

## 統合システム Sage とクラウド型 CAS の最新事情

横山 俊一 (Shun'ichi Yokoyama)<sup>1</sup>

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 / JST CREST

**概要** 現在急速にシェアを拡大しつつある統合システム Sage のクラウド化プロジェクトに関して概説する。また Sage をはじめとする数学ソフトウェアをベースとしたアプリケーション開発の現状について紹介する。

### 1 序：統合システム Sage とは

Sage (セージ) とは, Magma, Maple, Mathematica, MATLAB といった多種多様な有償数学ソフトウェアの代替機となり, 無料で広く提供することを目的とした「統合システム」である。Sage ではほぼ全てのコードを公開しており, おおよその内部構造や使用されているアルゴリズムを明確に知ることが出来る。これにより開発者 (デベロッパー) と使い手 (ユーザー) との距離は比較的近く, バグの修正等もメーリングリストや BTS<sup>2</sup> を援用して, 比較的迅速に行われている。

Sage は従来のように CUI として使用することも出来るが, 無料の計算機代数システム (Computer Algebra System, 以降本文では CAS と略記する) には珍しく GUI としての Notebook インターフェイスを兼ね備えている (Sage Notebook)。画像系は無圧縮の PNG ファイルとして出力され, 後述するようにタブレット端末などで閲覧する際には拡大・縮小しても鮮明に表示される。

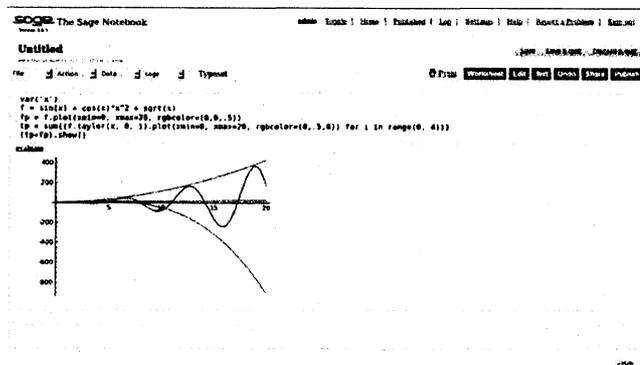


図 1. Sage Notebook インターフェイスの使用例

Sage は主に Python (パイソン) で開発されており, この強みを活かして動的なオブジェクトも比較的容易に作成することが出来る。また, 作成した Notebook は拡張子 .nb のファイルとしてやり取りが可能のため, Mathematica のように編集・保存が可能となっている<sup>3</sup>。このような利便性から, 最近では日本人ユーザーも着実に増加しており, 研究目的だけでなく学部生向けの数学講義の教材としても使用され始めている。

<sup>1</sup>s-yokoyama@imi.kyushu-u.ac.jp (ドメインの imi は math でも可)

<sup>2</sup>バグトラッキングシステムのこと。Sage BTS では「チケット」と呼ばれるものを申請してバグ報告を行う。投稿された質問や回答は, 基本的には誰でも閲覧可能となっている。

<sup>3</sup>但しこの Notebook ファイルの所在が分かりづらいという難点も残っている。これらは localhost 以下に作成されるが, 手動では見つけにくい。

カテゴリー	使われているシステム
算術	GMP, MPFR, Givaro
可換代数	Singular (libSingular)
線型代数	LinBox, M4RI, IML, fpLLL
暗号系	GnuTLS, PyCrypto
素因数分解	FLINT-QS, ECM
群論	GAP
グラフ理論	NetworkX
数論	Pari, NTL, FLINT, mwrank
数値計算	GSL, Numpy, Scipy
記号計算系	Maxima, Sympy
UI	Sage Notebook, jsmath, Moin wiki, IPython
グラフィクス	Matplotlib, Tachyon, libgd, Java3d
ネットワーク	Twisted
データベース	ZODB, SQLite, Python Pickles

表 1. Sage の内部構造の一例

また Sage を活用するためのドキュメントも充実している。Sage のウェブページ<sup>4</sup>にある “Help/Documentation” または “Library” から様々な資料が入手可能となっており、初心者から上級者まで読み応えのある分量が公開されている。実際、リファレンスマニュアルは既に数千ページにまで拡大しているため、こちらは HTML 版を「逆引き辞書」として使うことをお勧めしたい。Python 入門のための和文マニュアルとしては [1] を薦める。

Sage 本体の最新バージョンは 5.4 (2012 年 12 月現在) であり、世界中に点在する 25 のミラーサーバによって提供されている。アジア圏はそのうち 5 つを占めており、KAIST / Yongbok (韓国), Nanyang Technological University (シンガポール), Indian Institute of Technology Madras (インド), そして日本にも WIDE プロジェクトの一環として筑波大学ネットワーク・オペレーションズセンターでミラーサーバが運用されている。インストールに関しては Mac ユーザ・Linux ユーザに対してはバイナリが公開されているものの、Windows ユーザへのネイティブ版は提供されておらず、Linux 環境を何らかの形で実現した上で Linux 版 Sage を起動する必要がある。これは例えば MathLibre<sup>5</sup> などの Linux OS 一体型ソフトウェアを使用することで回避出来るが、インターネットが使用可能な環境にある場合は Sage Notebook オンライン<sup>6</sup>を使用しても良い。

Sage を用いた数学研究・教育現場への活用事例の情報を入手するには、Sage に関する研究会への参加が手っ取り早い。その代表格が Sage Days と呼ばれるワークショップであり、日本でも 2012 年 5 月に初めて九州大学にて開催された (筆者と沼田泰英氏 (信州大学, 開催当時は東大情報理工) との共同主催)。2013 年にも同様の集会を企画しており、Sage に興味を持つ幅広い層からの参加が可能となるよう計画を立てる予定である。この開催報告を [2] に纏めているので、興味を持たれた方は是非ともご一読頂きたい。

<sup>4</sup><http://www.sagemath.org/>

<sup>5</sup>MathLibre Project (旧 Knoppix-Math Project) : <http://www.knoppix-math.org/> からバイナリを入手して USB ブート版を自作することも可能。なお Debian OS への移行計画も検討されている。

<sup>6</sup><http://www.sagenb.org/> が主サーバで、他に非公式版も含め幾つかミラーサーバが存在する。利用にあたってはアカウントの作成 (無料) が必要。

## 2 数学ソフトウェアをベースとしたアプリ開発

### 2.1 Sage Math

Sage プロジェクトは Sage Notebook の他にも幾つかアプリケーション開発を行っている。最も有名なものは iOS 向けに開発された Sage Math である。

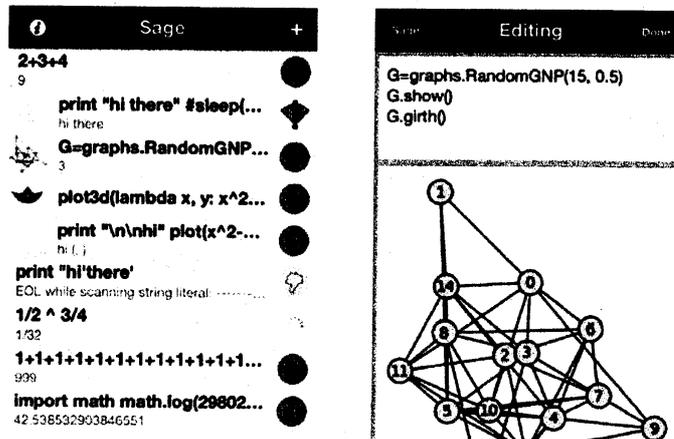


図 2. Sage Math for iOS インターフェース

Sage Math は Ivan Andrus 氏によって iTunes Store から無料で公開されている Sage アプリであり、iPad をはじめとするタブレット端末上で動作する。もちろん iPod Touch やスマートフォン iPhone でも使うことが出来る。基本的には Notebook を踏襲しているが、殆ど設定画面は省かれておりシンプルな構成となっている。Sage Math では携帯端末の強みを活かして、実際の計算をデバイスが行うのではなく Sage 側が提供している計算用サーバにコードを投げ、そこで行われた計算の出力だけを受け取る仕組みになっているため、PC に比べて非力なスマートフォン上でも計算機環境を手に入れることが出来るようになっている。基本的にはオンラインでの使用しか認められていないが、必要に応じて計算用サーバは変更可能とアナウンスされている<sup>7</sup>。

Sage Math は Android OS 版もリリースされているが、iOS 版とはインターフェースが若干異なる。更に開発も iOS 版より若干遅れており、現在 “Sage Math Beta” (ベータ版: 0.3) のみがリリースされている。こちらは sagemath.org 名義での開発となっている。

### 2.2 CAS for Android OS

Sage 以外にもアプリ化が行われている CAS は幾つか存在する。まず最近ユーザーを拡大しているものとして Maxima の Android OS 用アプリが挙げられる。Maxima は Sage にも symbolic computation カテゴリーとして収録されており、機能的にも申し分ない。Maxima そのものは Lisp 言語で開発されており、この前身である Macsyma から数えると非常に歴史の長い数式処理ソフトウェアの一つとして良く知られている。このアプリは本田康晃氏によって作成され、現時点での Google Play ユーザーレビューでは評価スコア 4.6 (5段階中) と高い評価を得ている。

<sup>7</sup>しかし実際にどう変更するのかに関しては、具体的な instruction は見当たらない。

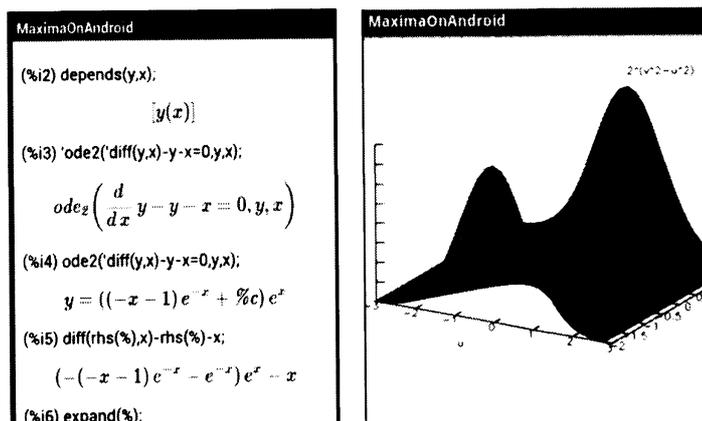


図 3. Maxima on Android OS インターフェース

また、フランスの CAS として安定した人気を誇る Pari/GP の Android OS 向け無料アプリ Paridroid も公開されている。こちらは整数論の計算に特化した CUI として提供されており Sage や Maxima に比べると汎用性の面で若干劣るが、専門家からの評価は高く Google Play での評価スコアも 4.9 とかなりの高得点を誇っている。Pari/GP そのものはボルドー大学で誕生した ISABELLE というプログラムが起源となっており、当初 Pascal で開発されたライブラリを組み込んでいたことから<sup>8</sup> Pascal ARithmetic / Great Programmable calculator と称されたことによる。

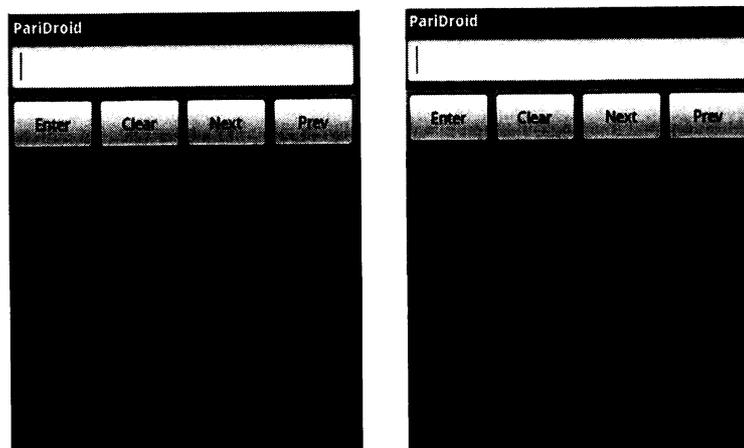


図 4. Paridroid (Pari/GP for Android OS) インターフェース

### 2.3 ウェブブラウザを UI とした CAS

現代の数学ソフトウェア開発のトレンドはアプリ開発だけではない。例としてウェブブラウザを UI とした数式処理エンジン Wolfram Alpha<sup>9</sup> が知名度を上げている。Wolfram は有償数学ソフトウェア Mathematica をリリースしていることで広く知られているが、ここ数年で膨大なデータベースの収集活動に並々ならぬ力を注いでいる。

<sup>8</sup>実際には、リリース直後開発言語を C に移行している。

<sup>9</sup><http://www.wolframalpha.com/>

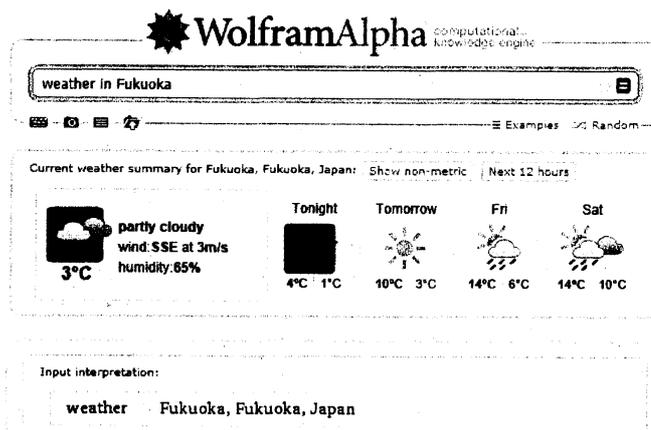


図 5. Wolfram Alpha インターフェース

無料で使用出来る Wolfram Alpha では、従来のように数式処理システムとして使用出来るのはもちろんであるが、上図のように自然言語のような入力も受け付けることが出来る。クラウド型数式処理システムとしては現在のところ最も汎用性が高く、高機能なものの一つと考えて良い。

さて、序でも述べたとおり Sage Notebook は紛れもなくウェブブラウザを UI とした CAS の一種である。実際、本格的にプログラムを書こうとする場合はアプリではなく Notebook を使う方が遥かに効率的であり、管理もし易い。ところがここ数ヶ月、Sage Notebook のオンラインサーバが軒並み不安定であるという報告があげられている。この原因の一つとして指摘されているのが、アカウント数の爆発的増大である。2012年12月現在、オンラインサーバに登録されたアカウント数は総計10万強にのぼり、全てのデータを既存のハードウェアで維持することが難しくなっていると思われる。そこで Sage プロジェクトの主導者である William Stein 氏 (University of Washington) は、Sage Notebook / sagem.org に代わるクラウド型 CAS として新しいプラットフォームの開発に乗り出した。それが “Salvus” である。

### 3 Salvus: Distributed Scalable Online Math Software

Salvus<sup>10</sup> (サルバス) とは、Sage Notebook の後継種として開発が進められているクラウド型 CAS の一種であり、名前の Salvus は Sage のラテン語表記に由来する<sup>11</sup>。開発が公表されてまだ日が浅く、現在はベータ版の更に前の段階、所謂「アルファ版」が試験運用されている。公式発表によると、ベータ版の公開予定は2013年1月、そして安定版 (stable version) の初回公開は2013年3月と予告されている。メインエンジンはもちろん Sage が使用されているが、現行版では5秒以上の実行とグラフィクスの出力はサポートされていない。Salvus は Sage Math 同様アプリ化が計画されており、2012年5月の段階で Google app engine へのプロポーザルが受理されている<sup>12</sup>。

<sup>10</sup><https://salv.us/>

<sup>11</sup>この単語には「救う・安全」 (= save) という意味もある。

<sup>12</sup>Stein 氏によるプロポーザル全文も公開されており、誰でも閲覧可能となっている。直接的に Salvus と関連するプロポーザルは2012年9月に公開されているものが最初で、こちらは結果待ちの状態である。

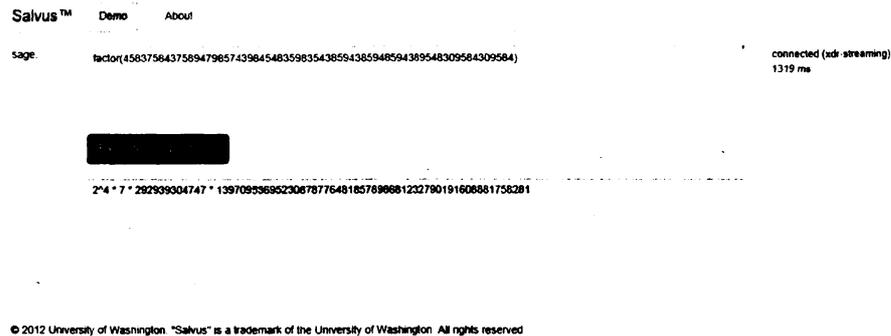


図 6. Salvus インターフェース

Salvus の開発目標は非常に高く設定されており、このプロジェクトが軌道に乗った際には実質的に Sage プロジェクト本体と切り離し、独立に運営を開始することを宣言している。また研究レベルで使用可能なアルゴリズム群の実装のために、常勤スタッフを雇用する可能性も示唆している。このあたりはオーストラリアの有償ソフトウェア<sup>13</sup> Magma と似たスタイルを取っている。因みに Salvus のロゴには既にトレードマーク（商標登録印）が付加されている。他に公式に宣言されている Sage Notebook との違いを幾つか挙げる。

- プロアカウントの開設（開発環境拡充の一環。有利的にクラスタを利用可能）
- フルスクラッチ（IPython Notebook UI からの実質的な脱却）
- 巨大クラスタを容易に共有（IPython Notebook は単発利用が主であった）
- フロントエンド in CoffeeScript（従来は in JavaScript）
- ウェブアプリのみでのリリース（IPython は BSD ライセンスであった）等々...

試しに Salvus を用いてアルゴリズムの比較を行ってみる。序で紹介した通り、素因数分解アルゴリズムとして Sage は GMP-ECM（楕円曲線法）を採用しているが、これは現存する実装では最も高速な部類とされている。ここでは

```
sage: p,q=next_prime(2^72), next_prime(2^84)
```

として、2つの巨大な素数  $p, q$  の積を素因数分解するまでに要する時間を計測してみる。

アルゴリズム	応答までの所要時間 (ms)
factor	1260
ecm.factor	404
qsieve	1121

表 2. Salvus での計算実験

先述の GMP-ECM は 2 番目の ecm.factor のことであり、3 種類のアルゴリズムの中で最速となっている。1 番目の factor は Pari/GP の実装を用いている。3 番目は Bill Hart 氏による独自実装 qsieve であり、こちらはオプションの指定も可能となっている。もちろん、上記以外に自分でアルゴリズムを実装することも可能である。

<sup>13</sup>但し非営利。オンライン試用版は <http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/> から（上限 120 秒/回）。

## 4 数学データベースの統合に向けて

近年ここまで CAS の開発が活発化して来ている背景には、数学研究そのものの動機も影響している。例えば Sage コミュニティの周辺では、代数系データベースの充実を目標としたプロジェクトが数多く立ち上げられている。その中でも多くのコラボレータを擁し注目を集めているものとして、データベース群を統合する取り組みが挙げられる。

図7. 数学データベース統合プロジェクト LMFDB

LMFDB<sup>14</sup> (The  $L$ -functions and modular forms database) とは、主に代数系・数論系のデータベースを統合し、Wikipedia のようなポピュラーなものを開発しようという意欲的なプロジェクトである。Sage のみならず Magma や Pari/GP といったコミュニティから数多くの研究者・開発者が参加しており、立ち上げから日は浅いが既に内容は充実している。また LMFDB はオンラインで公開されているが、データベースそのものはファイルとしてダウンロードが許可されている。但しチュートリアル等のサポートページは未完成のため、現時点ではベータ版として公開されている。

この LMFDB には、Sage / Salvus プロジェクトのメンバーも数多く参入している。2012年4月にイリノイ大学で開催された研究集会 “Atkin Memorial Lecture and Workshop: Elliptic Curves over  $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ” には Stein 氏 (世話人でもある) をはじめとする Sage デベロッパーが参加し、楕円曲線や Hilbert 保型形式といった現代数論の重要な研究対象に纏わる膨大な計算結果が共有された。LMFDB が数論コミュニティに公式にアナウンスされ始めたのも2012年初頭であり、2012年1月の CIRM 研究所 (フランス・ルミニエ) での研究集会が最初とも言われている<sup>15</sup>。更新作業は比較的頻繁に行われており、ソース開発のログを閲覧すると数論研究者が多数参入している様子が垣間見える (次ページを参照)。

Sage や Salvus にも、このような膨大なデータベースをクラウド上で呼び出して容易に使用出来る仕組みが整いつつある。現時点でも幾つかのデータベースは既に使用可能となっており、楕円曲線 (John Cremona, William Stein, Mark Watkins), 代数体 (Jones W. Jones), 有限体上の Conway 多項式 (Frank Luebeck) などがある。また LMFDB の前身とも言える Riemann ゼータ関数の零点に関するデータベースも備えている。

<sup>14</sup><http://www.lmfdb.org/>

<sup>15</sup>実際にはもう少し前にアナウンスされていたという説もある。

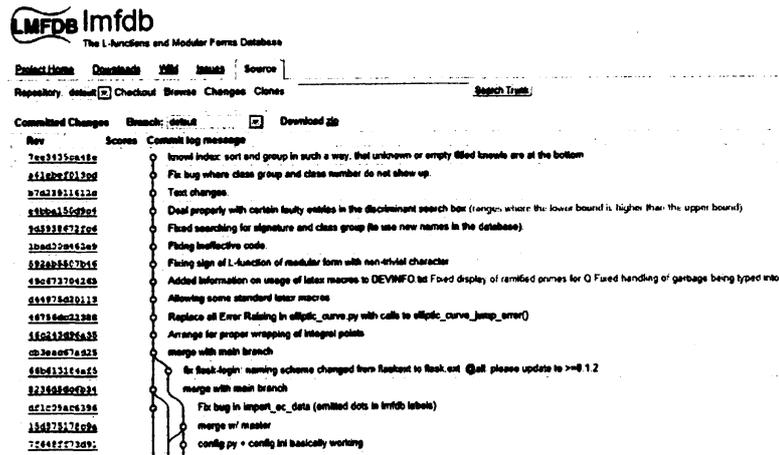


図 8. LMFDB Commit ログの閲覧画面

## 5 Get Involved

最後に Sage コミュニティに参入を検討されている方への情報を載せておく。Sage の公式デベロッパーチームへの参加は少々敷居が高いと思われるが、実は日本国内にも Sage 開発コミュニティが存在する。

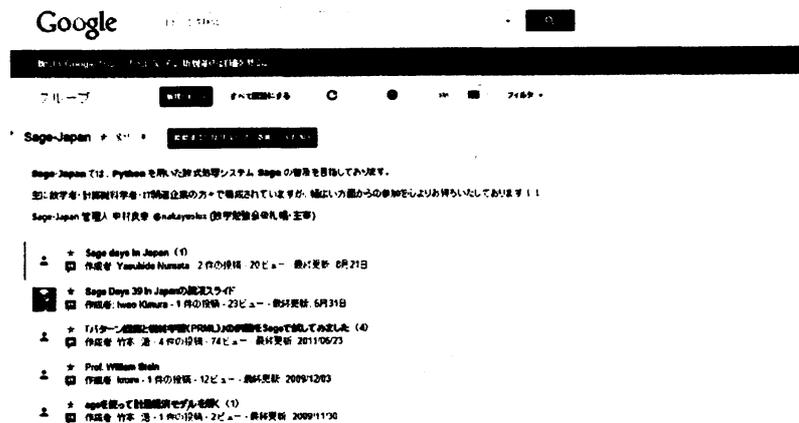


図 9. Sage-Japan 投稿ログ

まず Sage-Japan<sup>16</sup> は Google Group を用いて運営されている、主に日本人 Sage ユーザーのための開発支援コミュニティである。管理人は中村良幸氏 (Everforth Co. Ltd.) が務めており、クラウド勉強会のコミュニティからの情報共有や Sage Days in Japan の開催をきっかけとして再びメンバーを拡大しつつある。2012年12月現在のメンバー数は24名で、筆者は本グループのマネージャを務めている。

またこれに関連して、科学技術計算のためのライブラリが充実しているスクリプト言語 Python に関する情報共有のためのコミュニティ Science with Python<sup>17</sup> が立ち上がっている。こちらは数学系以外からの参加者も多く、現在のメンバー数は67名である。こちらは中村氏ともう一名 (氏名非公表)、計2名のオーナーで運営されている。

<sup>16</sup><https://groups.google.com/forum/#!forum/sage-japan>

<sup>17</sup><https://groups.google.com/forum/#!forum/science-with-python>

最後に 2012 年は Sage Days in Japan の初開催など, 日本の Sage ユーザーにとって Sage Year 元年となった. そして 2013 年は日本の干支では「巳」, つまり Python と深く結びつく記念すべき年である. 2013 年が日本国内の Sage コミュニティにとっての飛躍の年となることを願って筆を擱く.

## 謝辞

本研究集会「数式処理 - その研究と目指すもの」の代表者である高橋正先生 (甲南大学) および副代表者である近藤祐史先生 (香川高専) に厚く御礼申し上げます. また草稿を熟読し, 数多くの有益なコメント・アドバイスを下さった酒井麗氏 (津田塾大学) にも深く感謝いたします. 加えて, 筆者の講演時に貴重なコメント・アドバイスを下さった織田孝幸先生 (東京大学) および照井章先生 (筑波大学) に御礼申し上げます.

最後に, 筆者は本研究集会への参加・講演に際し, 京都大学数理解析研究所より旅費の援助を賜りました. 誠に有難うございました.

## 参考文献

- [1] 沼田泰英「Python の文法など: 最低限  $+\alpha$ 」, 以下の URL から入手可能:  
<http://www.stat.t.u-tokyo.ac.jp/~numata/html/sage/days/201206/doc/numata-nishiyama/x2.pdf> (Sage Days in Japan のウェブページ内)
- [2] 横山俊一, 沼田泰英「Sage Days 開催報告 (Report of Sage Days in Japan)」  
京都大学数理解析研究所講究録に受理済 / 以下の URL から入手可能:  
<http://imi.kyushu-u.ac.jp/~s-yokoyama/files/RIMS-DCAR2012.pdf>

Shun'ichi Yokoyama  
Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University  
744 Motoooka, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, Japan  
E-mail Address: [s-yokoyama@imi.kyushu-u.ac.jp](mailto:s-yokoyama@imi.kyushu-u.ac.jp)

※ 所属は講演時のものです.