数理解析研究所講究録
第 1844 巻 2013 年 1-9



# On relative t-designs on Q-polynomial schemes

坂内悦子 (Etsuko Bannai)
上海在住

この講演の内容は坂内英一との共同研究にもとづいたものである.

古典的なデザイン理論は Delsarte [4] により一般の Q-多項式アソシエーションスキームの中のデザイン理論に拡張された. Delsarte-Goethals-Seidel [6] はさらに球面の調和解析の理論の中に類似性見いだし球面上のデザインの理論を展開した. そして Neumaier-Seidel [12], Delsarte-Seidel [7] 等によるユークリッド空間のデザインの定義に到った. ユークリッド空間や Hyperbolic 空間のデザインを考える時には原点を特別視した定義が考えられているのであるが, Q-多項式スキームにおいてもある 1 点を特別扱いしたデザインが Delsarte により既に定義されていることを発見した [5]. この講演では簡単に古典的デザインに関する基本知識, Q-多項式スキームにおけるデザインの定義, デザインの点の個数に関する Fisher 型の下界などを紹介する. さらに 1 点を特別扱いしたデザイン, すなわち, 相対デザイン (relative design), の Delsarte による定義を与える [5]. そして, ユークリッド空間のデザインにもとづいた解釈に依る同値な定義を与える. この考え方は既に Delsarte もある程度考えていた様であるが, 関数空間の取り方がすこし違うことが分かって来た. ハミングアソシエーションスキーム $H(n,2)$ においてはこの違いは現れないことが分かっている.

### 古典的なデザイン

$V$ を有限集合とする. $|V|=v$ とし $V^{(k)}=\{x\subset V\mid |x|=k\}$ とおく. $V^{(k)}$ の部分集合 $\mathcal{B}$ に対してデザインは次の様に定義される.

**定義 1 ($t$-デザイン)**
$(V,\mathcal{B})$ は次の条件を満たす時に $t$-$(v,k,\lambda)$ デザイン ($t$-デザイン) と呼ばれる.

正の整数 $\lambda$ が存在して

$$|\{B\in\mathcal{B}\mid T\subset B\}|=\lambda$$

が任意の $T\in V^{(t)}$ に対して成り立つ.

**定理 2 (Fisher 型不等式 (Ray-Chaudhuri-Wilson(1975)[13]))**
$(V,\mathcal{B})$ を $2e$-デザインとする. このとき次の不等式が成り立つ.

$$|\mathcal{B}|\geq\binom{v}{e}$$

上記不等式に於いて等号が成り立つ時に $(V,\mathcal{B})$ は *tight* な $2e$-デザインと呼ばれる. ただし $(V,\mathcal{B})$ は自明でないとする.

**Q-多項式スキームにおける $t$-デザイン**
$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ を Q-多項式スキームとする. 記号を以下の様に設定する.
$A_0, A_1, \ldots, A_d$: 隣接行列.
$E_0, E_1, \ldots, E_d$: 原始ベキ等元.
$P$, $Q$: $\mathfrak{X}$ の第 1 および第 2 固有行列.
$X$ の部分集合 $Y$ に対し $\phi_Y$ を $Y$ の特性ベクトル ($\in \mathbb{R}^X$) とする. すなわち

$$\phi_Y(x) = \begin{cases} 1 & x \in Y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

**定義 3 ($t$-デザイン (Delsarte 1973 [4]))**
$X$ の部分集合 $Y$ は次の条件を満たす時に $t$-デザインと呼ぶ.

$$E_j \phi_Y = 0$$

が $j = 1, 2, \ldots, t$ に対して成り立つ.

**定理 4 (Fisher 型不等式 [4])** $Q$-多項式スキームの $2e$-デザイン $Y$ は次の性質を満たす.

$$Y \ge m_0 + m_1 + \cdots + m_e.$$

ここで $m_j = \mathrm{rank}(E_j)$ である.
上記不等式に於いて等号が成立する時に $Y$ は *tight* な $2e$-デザインと呼ばれる.

**定理 5 (Delsarte[4])**
次は同値である

(1) $Y$ が $J(v, k)$ (Johnson スキーム) 上の $2e$-デザインである.

(2) $Y$ は古典的 $2e$-デザイン ($2e$-$(v, k, \lambda)$ デザイン) である.

ここで $J(v, k)$ においては $m_0 + m_1 + \cdots + m_e = \binom{v}{e}$ が成り立つことに注意して置く.

**球面上のデザイン**

**定義 6 (Delsarte-Goethals-Seidel (1977)[6])**
球面 $S^{n-1}$ の有限部分集合 $X$ は次の条件を満たす時に $t$-デザインと呼ばれる.

$$\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(x) d\sigma(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

が高々 $t$ 次の任意の多項式 $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対して成り立つ.

**定理 7 ([6])** 次は同値である.

(1) $X$ は $t$-デザインである.

(2) $\sum_{x\in X} \varphi_l(x) = 0$ が $\varphi_l \in Harm_l(\mathbb{R}^n)$, $1 \le l \le t$ に対して成り立つ.

ここで $Harm_l(\mathbb{R}^n)$ は $n$ 変数の $l$ 次の同次調和多項式のつくるベクトル空間を示す.

**定理 8 (Fisher 型不等式 (D-G-S)[6])**
球面 $S^{n-1}$ 上の $t$-デザイン $X$ は次の不等式を満たす.

$$X \geq \begin{cases} \binom{n-1+e}{e} + \binom{n-1+e-1}{e-1}, & t = 2e \text{ の時} \\ 2\binom{n-1+e}{e}, & t = 2e+1 \text{ の時}. \end{cases}$$

上記不等式に於いて等号が成立する時に $X$ は *tight* な $t$-デザインと呼ばれる.

**ユークリッド空間 ($\mathbb{R}^n$) のデザイン**
次の記号を導入する.

$(X, w)$: $\mathbb{R}^n$ の有限集合 $X$ と $X$ 上に定義された正の weight 関数 $w$ の組.
$(w : X \longrightarrow \mathbb{R}_{>0})$
$\{r_1, r_2, \ldots, r_p\} = \{\|x\| \mid x \in X\}$,
$S_{r_i} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r_i\}$, $X_i = X \cap S_{r_i}$ $(1 \leq i \leq p)$.
$w(X_i) = \sum_{x \in X_i} w(x)$, $1 \leq i \leq p$.

**定義 9 (ユークリッド空間のデザイン [12])**
$(X, w)$ は次の条件を満たす時にユークリッド空間の $t$-デザインと呼ばれる.

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{w(X_i)}{|S_{r_i}|} \int_{S_{r_i}} f(x) d\sigma_i(x) = \sum_{x \in X} w(x) f(x)$$

が高々 $t$ 次の任意の $n$ 変数の多項式 $f(x)$ に対して成り立つ.

**定理 10 ([12])**
次は同値である.

(1) $X$ ユークリッド空間の $t$-デザインである.

(2) $\sum_{x \in X} w(x) \|x\|^{2j} \varphi_l(x) = 0$ が $1 \leq l$, $0 \leq j$, $l + j \leq t$ をみたす任意の整数及び任意の調和多項式 $\varphi_l \in Harm_l(\mathbb{R}^n)$ に対して成り立つ.

**定理 11 (Fisher 型不等式 [7, 10, 11])**
ユークリッド空間の $2e$-デザインに対して次の不等式が成り立つ.

$$|X| \geq \dim(\mathcal{P}_e(S)).$$

ここで $\mathcal{P}_e(S) = \{f|_S \mid f \in \mathcal{P}_e(\mathbb{R}^n)\}$, ただし $\mathcal{P}_e(\mathbb{R}^n)$ は高々$e$ 次の $n$ 変数多項式の作るベクトル空間とし, $S = S_{r_1} \cup S_{r_2} \cup \cdots \cup S_{r_p}$ である.

$p \geq [\frac{e+\varepsilon_S}{2}] + 1$ ($\varepsilon_S = 1$, if $0 \in S$, $\varepsilon_S = 0$ otherwise). であるならば
$\dim(\mathcal{P}_e(S)) = \binom{n+e}{e} = \dim(\mathcal{P}_e(\mathbb{R}^n))$
が成り立っていること, 全ての $p$ に対して $\dim(\mathcal{P}_e(S))$ の公式は $n, e, p$ の関数として具体的に記述されていること注意して置く (詳しくは [7, 3] 参照).
ここでは簡単のために $t$ が偶数の場合のみを紹介したが $t$ が奇数のときも $|X|$ の自然な下界が知られている [10, 11].

以上の様にデザインの理論のユークリッド空間への一般化を考察した後にそこでは原点が特別扱いにされていることが非常に気になった．そこで組合せ論的デザインではどの様な扱いがされてきているのかもう一度見直すことになった．

**Q-多項式スキーム上のデザインの一般化 (Delsarte 1977[5])**

$\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\le i\le d})$ を Q-多項式スキームとする．
$\mathcal{F}=$ the vector space of real valued functions on $X$.
$\mathcal{F}$ と $\mathbb{R}^X$ を同一視する．
以下では $\mathcal{F}$ の非負値関数 $\psi$ ($\psi(x)\ge 0$) を考える．

**定義 12 (Q-多項式スキームの $t$-デザイン [5])**
$\mathcal{F}$ の非負関数 $\psi$ は次の条件を満たす時に $t$-デザインと呼ばれる．

$$E_j\psi=0$$

が $j=1,2,\dots,t$ に対して成り立つ．

**定理 13 (Fisher 型不等式 [5])**
$\psi$ を $2e$-デザインとし $Y=\{y\in X\mid \psi(y)>0\}$ と定義する．この時次の不等式が成り立つ．

$$|Y|\ge m_0+m_1+\cdots+m_e.$$

上記不等式に於いて等号が成り立つ時に $\psi$ は *tight* な $2e$-デザインと呼ばれる．

**Q-多項式スキーム上の相対デザイン (relative design) (Delsarte 1977[5])**
$\mathfrak{X}=(X,\{R_i\}_{0\le i\le d})$ を Q-多項式スキームとする．$X$ の 1 点 $u_0$ を固定する．
$X_i=\{x\in X\mid (x,u_0)\in R_i\}$, $i=0,1,\dots,d$ と置く．
$\phi_{u_0}\in\mathbb{R}^X(=\mathcal{F})$ を $u_0$ の特性ベクトルとする．
すなわち $\phi_{u_0}(x)=\begin{cases}1 & x=u_0\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$

**定義 14 (相対 $t$-デザイン (relative $t$-design)[5])**
$\mathcal{F}$ の非負値関数 $\psi$ は次の条件を満たす時に $u_0$ に関する相対 $t$-デザインであると言う．
$0\le j\le t$ を満たす任意の整数 $j$ に対して $E_j\psi$ と $E_j\phi_{u_0}$ は一次従属である．

以下のことが知られている．

- $\psi(\in\mathcal{F})$ が $t$-デザインであれば $X$ の任意の点 $u_0$ に関して $\psi$ は相対 $t$-デザインである．
- $\psi_{X_i}$ ($X_i$ の特性関数) は 相対 $d$-デザインである (自明な相対デザインと呼ぶ)．

以下では $X_i\subset Y$ となる $i$ が存在しない場合のみを考える．

次にユークリッド空間のデザインの定義を基にして原始ベキ等行列 $E_0,E_1,\dots,E_d$ を用いた $\mathcal{F}$ の直交分解を利用した相対デザインの定義を与える．これは Delsarte の定義と同値であることが，以下でも言及するが，分かっている [2]．

$X$ の各点 $u \in X$ の特性関数 (ベクトル) を $\phi_u(\in \mathcal{F})$ と置く.
このとき各 $j$ $(0 \leq j \leq d)$ に対して $L_j(X) = \langle E_j\phi_u \mid u \in X\rangle$ と定義するとアソシエーションスキームの原始ベキ等行列の性質から以下のことがなりたっていることが分かる.

$$\mathcal{F} = L_0(X) \perp L_1(X) \perp \cdots \perp L_d(X)$$

$$\dim(L_j(X)) = m_j = \mathrm{rank}(E_j)\ (0 \leq j \leq d)$$

$X$ の部分集合 $Y$ と $Y$ 上に定義された正値重み関数 $w : Y \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ の組 $(Y, w)$ を考える.
また, 以下の様に記号を定義する.
$\{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p\} = \{i \mid Y \cap X_i \neq \emptyset\}$,
$Y_{\nu_i} = Y \cap X_{\nu_i}$ $(1 \leq i \leq p)$.
$W_{\nu_i} = \sum_{y \in Y_{\nu_i}} w(y)$.
$S = X_{\nu_1} \cup X_{\nu_2} \cup \cdots \cup X_{\nu_p}$

**定義 15 (相対 $t$-デザイン [2])**
$(Y, w)$ は次の条件を満たす時に $u_0$ に関する相対 $t$-デザインであると言う.

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{W_{\nu_i}}{|X_{\nu_i}|} \sum_{x \in X_{\nu_i}} f(x) = \sum_{y \in Y} w(y) f(y)$$

が任意の $f \in L_0(X) \perp L_1(X) \perp \cdots \perp L_t(X)$ に対して成り立つ.

**定理 16 (B-B[2])**
$(Y, w)$ を $X$ の部分集合と正の重み関数の組とする. 関数 $\psi \in \mathcal{F}$ を $y \in Y$ に対して $\psi(y) = w(y)$, $x \notin Y$ に対して $\psi(x) = 0$ と定義する. このとき次は同値である.

(1) $(Y, w)$ は $u_0$ に関する相対 $t$-デザインである.

(2) $\psi$ は *Delsarte* の定義 *(*定義 *14)* の意味での $u_0$ に関する相対 $t$-デザインである.

**定理 17 (B-B[2])**
$(Y, w)$ を $u_0$ に関する相対 $2e$-デザインとする. このとき次の不等式が成り立つ.

$$|Y| \geq \dim(L_0(S) + L_1(S) + \cdots + L_e(S).$$

上記不等式で等号が成り立つ時に $(Y, w)$ を $u_0$ に関する *tight* な相対 $2e$-デザインと呼ぶ.

我々はユークリッド空間のデザインと同じスタイルの等式がここでも成り立つことを予想している.

**予想**
$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ を Q-多項式スキームとする. $S = X_{\nu_1} \cup X_{\nu_2} \cdots X_{\nu_p}$ と置く. ただし $e \leq \nu_i \leq \frac{d}{2}$ を仮定する (又は他の適当な条件 ($|S|$ が小さくなりすぎない等)). このとき

$$\dim(L_0(S) + L_1(S) + \cdots + L_e(S)) = m_e + m_{e-1} + \cdots + m_{e-p+1}$$

が成り立つ.

Delsarte は定義 15 の形を Q-多項式スキームのデザインとして直接的には記述していない．しかし定義 15 の形の考え方を全くしていなかった訳ではない様だ．Delsarte-Seidel (1989)[7] には次の様な定義が与えられている．まず記号を少し導入する．

$\mathfrak{X} = (X, \{R_i\}_{0\le i\le d})$ を P-多項式スキームとし $u_0 \in X$ を固定する．$X_j$ の各点 $z \in X_j$ に対して $f_z \in \mathcal{F}$ を次の様に定義する，

$$f_z(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in X_i,\ i \ge j \text{ and } (x,z) \in R_{i-j} \\ 0 & \text{other wise} \end{cases}$$

そして $\mathrm{Hom}_j(X) = \langle f_z \mid z \in X_j \rangle$ と置いてやると次の直和分解が得られる．

$$\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_0(X) + \mathrm{Hom}_1(X) + \cdots + \mathrm{Hom}_d(X)$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_j(X)) = |X_j| = k_j \ (0 \le j \le d).$$

このとき次の様な概念が知られている．

**定義 18 ($j$-wise balanced design[7])**
次の条件を満たす時に $(Y, w)$ は添字 $j$ を許容 *(admit)* するという．

$$\sum_{\substack{y\in Y \\ y\in X_i, i\ge j, (y,z)\in R_{i-j}}} w(y)$$

は添字 $j$ にのみ依存して定まる定数である．*($z \in R_j$ の取り方に依存しない .)* この時 $(Y, w)$ は *$j$-wise balanced design* と呼ばれる．

**定義 19 (正則な $t$-wise balanced design[7])**
$(Y, w)$ は $0 \le j \le t$ を満たす全ての整数 $j$ を許容する時に正則であると言う．

**定理 20 (Delsarte-Seidel[7])**
$(Y, w)$ をハミングスキーム $H(n, 2)$ の正の重みを持つ部分集合とする．この時 $(Y, w)$ は次の条件を満たすときのみ添字 $j$ を許容する．

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{W_{\nu_i}}{|X_{\nu_i}|} \sum_{x\in X_{\nu_i}} f(x) = \sum_{y\in Y} w(y) f(y)$$

が任意の $f \in Hom_j(X)$ に対して成立する．

この定理は我々の相対デザインの定義 (定義 15) 及び定理 16 に同等な形である．Delsarte-Seidel は更に次の定理を与えている．

**定理 21 (Delsarte-Seidel (1989)[7])** $H(n, 2)$ の正の重み付き部分集合 $(Y, w)$ に対して次の不等式が成り立つ．$(Y, w)$ が $0 \le j \le 2e$ を満たす全ての添字 $j$ を許容するならば *(すなわち正則な $t$-wise balanced desigh であるならば)* 次の不等式が成り立つ．

$$|Y| \ge \dim(Hom_0(S) + Hom_1(S) + \cdots + Hom_e(S))$$

Delsarte-Seidel [7] はその表題にもある様にユークリッド空間のデザインに関する Fisher 型の不等式を与えた論文である．Delsarte や Seidel は我々と同じ様にユークリッド空間のデザインの理論に達した後再び組合せ論的なデザインの理論に戻ろうとしていた様である．[7] では上記定理に与えた $|Y|$ の下界を具体的に計算するのは難しいであろうと述べられている．しかし最近上海交通大学の学部学生 Xiang により次の結果が得られている．

**定理 22 (Xiang (2012)[14])** $H(n,2)$ においては $e \le \nu_i \le n-e$ であれば

$$\dim(Hom_0(S) + Hom_1(S) + \cdots + Hom_e(S)) = k_e + k_{e-1} + \cdots + k_{e-p+1}$$

が成り立つ．

$H(n,2)$ に対しては $X$ 上の関数空間 $\mathcal{F}$ の 2 種類の関数空間分解は次の性質を満たしていることが分かっている．すなわち任意の $e$ に対して次の等式が成立する．

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_0(X) + \mathrm{Hom}_1(X) + \cdots + \mathrm{Hom}_e(X) \\ &= L_0(X) + L_1(X) + \cdots + L_e(X) \end{aligned} \tag{1}$$

従って定理 22 は次の系を与える．

**系 23** $H(n,2)$ の 相対 $2e$-デザイン $(Y,w)$ は次の不等式をみたす．

$$|Y| \ge m_e + m_{e-1} + \cdots + m_{e-p+1}.$$

($H(n,2)$ に於いては $m_j = k_j$ $(0 \le j \le d)$ であることに注意したい，)

$H(n,2)$ は P-かつ Q-多項式スキームでありさらに自己双対的である ($P=Q$)，我々は当初自己双対的な P-かつ Q-多項式スキームに於いては 2 つの関数空間分解は一致し（すなわち (1) が成立し）Delsarte の定義 19 は Q-多項式スキームの相対デザインの定義に同値であろうと予想していた．しかし一般にはそうなっていないことが須田・田中によって示されている．( $Hom_j(X) = L_j(X)$ は $H(n,2)$ においても成立している訳ではないことに注意しておく.)

我々は Delsarte-Seidel の定理 20 と定理 21 が一般の P-多項式スキームにおいて成り立つことを確認している．ここでもう一度 2 つの立場のデザインを並べてみる．

Q-多項式スキーム $\mathfrak{X}$:
$\mathcal{F} = L_0(X) \perp L_1(X) \perp \cdots \perp L_d(X)$
相対 $t$-design $(Y,w)$ w.r.t. $u_0$ に関して, $\mathfrak{X}$ の Q-構造を利用して次が証明出来る．
$t = 2e$ であれば

$$|Y| \ge \dim(L_0(S) + L_1(S) + \cdots + L_e(S))$$

P-多項式スキーム $\mathfrak{X}$:
$\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_0(X) + \mathrm{Hom}_1(X) + \cdots + \mathrm{Hom}_d(X)$
正則な $t$-wise balanced デザイン $(Y,w)$ w.r.t.$u_0$ (P-構造に関する相対 $t$-デザインと呼んでも良いと考える) に関して $\mathfrak{X}$ の P-構造を利用して次が証明出来る．
$t = 2e$ であれば

$$|Y| \ge \dim(\mathrm{Hom}_0(S) + \mathrm{Hom}_1(S) + \cdots + \mathrm{Hom}_e(S)).$$

予想
次の等式が成り立つことが予想される (自明な反例を除くための適当な条件の下に).
Q-多項式スキームにおいて.

$$\dim(L_0(S) + L_1(S) + \cdots + L_e(S)) = m_e + m_{e-1} + \cdots + m_{e-p+1}. \tag{2}$$

P-多項式スキームにおいて.

$$\dim(\mathrm{Hom}_0(S) + \mathrm{Hom}_1(S) + \cdots + \mathrm{Hom}_e(S)) = k_e + k_{e-1} + \cdots + k_{e-p+1}. \tag{3}$$

便宜的に上記 $\mathcal{F}$ の部分空間分割をそれぞれ $L$ 空間分割，$Hom$ 空間分割と呼ぶことにする.
• $L$ 空間分割，$Hom$ 空間分割は同値になる（すなわち (1) が成り立つ）自己双対的な P-かつ Q-多項式スキームは $H(n,2)$ 以外に存在するのか? ($H(n,q)$ でも成り立つことが証明されている (須田))
• 自己双対的ではない P-かつ Q-多項式スキームでは $L$ 空間分割，$Hom$ 空間分割がそれぞれ何を与えるのか？
• P-多項式スキームの構造しか持たない場合，Q-多項式スキームの構造しか持たない場合などどれぐらいのことが成り立つのか？
• それぞれの場合に，tight な面白い例はどれぐらい存在するのか？
• 次元に関する予想の等式 (2) や (3) が成り立たない場合であっても tight なものの定義は定理 17 の形で定義可能である．それ等の中に面白い例があるか?
等々，興味深い問題が沢山考えられる.

$H(n,2)$ の相対 $t$-デザインに関しては次の結果が知られている.

**定理 24 (Delsarte (1977)[5])**
$(Y,w)$ を $H(n,2)$ の正の重み付き部分集合とする．$u_0$ を固定して $Y \subset X_k(=\{x \in X \mid (u_0,x) \in R_k\})$ を仮定する．この時 $(Y,w)$ が $u_0$ に関する $H(n,2)$ の相対 $t$-デザインであることと $(Y,w)$ がジョンソンスキーム $J(n,k)$ の $t$-デザインであることは同値である.

定理 24 は $H(n,2)$ の lattice の構造を利用して証明されている.

以上述べて来た相対デザインに関して tight なものがどれぐらい存在するかまだあまり研究が行われていない．以下に知られていることを少し述べておく.
• tight な相対 2-デザイン.
  $p = 1$： $H(n,2)$ においては対称デザインの概念に他ならない.
• $H(n,2)$ の tight な相対 4-デザイン.
  $p = 1$: tight な相対 4-デザインは古典的な tight 4-$(n,k,\lambda)$ デザインに他ならない．4-$(23,7,1)$ デザインとその補デザイン 4-$(23,16,52)$ デザインしか存在しないことが知られている (榎本-伊藤-野田 [8]).
  $p = 2$: 4-$(n,k,\lambda)$ から 1 点を取り除くことにより tight な相対 4-デザインが得られることが分かる.

以下に文献を幾つか記す．総合的な参考文献として [1] も挙げておいた．また予想の等式 (2) は $H(n,2)$ において成立することが分かったのであるがその証明は $H(n,2)$ の P-多項式構造を利用したものである．文献 [9] に於いては $H(n,2)$ の Q-多項式構造を利用して $e$ が小さい場合に

等式 (2) が成り立つことを証明している. $H(n,2)$ の Q-多項式構造あるいは Terwilliger 代数の言葉を利用した一般的な証明ももう少し考えてみたいと思っている.

# References


[1] Ei. Bannai and Et. Bannai, *A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres*, European J. Combin., 30 (2009), 1392–1425.

[2] Ei. Bannai and Et. Bannai, *Remarks on the concepts of t-designs*, J. Appl Math Comput 40 (2012), 95–207 (Proceedings of AGC2010.)

[3] Ei Bannai, *On antipodal Euclidean tight* $(2e+1)$*-designs*, J. Algebraic Combin., **24** (2006), 391–414.

[4] P. Delsarte, *An algebraic approsch to the association schemes of coding theory*, Philips Res. Rep. Suppl. 10 (1973).

[5] P. Delsarte, *Pairs of vectors in the space of an association scheme.* Philips Res. Rep. 32 (1977), 373–411.

[6] P. Delsarte, J. M. Goethals, and J. J. Seidel, *Spherical codes and designs*, Geom. Dedicata 6 (1977), 363-388.

[7] P. Delsarte and J. J. Seidel, *Fisher type inequalities for Euclidean t-designs*, Linear Algebra Appl. 114-115 (1989), 213-230.

[8] H. Enomoto, N. Ito and R. Noda, *Tight 4-designs*, Osaka J. Math. 16 (1979) 39-43.

[9] Z. Li, Ei. Bannai and Et. Bannai, *Tight relative 2- and 4-designs on binary Hamming Association Schemes*, Published on line in Graphs and Combinatorics DOI 10.1007/s00373-012-1252-1

[10] H. M. Möller, *Kubaturformeln mit minimaler Knotenzahl,* Numer. Math. 25 (1975/76), no. 2, 185–200.

[11] H. M. Möller, *Lower bounds for the number of nodes in cubature formulae*, Numerische Integration (Tagung, Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1978), 221–230, Internat. Ser. Numer. Math., 45, Birkhäuser, Basel-Boston, Mass., 1979.

[12] A. Neumaier and J. J. Seidel, *Discrete measures for spherical designs, eutactic stars and lattices*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 91=Indag. Math. 50 (1988), 321-334.

[13] D. K. Ray-chauhuri and R. M. Wilson, *On t-designs*, Osaka J. Math. 12 (1975) , 737-744.

[14] Z Xiang, *A Fisher type inequality for weighted regular t-wise balanced designs*, Journal of Combinatorial Theory A, 119 (2012), 1523–1527.