数理解析研究所講究録
第 1830 巻 2013 年 119-126

圧縮性粘性流体の熱対流問題
HEAT CONVECTIONS OF COMPRESSIBLE VISCOUS FLUIDS

T. Nishida[a] , **M. Padula**[b] and **Y. Teramoto**[c]
西田 孝明 寺本 恵昭

[a] 京都大学・情報学研究科
Kyoto University
tkknish@acs.i.kyoto-u.ac.jp

[c] 摂南大学・工学部
Setsunan University
teramoto@mpg.setsunan.ac.jp

Abstract

圧縮性粘性流体の熱対流問題として水平領域 $z_0 < z < z_0+1$ での流体に重力が働き、下から一様に熱を加える定常問題を考える。無次元化を

$$L = z_0 + \frac{1}{2} = \frac{T_u + T_l}{2\beta d}, \qquad \beta = \frac{T_l - T_u}{d}$$

としている。 外力が働くときの定常解および定常分岐(パターン形成)が $L \geq L_0$ で一様に得られ、 $L \to +\infty$ での極限は Oberbeck-Boussinesq 方程式系の定常解および定常分岐になっている。

Steady solutions are obtained for heat convection problems of compressible viscous fluids in the horizontal domain $z_0 < z < z_0+1$ under the gravity with external forces. They include steady solutions and stationary bifurcations (pattern formations) for the Oberbeck-Boussinesq system as a limit of $L \to +\infty$.

1 定式化

Spiegel [5] の無次元化に従い、

$$\mathcal{R}^2 = \frac{P^2\beta R_* c_p (m+1)^3 d^{2m+3}}{g^2\mu\kappa}, \quad z_0 = \frac{T_u}{\beta_0 d}, \quad \beta_0 = \frac{T_l - T_u}{d},$$

を用いる。ここで垂直軸 ($\boldsymbol{e}_3$) を下向きにとり、 d は水平領域の厚さとしている。 このとき無次元化方程式は、水平帯状領域 $z_0 < z < z_0+1$ で次で定式化される。 ([5], [7], [10]).

----

a) supported in part by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (23540253),
b) supported in part by the national Far 2012 and the GNFM of italian INDAM,
c) supported in part by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) (22540161).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathcal{R}\nabla \cdot (\rho \boldsymbol{u}) = 0 ,$$

$$\frac{1}{\mathcal{P}_r}\rho\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} - \Delta \boldsymbol{u} - \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \frac{\mathcal{R}}{b\gamma(m+1)}\nabla p + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{P}_r}\rho \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} = \frac{\mathcal{R}}{b\gamma}\rho \boldsymbol{e}_3 ,$$

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T + \mathcal{R}(\gamma-1)p\nabla \cdot \boldsymbol{u} + \mathcal{R}\rho \boldsymbol{u} \cdot \nabla T \\ = \frac{2gb\gamma}{\beta_0 c_v}\{D:D - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \boldsymbol{u})^2\} . \end{aligned}$$

水平領域 $z_0 < z < z_0+1$ で下から一様に熱する時の境界条件は、$T_l = z_0+1$, $T_u = z_0$ であり、この平衡解は次の熱伝導解である。

$$\overline{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0} , \quad \overline{\rho} = z^m , \quad \overline{T} = z , \quad \overline{p} = z^{m+1} ,$$

以下では次の気体の状態方程式を用いている。 $p = \rho T$.

この平衡解の近傍で定常問題を考える。境界条件は、上下の境界 $z = z_0$, z_0+1 で、速度も温度も Dirichlet 条件とする。

質量保存則：

$$\mathcal{R}\nabla \cdot (\rho_* \boldsymbol{u}_*) = 0 ,$$

運動量保存則：

$$\begin{aligned} -\Delta \boldsymbol{u}_* - \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_*) + \frac{\mathcal{R}}{b\gamma(m+1)}\nabla p_* + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{P}_r}\rho_* \boldsymbol{u}_* \cdot \nabla \boldsymbol{u}_* \\ = \frac{\mathcal{R}}{b\gamma}\rho_* \boldsymbol{e}_3 + \mathcal{R}\rho_* \boldsymbol{f}_e , \end{aligned}$$

エネルギー保存則：

$$\begin{aligned} -\Delta T_* + \mathcal{R}(\gamma-1)p_*\nabla \cdot \boldsymbol{u}_* + \mathcal{R}\rho_* \boldsymbol{u}_* \cdot \nabla T_* \\ = \frac{2gb\gamma}{\beta_0 c_v}\{D:D - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \boldsymbol{u}_*)^2\} + \mathcal{R}\rho_* h_e . \end{aligned}$$

境界条件：

$$\boldsymbol{u}_*(z_0) = \boldsymbol{u}_*(z_0+1) = \boldsymbol{0} , \quad T_*(z_0) = z_0 , \quad T_*(z_0+1) = z_0+1 .$$

付帯条件： $\int \rho_* = constant$.

Oberbeck-Boussinesq 方程式との関係を考慮して、未知関数として $p_*,\ \boldsymbol{u}_* = (u, v, w), T_*$ を用い、平衡解からの摂動にたいする量を次で定義する。

$$\boldsymbol{u}_* \to \boldsymbol{u}\,,\quad p_* \to z^{m+1} + p\,,\quad T_* \to z+\theta\,,\quad \rho_* \to z^m + \rho\,,$$

ここで $p = (z+\theta)\rho + z^m\theta$ 、即ち $\rho = (p - z^m\theta)/(z+\theta)$ である。

摂動系に帯する定常問題を考え、質量保存則を次のように書換える。

$$\mathcal{R}\,\nabla\cdot((z^m+\rho)\boldsymbol{u}) = \mathcal{R}\,\nabla\cdot\left(z^m\boldsymbol{u} + \frac{p - z^m\theta}{z+\theta}\boldsymbol{u}\right) = 0\,.$$

従って、未知関数 p, $\boldsymbol{u} = (u, v, w)$, θ について次が得られる。

$$\mathcal{R}\left(\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \frac{mw}{z} + \nabla\cdot\left(\frac{p\boldsymbol{u}}{z^{m+1}}\right)\right) = \mathcal{R}\,g\,,$$

ここで

$$\begin{aligned} g &= \frac{z^{m+1}+p}{z^{m+1}(z+\theta)}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta - \frac{mpw}{z^{m+2}} - \frac{z^{m+1}+p}{z^{m+2}(z+\theta)}\theta w \\ &= \frac{1}{z}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta + g_0\,, \\ g_0 &= \frac{\theta}{z(z+\theta)}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta + \frac{p}{z^{m+1}(z+\theta)}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta - \frac{mpw}{z^{m+2}} \\ &\quad - \frac{z^{m+1}+p}{z^{m+2}(z+\theta)}\theta w\,. \end{aligned}$$

運動量保存則は次のように書換えられる：

$$\begin{aligned} -\Delta\boldsymbol{u} - \frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \frac{\mathcal{R}}{b\gamma(m+1)}\nabla p - \frac{\mathcal{R}}{b\gamma}\frac{p - z^m\theta}{z}\boldsymbol{e}_3 \\ = -\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{P}_r}z^m\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}\,, \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f} &= -\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{P}_r}\frac{p - z^m\theta}{z+\theta}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \frac{\mathcal{R}}{b\gamma}\frac{p - z^m\theta}{z+\theta}\frac{\theta}{z}\boldsymbol{e}_3 \\ &\quad + \mathcal{R}\left(z^m + \frac{p - z^m\theta}{z+\theta}\right)\boldsymbol{f_e}\,. \end{aligned}$$

エネルギー方程式は、質量保存則を用いて次のように書換えられる：

$$-\Delta\theta + \mathcal{R}(1 - m(\gamma-1))z^m w = -\mathcal{R}\gamma z^m\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta + h\,,$$

ここで

$$
\begin{aligned}
h \;=\; & \mathcal{R}\gamma \frac{z^m\theta}{z+\theta}\,\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta \;-\; \mathcal{R}\gamma\,\frac{p}{z+\theta}\,\boldsymbol{u}\cdot\nabla\theta \\
& -\mathcal{R}(\gamma-1)\left(\nabla\cdot(p\boldsymbol{u}) + p\nabla\cdot\boldsymbol{u} + (m+1)\frac{pw}{z} + z^{m+1}g_0\right) \\
& \qquad -\mathcal{R}\frac{(p-z^m\theta)\,w}{z+\theta} + \frac{2gb\gamma}{\beta_0 c_v}\left(\boldsymbol{D}:\boldsymbol{D} - \frac{1}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{u})^2\right) \\
& \qquad\qquad + \mathcal{R}\,(z^m + \frac{p-z^m\theta}{z+\theta})\,h_e\,.
\end{aligned}
$$

系を水平領域 $z_0 < z < z_0+1$ で考えており、速度と圧力に次のスケールを用いる。

$$L \;=\; z_0+\frac{1}{2}\,.$$

$$\boldsymbol{u} = \frac{\tilde{\boldsymbol{u}}}{\sqrt{L}}\,,\quad p \;=\; L^{m-1}\,\tilde{p}\,,\qquad \boldsymbol{f_e} \;=\; \frac{\tilde{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{e}}}{L}\,,\;\; h_e \;=\; \frac{\tilde{h}_e}{\sqrt{L}}.$$

更に Spiegel [5] に従って次の Rayleigh 数を用いる。

$$\mathcal{R}_m \;=\; \mathcal{R}\,L^{m-\frac{1}{2}}\,,$$

この時、領域 $L-\frac{1}{2} < z < L+\frac{1}{2}$ において次の解くべき方程式系が得られる。

$$\mathcal{R}_m\left(\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{u}} + \frac{m\tilde{w}}{z} + \nabla\cdot\left((\frac{L}{z})^{m-1}\frac{\tilde{p}\,\tilde{\boldsymbol{u}}}{z^2}\right)\right) \;=\; \mathcal{R}_m\,\tilde{\tilde{g}}\,, \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
-\Delta\tilde{\boldsymbol{u}} - \frac{1}{3}\nabla(\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}) + \frac{\mathcal{R}_m}{b\gamma(m+1)}\nabla\tilde{p} - \frac{\mathcal{R}_m}{b\gamma}\,\frac{\tilde{p}}{z}\,\boldsymbol{e}_3 & \\
+\frac{\mathcal{R}_m}{b\gamma}\,(\frac{z}{L})^{m-1}\,\theta\,\boldsymbol{e}_3 \;=\; -\frac{\mathcal{R}_m}{\mathcal{P}}\,(\frac{z}{L})^m\,\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\tilde{\boldsymbol{u}} + \tilde{\tilde{\boldsymbol{f}}}\,, &
\end{aligned}
\tag{2}
$$

$$-\Delta\theta + \mathcal{R}_m\,(1-m(\gamma-1))\,(\frac{z}{L})^m\,\tilde{w} \;=\; -\mathcal{R}_m\gamma\,(\frac{z}{L})^m\,\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\theta + \tilde{\tilde{h}}\,, \tag{3}$$

ここで

$$
\begin{aligned}
\tilde{\tilde{g}} \;&=\; \frac{\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\theta}{z} + \tilde{\tilde{g}}_0 \\
\tilde{\tilde{g}}_0 \;&=\; \frac{\theta\,\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\theta}{z\,(z+\theta)} + (\frac{L}{z})^{m-1}\,\frac{\tilde{p}\,\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\theta}{z^2\,(z+\theta)} - \frac{\theta\,\tilde{w}}{z(z+\theta)} \\
& \quad -(\frac{L}{z})^{m-1}\,\frac{m\,\tilde{p}\,\tilde{w}}{z^3} - (\frac{L}{z})^{m-1}\,\frac{\tilde{p}\,\theta\,\tilde{w}}{z^3\,(z+\theta)}\,,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{f}} \;=\; & \frac{\mathcal{R}_m}{\mathcal{P}}\left(\left(\frac{z}{L}\right)^m \frac{\theta}{(z+\theta)} - \frac{\tilde{p}}{L(z+\theta)}\right)\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\tilde{\boldsymbol{u}} \\
& - \frac{\mathcal{R}_m}{b\gamma}\frac{\tilde{p}\,\theta}{z(z+\theta)}\boldsymbol{e}_3 + \frac{\mathcal{R}_m}{b\gamma}\left(\frac{z}{L}\right)^{m-1}\frac{\theta^2}{(z+\theta)}\boldsymbol{e}_3 \\
& + \mathcal{R}_m\left(\left(\frac{z}{L}\right)^m \frac{z}{z+\theta} + \frac{\tilde{p}}{L(z+\theta)}\right)\tilde{\boldsymbol{f}}_e\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{h}} \;=\; & \mathcal{R}_m\gamma\left(\left(\frac{z}{L}\right)^m \frac{\theta}{z+\theta} - \frac{\tilde{p}}{L(z+\theta)}\right)\tilde{\boldsymbol{u}}\cdot\nabla\theta \\
& - \mathcal{R}_m\frac{\gamma-1}{L}\left(\nabla\cdot(\tilde{p}\,\tilde{\boldsymbol{u}}) + \frac{m+1}{z}\tilde{p}\,\tilde{w} + \tilde{p}\,\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}\right) \\
& + \mathcal{R}_m\left(\left(\frac{z}{L}\right)^m \frac{\theta\tilde{w}}{(z+\theta)} - \frac{\tilde{p}\tilde{w}}{L(z+\theta)}\right) + \mathcal{R}_m(\gamma-1)\left(\frac{z}{L}\right)^{m+1}(L\,\tilde{g}_0) \\
& + \mathcal{R}_m\left(\frac{\tilde{p}}{L(z+\theta)} - \left(\frac{z}{L}\right)^m\frac{z}{z+\theta}\right)\tilde{h}_e \\
& + \frac{2gb\gamma}{\beta_0 c_v L}\left(\boldsymbol{D}:\boldsymbol{D} - \frac{1}{3}(\nabla\cdot\tilde{\boldsymbol{u}})^2\right).
\end{aligned}$$

次の境界条件で考えている。

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}\,,\quad \tilde{\theta} = 0 \quad \text{on} \quad z = L-\frac{1}{2}\,,\; L+\frac{1}{2}\,, \tag{4}$$

水平方向 x と y に関しては、周期夫々 $2\pi/a$ と $2\pi/b$ とする。
Remark 1.1 上記の非線形系に対して、領域は

$$\left|\frac{z}{L} - 1\right| \le \frac{1}{2L}$$

で考えているから、形式的にも $L \to \infty$ でどの項が残るか良く分かり、Oberbeck-Boussinesq 方程式との比較ができる。

2 定常解の存在

非線形偏微分方程式の境界値問題 (1)(2)(3)(4) について外力項 $\tilde{\boldsymbol{f}}_e$, $\tilde{h}_e$ が小さいときに $L \ge L_0$ かつ $0 \le \mathcal{R}_m < \mathcal{R}_c$ の下で Dirichelet 境界条件と周期境界条件の付いた Hilbert-Sobolev 空間 $H^l = W^{l,2}$, $l = 0, 1, 2, 3$ において定常解を求める。

定理

境界値問題 (1)-(4) に対して、定数 L_0 と $\mathcal{R}_c$ が存在し $L \ge L_0$, $0 \le \mathcal{R}_m < \mathcal{R}_c$ であれば、小さい外力の下で定常解が存在する。更に、$L \to \infty$ のときには、解は Oberbeck-Boussinesq 方程式の定常解に収束する。

詳細は、Nishida-Padula-Teramoto [19]。

3 定常分岐

外力項を除いた境界値問題 (1)-(4) の平衡解からの定常分岐問題。
平衡解のまわりの線形化方程式の resolvent 式を次の形で考える。

$$\lambda \frac{p}{z^m} + \nabla \cdot \boldsymbol{u} + \frac{mw}{z} = G, \tag{5}$$

$$\lambda \frac{\boldsymbol{u}}{\mathcal{P}} - \Delta \boldsymbol{u} - \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) + \nabla p - \frac{(m+1)p}{z}\boldsymbol{e}_3 + \frac{\mathcal{R}_m}{b\gamma}(\frac{z}{L})^{m-1}\theta \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{F}, \tag{6}$$

$$\lambda \gamma \theta - \Delta\theta + \mathcal{R}_m(1 - m(\gamma - 1))(\frac{z}{L})^m w = H. \tag{7}$$

境界条件は、前節と同じとする。

Rayleigh 数 $\mathcal{R}_m$ を増大させるとき、実部が最大の固有値が $\mathcal{R}_m{}^2 = \mathcal{R}_c(L)^2$ で虚軸を横切る時 $\lambda = 0$ として、その固有値、固有空間が単純であると仮定する。例えば、$b = \sqrt{3}a$ の時には、固有空間が2次元で固有関数は、ロール型、長方形型、およびそれらの一次結合である六角形型からなる。この時には、対応する部分固有空間に解を制限すれば単純性が成立つ。 [18] , [11] , [15]

adjoint な線形系は次である。

$$\lambda \frac{p}{z^m} - \nabla \cdot \boldsymbol{u} - \frac{(m+1)w}{z} = G^*, \tag{8}$$

$$\lambda \frac{\boldsymbol{u}}{\mathcal{P}} - \Delta \boldsymbol{u} - \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \nabla p + \frac{m}{z}p\boldsymbol{e}_3 + \mathcal{R}_m(1 - m(\gamma - 1))(\frac{z}{L})^m \theta \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{F}^*, \tag{9}$$

$$\lambda \gamma \theta - \Delta\theta + \frac{\mathcal{R}_m}{b\gamma}(\frac{z}{L})^{m-1} w = H^*. \tag{10}$$

固有値の数値計算例を後に回して定理は次である。

定理

臨界 Rayleigh 数 $\mathcal{R}_c(L)^2$ からすべての $L \geq L_1$ に対して定常分岐が起きている。しかも $L \to +\infty$ の時にそれは、Oberbeck-Boussinesq 系の定常分岐に収束する。

詳細は、 Nishida-Padula-Teramoto [20]。

例 パラメーターの値を次のように取る。$\gamma = 5/3$, $c_p = 1$, $c_v = 0.6$, $m = 1.4$, $\mathcal{P}_r = 1$ かつ $b = 0.04$.　速度の境界条件は、上下共 Dirichlet zero とする。
$L = z_0 + \frac{1}{2} \to +\infty$ の時、臨界 Rayleigh 数 $\mathcal{R}_c(L)^2$ が、Oberbeck-Boussinesq 方程式のそれに収束しているのが分る。

z_0	α	λ	$\mathcal{R}_m$	$\mathcal{R}_c(L)^2$
1.0	3.1532	0.0	43.0409	1852.52
2.0	3.1297	0.0	41.9500	1759.80
4.0	3.1204	0.0	41.5187	1723.80
8.0	3.1174	0.0	41.3794	1712.25
16.0	3.1166	0.0	41.3395	1708.95
32.0	3.1164	0.0	41.3287	1708.06
64.0	3.1163	0.0	41.3260	1707.83
128.0	3.1163	0.0	41.3253	1707.78
256.0	3.1163	0.0	41.3251	1707.76
512.0	3.1163	0.0	41.3250	1707.76
1024.0	3.1163	0.0	41.3250	1707.76
Bouss.	3.1163	0.0		1707.76

参考文献

[1] A. Oberbeck, *Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei der Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen.* Annalen der Physik und Chemie **7** , (1879) p.271

[2] H. Bénard, *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide.* Revue Gén. Sci. Pure Appl., **11**, (1900), 1261–1271, 1309–1328.

[3] J. Boussinesq, *Théorie analytique de la chaleur.* **2**, Paris, Gauthier-Villars (1903)

[4] L. Rayleigh, *On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side*, Phil. Mag. Ser. 6, **32** (1916) 529–546.

[5] E. A. Spiegel, *Convective instability in a compressible atomosphere. I.* Astrophys. J. **141** (1965), .

[6] P. C. Fife, *The Bénard problem for general fluid dynamical equations and remarks on the Boussinesq approximation.*, Indiana Univ. Math. J., **20**, (1970), 303–326.

[7] D. O. Gough, D. R. Moore, E. A. Spiegel and N. O. Weiss, *Convective instability in a compressible atmosphere. II*, Astrophys. J., **206**, (1976), 536–542.

[8] A. Matsumura and T. Nishida, *Exterior stationary problems for the equations of motion of compressible viscous and heat conductive fluids.* Proc. of the EQUADIFF Conference, M. Denker, inc., 1989, 473–479.

[9] V. Coscia and M. Padula, *Nonlinear energy stability in a compressible atomosphere.* Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. **54** (1990), 49–83.

[10] Pyi Aye and T. Nishida, *Heat convection of compressible fluid.* in Recent Developments in Domain Decomposition Methods and Flow Problems, Mathematical Sciences and Applications, ed. by H. Fujita, Gakkotosho, Tokyo, Japan, **11** (1998), 107–115.

[11] G. Iooss and M. Padula, *Structure of the linearized problem for compressible parallel fluid flows.* Annali dell'Universita di Ferrara, Sezione VII, **XLIII** , (1998), 157–171.

[12] J. Heywood and M. Padula, *On the existence and uniqueness theory for steady compressible viscous flow.* in Fundamental Directions in Mathematical Fluid Mechanics, ed. by G. P. Galdi, J. Heywood and R. Rannacher, Birkhäuser, (2000), 171–190.

[13] M. Bause, J. G. Heywood, A. Novotny and M. Padula, *An iterative scheme for steady compressible viscous flow, modified to treat large potential forces.* in Mathematical Fluid Mechanics, Recent results and open questions, ed. by J. Neustupa and P. Penel, Birkhaeuser, (2001), 27–46.

[14] P. B. Mucha, M. Pokorny, *On the steady compressible Navier-Stokes-Fourier system* Comm. Math. Phys., **288** 2009, pp. 349-377.

[15] T. Nishida and Y. Teramoto, *Pattern formation in heat convection problems.* Chinese Annals of Mathematics, Series B, **30B(2)**, (2009), 1-18.

[16] A. Novotny and M. Pokorny, *Weak and variational solutions to steady equations for compressible heat conducting fluids.* SIAM J. Math. Anal. **43** 2011, no. 3, 1158-1188.

[17] A. Novotny and M. Pokorny, *Steady compressible Navier-Stokes-Fourier system for monoatomic gas and its generalizations* J. Differential Equations **251** 2011, no. 2, 270-315.

[18] M. Pribyl, *Analysis of spectral properties of operators for linearized steady-state equations of a viscous compressible heat-conducting fluid.* J. of Dynamical and Controll Systems. **17** , (2011), 187–205

[19] T. Nishida, M. Padula and Y.Teramoto, *Heat convection of compressible viscous fluids. I.* accepted by J. Mathematical Fluid Mechanics. (2012), 1–15.

[20] T. Nishida, M. Padula and Y.Teramoto, *Heat convection of compressible viscous fluids. II.* preprint (2012), 1–14.