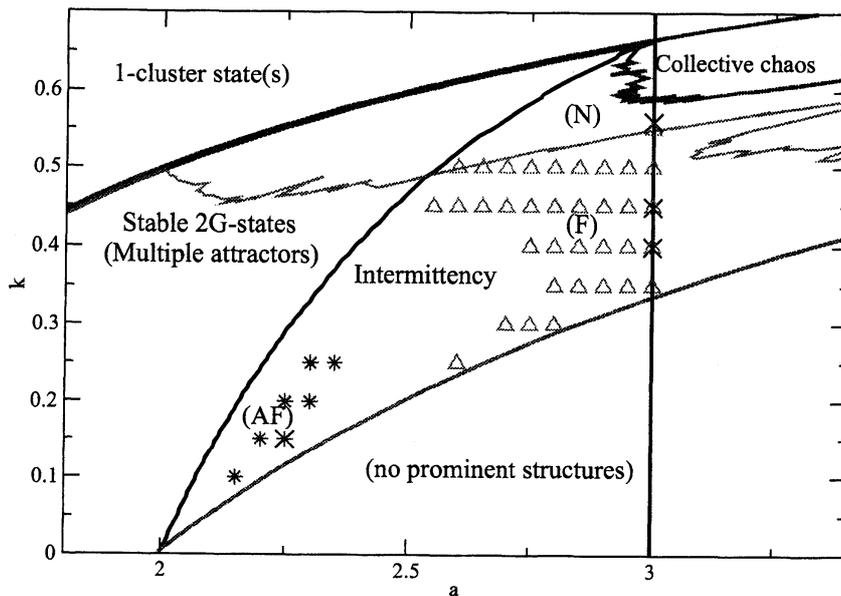


図 4: GCM 系の相図:

間欠的挙動が見られる領域はさらに3つの相に分けることができる (AF相): 分割比率がほぼ半々に近い状態が支配的 (F相): 分割比率が大きく偏った状態が支配的 (N相): ほぼ同等の頻度で様々な分割比率の状態が出現する

まとめ ここでは平均場結合の区分線型写像系という、一見かなり単純そうに見える系に隠れているいくつかの構造について紹介した。この系は自由度が大きくてもやはり区分線形写像であることには変わりなく、それほど写像そのものが複雑になるわけではない。しかし多くの力学系と同様、この系においても時間無限大の極限での挙動に対応するアトラクターに注目すると、それほど自明ではない分岐現象が見えてくる。また自由度無限大の極限を考えると、元の系の安定性や分岐構造とはまた異なる軌道安定性や分岐構造をもつ「巨視的な力学」に支配されるように見える挙動が現れてくる。「微視的な分岐」と「巨視的な分岐」の狭間にあるパラメータ領域に注目して有限だがある程度大きな自由度の系を考えると、そこには「微視的」「巨視的」のど

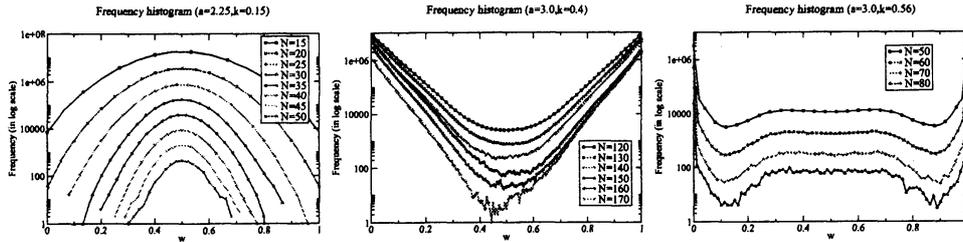


図 5: 分割比率ごとの出現頻度の分布:

左から AF, F, N 相について、分割比率 0 から 1 と対応する局在状態の出現回数 (対数スケール) の関係をプロットしたもの。重ね書きされている複数の線は異なる N の値に対応している。AF, F 相では N が大きくなるほど出現頻度の偏りが大きくなっている。

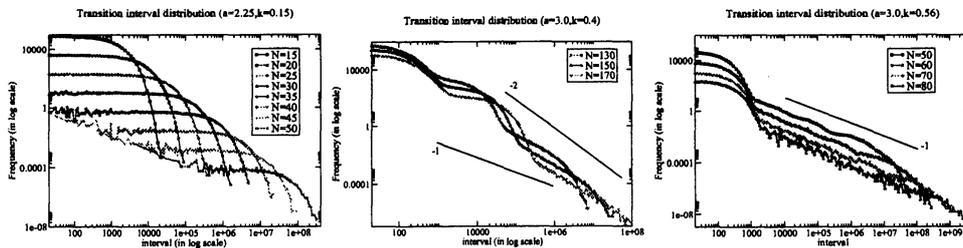


図 6: 遷移イベントの時間間隔の頻度分布:

左から AF, F, N 相について、遷移イベント間の時間間隔 (つまり局在状態の持続時間) の頻度分布を log-log scale でプロットしたもの。それぞれ幾つかの異なる N の値について行った数値実験の結果を重ねて表示してある。N 相では指数 -1 のべき則が広い範囲にわたり現れている。

ちらとも異なるレベルでの法則に従うように見える構造をもつ間欠的な挙動が見えてくる。

間欠的な挙動が現れるようなパラメータ領域において、注目するスケールとそこでの現象を支配するようにみえる法則性との関係を整理してみると次のようになるだろう。

微細スケールに対応する比較的短時間での微視的カオス由来の不安定性:有限振幅の摂動を考えた場合には平均場でみた摂動が $O(N^{-1})$ 程度の大きさに成長するまでの (おそらくあまり長くない) 期間の挙動に対応すると考えられる。元の写像のもつ線形不安定性に近い比較的強い指数的不安定性が観測されると考えられる。

自由度の大きさと共に明瞭かつ堅牢化する集団運動:ある程度大きな自由度の系では (N に対して指数関数に依存するような) ある程度長い時間、($O(N^{-1/2})$ 程度よりも細かい構造は微視的な大自由度カオスの影響でボケた形で) 巨視的な力学の法則に従う平均場の揺らぎが観測される。

「ある程度大きな自由度」と「かなり長い時間スケール」において見えてくる間欠的挙動：ある程度多数の「準安定状態」がある程度はっきりと観測される程度に大きな自由度をもつ系で、それらの準安定状態の寿命よりも長いタイムスケールで系の挙動に注目すると、「準安定状態」間の遷移とそれを支配する法則性が見えてくる。

自由度有限、時間無限大の極限でみえるアトラクターの構造：考えているパラメータ領域ではこれらの「準安定状態」に対応するものは既にクライシスによって一繋がり大きなアトラクターに呑み込まれて見えなくなっている

この「間欠的な挙動」は「中途半端に大きい」自由度の系でしか観測できず、いろいろな極限をとると見えなくなってしまう（そのためとても扱いにくい）ような現象だ。しかしここで扱っているような単純な系においてもこの様な構造が自発的に現れることには意味があるように思われる。非平衡系を扱う場合には、内部構造をもつある程度大きな要素からなる多体系を考えたり、流れに支配的な影響を及ぼすボトルネックのような構造に注目したりといったように、このような「そこそこの多体系」を考えるのはそれほど不自然なものではないだろう。また非平衡の現象の面白さの大きな部分はこういった極限をとると見えなくなってしまうような部分にあるようにも思われるが、こういった現象の特徴を数理モデルにおいて再現して解析するための基礎的な知見をえる上で GCM 系の間欠的挙動は役に立つ現象なのではないだろうか。

この原稿は [6] 及び [7] の概略を元に、研究会での議論などに基づき一部補足を加えたものです。研究会の主催者及び有益な議論をしていただいた参加者の皆様に感謝します。

参考文献

- [1] K. Kaneko, *Physica D* 55:368 (1992)
- [2] M. Komuro, *RIMS Kokyuroku*,1118:99 (1999)
- [3] S. V. Ershov and A. B. Potapov, *Physica D* 86:523 (1995)
- [4] K. Kaneko, *Phys. Lett. A* 139: 47 (1989)
- [5] A.S. Pikovsky, and J. Kurths, *Physica D* 76:411 (1994)
- [6] Tsuyoshi Chawanya and Satoru Morita *Physica D* 116: 44 (1998)
- [7] Tsuyoshi Chawanya, Daisuke Yamaji, Yasuhiro Shimaguchi and Shun Shigeta, *Progress of Theoretical Physics*, 125: 879 (2011)