

グラフ分割問題と幾何的分割法に関する談論
- 数値流体力学におけるより良い領域分割法に向けて -

中島 卓司
広島大学大学院工学研究院
〒 739-8527 広島県東広島市鏡山一丁目 4 番 1 号
nakashima@hiroshima-u.ac.jp

澤 正憲
名古屋大学情報科学研究科
〒 464-8601 愛知県名古屋市不老町千種区
sawa@is.nagoya-u.ac.jp

1. 序

本稿では、グラフ分割問題が実際の工学応用に用いられている「数値流体力学」分野について紹介するとともに同分野におけるグラフ分割法の適用事例と今後望まれる理論発展について述べる。

数値流体力学，なかでもスーパーコンピュータを用いた大規模シミュレーションでは，非常に多数の演算装置の間で演算負荷のバランスを取るためにグラフ分割技術を応用する．そのため，演算条件に見合った様々な制約条件下で，要求条件を満足するグラフ分割を与える方法が求められている．

第一著者のような数値流体力学分野で大規模シミュレーションを行う研究者にとって，グラフ分割技術は，完成されたライブラリをプログラムに組み込む形で利用するユーザの立場にある．本来ならば，このようなグラフ分割理論の実用課題への応用技術については，情報工学分野において実用研究レベルの取り組みがなされる課題であるが，本稿は，ユーザレベルの視点からグラフ分割技術の応用の実際を紹介するとともに今後期待されるツールとしてのグラフ分割技術の発展に関連する課題を基礎理論の研究レベルまで遡って課題提起することで，基礎から実用までがリンクしたグラフ分割理論の今後の発展を期待するものである．

本稿の前半では，大規模計算機を用いた数値流体力学分野の紹介とグラフ分割手法の適用に関して概要を紹介する．後半では，現在の分割ツールでは適用例のない幾何的分割法に着目し，関連するグラフ分割理論にまつわる理論的な検討を加える．

2. 大規模数値流体力学分野におけるグラフ分割法の応用について

2.1. 数値流体力学 (CFD) と有限体積法 (FVM). 数値流体力学 (CFD: Computational Fluid Dynamics) とは，一般に，流体力学の基礎方程式として知られる Euler 方程式や Navier-Stokes 方程式について，計算機を用いて離散時空間における近似方程式を解き，近似解を得る方法を指す．19 世紀に導かれた Navier-Stokes 方程式の奥深さ，難解さは，その解の存在問題がクレイ研究所によるミレニアム検証問題の一

本研究は日本学術振興会 科学研究費補助金 (若手研究 (B) 22740062) および学術研究助成基金助成金 (挑戦的萌芽研究 23654031) の支援を受けて行われている。

題にも挙げられているように、大変興味深いものとされている。一方で、工学的な分野、すなわち流体力学分野においては、その最終的な目的が数学的な厳密解を得ることではなく、方程式の解が指し示す流体の物理現象を解明することにある。その点で有益な近似解を与え得る CFD 技術は、数学分野以上に工学分野において極めて重要かつ有効な手段となっている。CFD 技術の実用問題への適用事例として、図 1 に大型トラックを模擬した簡易車両形状まわりの流れのシミュレーション例 [10] を示す。同図左のように車体表面の圧力分布を解明することで走行中の車両に働く空気力の特徴を詳細に把握できるとともに、周囲流速分布などからその原因となる流動現象を究明し、形状改良のための知見を得ることもできる。

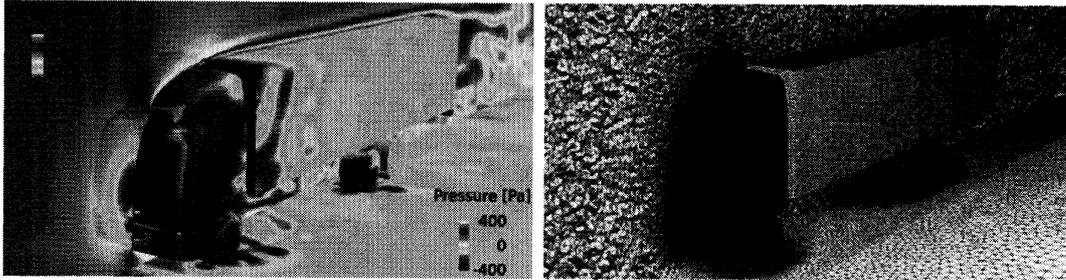


FIGURE 1. 簡略化トラック車両周りの流れのシミュレーション [10] : 車体表面圧力と車両周囲流速 (左図) およびシミュレーションに用いた空間離散要素 (右図)

実際の CFD における数値的な処理は次のように行われる。ここでは、代表的な例として、非圧縮性 Newton 流体を仮定した Navier-Stokes 方程式系の数値解析法を取り上げる。そのような仮定の下で、時間 1 次元、空間 3 次元の流体運動を表記する方程式系は、時刻を t 、空間座標を $x_i (i = 1, 2, 3)$ 、空間 i 座標軸方向の流体速度を u_i 、圧力を p 、流体密度を ρ 、流体の粘性係数を μ として、次式のようなになる。

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \end{aligned}$$

上記の方程式のうち、ともに左辺第 1 項の時間微分項は有限差分法により離散化されることが一般的である。

一方、その他の空間微分項の離散化については、有限差分法 (FDM: Finite Differential Method) に加えて、有限要素法 (FEM: Finite Element Method) や有限体積法 (FVM: Finite Volume Method) も用いられる。いずれも、先の時間微分項の処理と同様、空間上に離散的に定義された基礎方程式中の従属変数、すなわち流体速度 u_i や圧力 p などの物理量の分布から、それらの微分項の値を近似的に算出するための手法であるが、特に後者の 2 手法は、空間の離散点、並びにそれらの関係性の取り方に関する自由度が高く実用工学問題へしばしば適用される手法である。

有限差分法では、基本的に図 2(a) のような構造格子と呼ばれる規則的に並んだ離散点上の物理量と、同じく規則的な離散点間との関係性を用いて、各離散点上における物理量の微分係数を求めることとなる。

一方、有限要素法や有限体積法においては、空間を分割した微小体積における物理量の積分値に対して基礎方程式を満足するような解を求めることとなる。このため、空間を離散化する際に、図 2(b) のように明らかな規則性を持たない (非構造的な) 微小要素 (有限要素もしくは有限体積) を用いることが容易になる。このような

空間離散要素の構成は非構造格子と呼ばれ、図2における比較でも明らかなように、複雑な形状を少ない離散点（要素）数でより容易に表現しうる。このため、複雑な形状周りの流動現象などを対象とすることの多い流体力学分野の解析においては、空間の離散化手法として有限要素法や有限体積法が選択される。

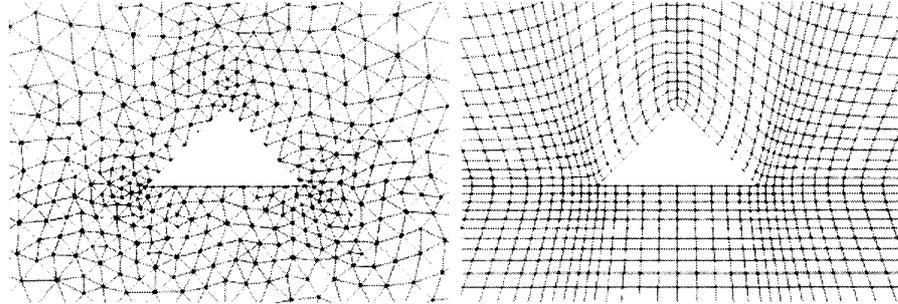


FIGURE 2. 構造格子（左図）と非構造格子（右図）：
三角形物体周りの2次元空間領域の微小要素分割例

加えて、固体、構造解析においては有限要素法の適用が主であるのに対し、CFDにおいては、それと同等かそれ以上に、有限体積法の適用が多く見られる。これは、対象とする物理現象が「注目領域を流体が通過する」問題であることが多く、その現象を表現する方程式として式(2.1)のように Euler 型記述が主に用いられることから、保存則の記述においてより直接的な取り扱いが可能な有限体積法が好まれることなどがその理由であると考えられる。

2.2. 有限体積法 CFD に現れるグラフ。これまでに述べてきた CFD において出現するグラフとは、いったいどのようなものであろうか。

先に CFD における空間離散化手法の一つとして挙げた有限体積法では、基礎方程式の両辺に空間積分を施した方程式が直接の基礎方程式となる。積分範囲は対象空間を微小分割した有限体積 ΔV 上であり、特に、有限体積中の物理量の微分値は

$$(2.2) \quad \int_{\Delta V} \operatorname{div} u dV = \int_{\Delta S} u \cdot ds = \sum_i u \cdot \Delta s_i$$

のように、Gauss の発散定理を用いて求められる。この時、有限体積表面を通過する物理量は、有限体積の表面を構成する各多角形平面 Δs_i を通過する物理量の総和として式(2.2)右辺のように評価される。

このような考え方のもとで、ある有限体積について基礎方程式の各項の値を算出するとすれば、その有限体積自身が持つ物理量と、隣接する有限体積の物理量を用いて数値処理が行われることとなる。これらの関係性を表すグラフが本稿で対象とするグラフであり、それは離散化された空間において物理量を定義する点、およびそれらの関係性を、それぞれ頂点と辺に置き換えたものである。

このグラフは、有限体積法におけるデータ処理の関係性を表しているが、このことは、コンピュータ上で解析を行う際の演算処理量とも直接的に結び付けられるものであることを意味する。すなわち、式(2.2)のような処理を行う場合を考えると、一つの頂点に対して、その頂点の結合辺の数に比例した回数之和算や積算などの演算処理が生じる。また、この処理は数値解析で対象とする領域内すべての有限体積で生じることになるので、その有限体積の数、つまり先のグラフで言うところの頂点数に応じて演算処理が生じることとなる。

実用工学分野における適用で流体解析に先んじて発展してきた固体、構造解析における有限要素法では、要素内における物理量の分布を表す形状関数を適切に定める

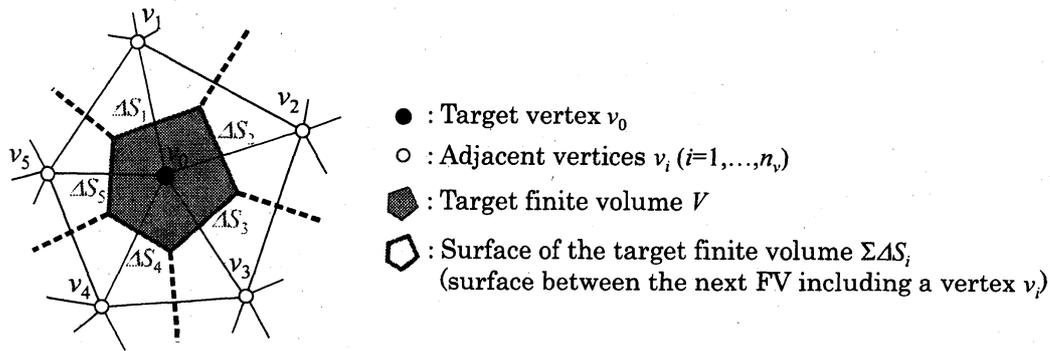


FIGURE 3. 有限体積における演算例

ことが必要であり、空間離散要素としてはその形状関数を与える要素形状に制約されていた。このため、四面体要素もしくは六面体要素を用いた解析が主であり、これまでの有限要素法関連分野における検討対象としてはそれらの要素を基に構成されるグラフが中心であった。

しかし、CFDにおける有限体積法では有限体積内の物理量を同体積内の離散点を持つ値で表現し、そこから有限体積界面を出入りする物理量の流束を算出する形で処理が行われるため、空間分割する有限体積の形状には比較的自由度を持たせやすく、多面体要素を用いた有限体積法の適用もしばしば行われる。また、固体、構造解析分野においても、近年では多面体要素を用いた容易な定式化への試みなどもなされており、今後は、より複雑な離散要素形状を用いた空間の離散化が行われる可能性がある。

このような背景から、本稿では任意な多面体要素を用いた有限体積法もしくは有限要素法の解析を想定し、その離散要素を持つ関係性から構築されるグラフを有限体積グラフと定義して、議論の対象とする。なお、有限体積グラフの定義については、次章でその詳細を述べることにする。

2.3. CFDの大規模化と近年の大規模計算機の特徴. ところで、流体力学分野においてCFD技術に求められる要素は、いかに実際の流体現象を精度よく再現し、その理解に資するかであり、そういった観点から基礎方程式に対する近似精度の向上は重要な課題である。

先述の通り、対象とする基礎方程式が極めて難解な特性を有していることから、その離散近似解法においても困難は多く、離散近似手法の開発と選択は極めて重要である。また、たとえば乱流モデルのように、解として現れるべき物理現象を考慮し、それらに対する経験則も含めた物理モデルを組み込んで、基礎方程式系をより単純化する手法も用いられる。

それらに加えて、より直接的に解の精度を向上させる手法として、時空間の離散点数を増やし、基礎方程式中の各偏微分項の近似精度を高める方法も考えられる。特に、実用的な流体力学分野におけるCFDでは、複雑形状内やその周りの流体現象を取り扱うことによる境界条件の複雑化や、幅広いスケールにわたって時空間的な物理量変化を伴う高 Reynolds 数流れの取り扱いなどにより、流場の特性を表現するために必要な離散点数は膨大なものとなる。

近年の計算機技術の発展速度は凄まじく、その演算速度はムーアの法則に従って、おおよそ30年間で $2^{30} \approx 10^9$ 倍に近い高速化を達成している。しかし、それほど的高速化を経た計算機を用いてもなお、CFDにおいて真に必要とされる離散点数を満足する解析の実現は多くの課題において不可能である。このため、現段階で使い得る最高速の計算機、すなわちスーパーコンピュータを用いた大規模計算 (HPC: High

Performance Computing) 技術に基づく CFD の必要性はいまだに失われておらず, CFD 技術が発展してより幅広い工学問題への適用が可能となった現在においてはむしろその必要性は高まる傾向にある. さらに, その大規模計算機上においてより速く演算を実施するには, その特性を把握し, それをより効率よく使いこなす技術が必要となる.

近年の大規模計算機の特徴として, 大規模並列化が挙げられる. これは, さまざまな技術的限界により, 演算装置単体での高速化が頭打ちとなりつつあるため, それに代わる計算機の高速度化技術として, 演算装置数を増加させ複数の演算装置を同時に使用することで全体としての演算速度を高める手法が採られている. たとえば, 2011 年冬に世界最高速を達成した京コンピュータは, CPU が 8 万個以上, コア数は 64 万個以上に上る大規模並列コンピュータとなっている.

そのような多数の演算装置を有する計算機を用いた並列処理において演算処理の観点から重要な要素は次のようになる.

- 全演算数 n_t に占める並列処理可能な演算数 n_p の多さ
- 全演算数 n_t に占める処理並列化のための追加演算 n_{ap} (オーバーヘッド) の少なさ

並列数 N_p のとき, 単独演算装置での演算に対して加速した割合を表す並列加速率 $S(N_p)$ は Amdahl の法則 [3] によって定式化されており, 前者については N_p の増大に伴って重要性が増すことが知られている. さらに, 後者は単独演算時には不要であった演算の増加要素であるので, これもまた並列加速率の低下に寄与する. しかし, 実際には並列数 N_p が増大することで n_t に対する非並列処理演算数 ($n_t - n_p$) の相対的な大きさが小さくなることが知られており, そのことを加味した Gustafson の法則 [5] では, 逆に N_p が大きくなることで $S(N_p)$ は N_p に漸近しうることが指摘されている. 以上の議論は, いずれも並列処理時に並列処理可能な演算について各演算装置が $\frac{n_p}{N_p}$ の演算を等しく分担するという仮定の下に行われるが, 実際にはそれぞれの演算装置に割り当てられる演算数は均一ではなく, そのアンバランスによって演算数の少ない演算装置が演算数の多い演算装置の演算実行を待つ, という待ち時間を生じることで効率の低下が起こる. Gustafson の法則において期待される通り非並列演算が総演算に対して相対的に減少するのであれば, このような演算のアンバランスの問題を解決するための演算処理の均等分割が大規模並列処理における重要課題となる.

さらに, 上述に加えて並列処理では, 演算装置間の通信も処理全体の高速化における重要な課題である. 通信処理もまた, 処理並列化のための追加演算と同様なオーバーヘッドとして考えることができる. さらに, 処理のバランス化の観点から考えれば, 各演算器が行う通信処理の時間もまた均一であり, 通信の少ない演算装置が通信の多い演算装置を待つような待ち時間を生じないことがより理想的であるといえる.

先述の京コンピュータでは, 膨大な CPU 数を有することからより効率的かつ安定的な CPU 間の情報通信を可能にするため, CPU 間を Tofu [1] と呼ばれる特殊なトポロジーで結合している. このように, より効率の良い並列処理を実現するハードウェア構成として, 演算装置間の通信ネットワークも近年の大規模計算機における重要な技術である.

2.4. 大規模有限体積法 CFD におけるグラフ分割問題. 前節では, 離散点数を非常に多くとる大規模な CFD 解析において大規模計算機が必要であり, その最近の傾向として非常に多くの演算装置を用いて並列に演算を処理することの必要性について紹介した. 加えて, その際には膨大な数の演算装置に対して演算処理を均等に分割することが重要であることを述べた.

一方, 前々節で述べた通り, 有限体積法 CFD においては各有限体積とその隣接有限体積との関係性を表すグラフが存在し, その頂点と辺は数値解析における演算量に

直接的に関係づけられる。このことから、大規模な有限体積法 CFD で発生する演算量を多数の演算装置に均等に振り分ける問題として、グラフ分割問題が現れることとなる。この時、グラフ分割のために削除される辺はすなわち、演算装置間の通信量に相当する。

そして、前節で述べた並列演算処理において求められる演算分配の条件をグラフ分割問題に置き換えると、グラフ分割の条件は以下のようになる。

- 分割グラフ中の重み付けされた頂点数が均一（有限体積数および各有限体積が隣接する有限体積数から定まる演算量が当分配される。）
- グラフ分割の際の削除エッジ数が最小（隣接有限体積の情報を担当演算装置と通信する通信量を最小にする。）

そのようなグラフ分割を与える実用ツールとして、Metis[6] や Scotch[12]、およびそれらの並列処理版である ParMetis, PT-Scotch がソフトウェアもしくはライブラリという形で提供されており、CFD 分野においても並列演算処理のための領域分割を与えるグラフ分割に広く用いられている。

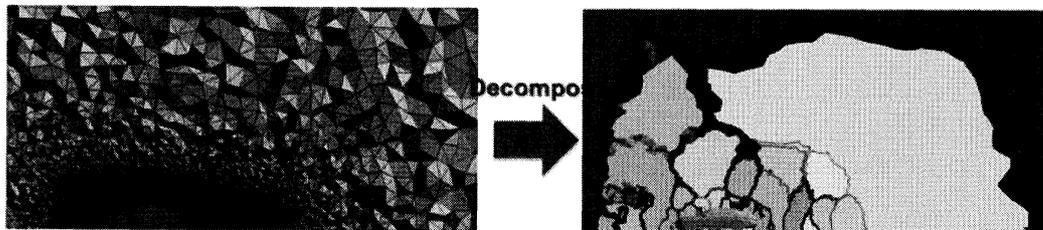


FIGURE 4. metis により分割された有限体積法の空間離散要素（色は分割された各部分グラフが占める領域を表す）

2.5. 大規模並列 CFD 分野で今後求められるグラフ分割. しかし、前々項の京コンピュータの事例でも紹介した通り、今後超大規模並列 CFD を実施する場合、演算装置間で情報交換するためのネットワーク結合は全ての演算装置間で等価ではなく、各演算装置間の関係が物理的にも論理的にも距離が異なった複雑かつ特有のトポロジを持つ可能性が高い。

そのようなハードウェア構成の計算機において演算装置間の通信も含めた有限体積法 CFD の高効率な実行手段を考える場合、これまで考慮されてきたグラフ分割の条件に加えて、

- 分割後の部分グラフ間の関係性に対して、使用する計算機中の演算装置間のネットワーク結合に対応したトポロジを持たせることが可能

であることがより望ましいと言える。

そこで本稿では、部分グラフ間の関係性にトポロジを持たせるためのアイデアとして、グラフが有する 3 次元空間の幾何学的特性を活用することを考える。たとえば、その 3 次元空間を直交する各々が 3 平面で分割すれば、分割された部分空間は 3 次元的な”並び”を持つこととなる。これと同様にグラフを分割することができれば、3 次元的な結合トポロジを持たせたグラフ分割を得ることができであろう。このような観点から本稿では、グラフ分割自体の演算処理の多さや実用性能などの課題を理由に応用例が少ない幾何的グラフ分割法の可能性に期待し、以降、幾何的分割法について論じることとする。

3. グラフの頂点分割

以下で扱うグラフはすべて単純無向グラフとする。また特に断らない限り、グラフの位数は n で表すことにする。

定義 3.1. グラフ G の頂点集合 V の部分集合 C は、次の条件を満たす実数 $0 < \delta < 1$ と写像 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ が存在するとき、**分割比 δ** 、**サイズ $f(n)$ の頂点分割集合**という。

- (1) $|C| \leq f(n)$;
- (2) $V \setminus C$ は、 $\max\{|A|, |B|\} \leq \delta n$ を満たし共通部分を持たない部分集合 A, B に分割される。

グラフの頂点分割に関する古典的な結果として Lipton-Tarjan の定理 [7] が知られている。この定理は、任意の n 頂点平面グラフが、分割比 $2/3$ 、サイズ $\sqrt{8n}$ の頂点分割集合をもつことを保証する。Lipton らの仕事以降、アルゴリズムや組合せ最適化の分野の多くの研究者が Lipton らの定理の様々な一般化を与えた。とりわけ次の Alon, Seymour, Thomas らの結果は有名である [4]。

定理 3.2. (Alon-Seymour-Thomas の定理)。 K_h をマイナーに持たない任意の n 頂点グラフは、分割比 $2/3$ 、サイズ $O(h^{3/2}\sqrt{n})$ の頂点分割集合をもつ。

一連の成果は数学的に興味深いものばかりであるが、高次元空間のメッシュ等、応用的側面から重要なグラフには適用されないという欠点を抱えている。これを受け、Miller, Teng, Thurston, Vavasis ら [9] はグラフの幾何的分割法を独自に考案した。詳細は次節に述べる。

4. MILLER-TENG-THURSTON-VAVASIS の定理

d 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^d の点 y を中心とする閉球体

$$B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - y\| \leq r\}$$

を考える¹。文脈上、球体の中心 y を明記する必要のない場合は B_r と書く。

正の実数 s と \mathbb{R}^d の部分集合 A に対して、

$$s \cdot A = \{(sx_1, \dots, sx_d) \mid (x_1, \dots, x_d) \in A\}$$

とおく。

空間 \mathbb{R}^d の閉球体の集合 $\mathcal{B} = \{B^{(1)}, \dots, B^{(v)}\}$ は、任意の異なる球体 $B^{(i)}$ 及び $B^{(j)}$ が共通部分をもつとき**素近傍系**という。実数 $\alpha \geq 1$ に対して、集合

$$\mathcal{E} = \{\{B^{(i)}, B^{(j)}\} \mid B^{(i)} \cap (\alpha \cdot B^{(j)}) \neq \emptyset, B^{(j)} \cap (\alpha \cdot B^{(i)}) \neq \emptyset\}$$

を考える。このとき近傍系 \mathcal{B} を頂点集合、 \mathcal{E} を辺集合とするグラフ $\mathcal{G} = (\mathcal{B}, \mathcal{E})$ を定義することができる。グラフ \mathcal{G} を近傍系 \mathcal{B} の α **交差グラフ**という。

次の定理は Miller, Teng, Thurston, Vavasis ら [9] トポロジーの研究グループによって証明された²。

¹ $\|\cdot\|$ は通常のユークリッド距離を表す。

²William P. Thurston は、ハーケン多様体に内在する幾何構造を記述する“モンスター定理”等で知られており、1980 年代に一連の研究成果が認められフィールズ賞を受賞した。また同氏は曲面の微分同相性の分類等においても顕著な業績を挙げており、それら基礎理論の応用としてグラフの幾何的分割問題にも着手したものと推測する。私達はこの夏、同氏らの論文 [9] について幾つか質問するべくメールでのコンタクトを試みたが結局返事を得ることはできなかった。極最近、その理由が今年 (2012 年) の 8 月末に同氏が亡くなられたことによるものであったと知った。

定理 4.1. (Miller-Teng-Thurston-Vavasis の定理). \mathcal{G} をサイズ n の素近傍系に対する α 交差グラフ, d を自然数とする. このとき \mathcal{G} は, 分割比 $(d+1)/(d+2)$, サイズ $O(\alpha \cdot n^{(d-1)/d} + q(\alpha, d))$ の頂点分割集合をもつ. ただし $q(\alpha, d)$ は α, d にのみ依存する関数であり n に依らない.

決められた空間に α 交差グラフとして埋め込み可能なグラフの分類は当該研究分野の基本的な問題である. 次節では, この問いに対する部分的な解答を与える.

5. 多面体的複体グラフ

空間 \mathbb{R}^d の点 y を中心とする半径 r の球面を $S_r(y)$ で表わす. すなわち,

$$S_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - y\| = r\}.$$

球体同様, 球面の中心を明記する必要のない場合は S_r と書くことにする. $(d-1)$ 次元単位球面 S_1 の表面積および d 次元単位球体 B_1 の体積をそれぞれ s_{d-1} , v_d とおくと,

$$s_{d-1} = dv_d$$

であることが容易にわかる. また

$$s_d = \begin{cases} 2 \frac{(2\pi)^{d/2}}{(d-1)!!} & d \equiv 0 \pmod{2}, \\ \frac{(2\pi)^{(d+1)/2}}{(d-1)!!} & d \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

であることもよく知られている.

空間 \mathbb{R}^d の閉凸多面体からなる有限集合 \mathcal{P} は次の条件を満たすとき, **多面体的複体** と呼ばれる.

- (1) \mathcal{P} の各元の面 (face) もまた \mathcal{P} に属する.
- (2) \mathcal{P} の任意の2つの元 P_1, P_2 の共通部分は P_1, P_2 の面である.

例 5.1. 単位立体

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq \frac{1}{2}, |y| \leq \frac{1}{2}, |z| \leq \frac{1}{2}\}$$

の頂点, 辺, 側面全体 (と立体そのもの) からなる集合は多面体的複体をなす.

多面体的複体は単体的複体とセル複体の中間的な概念である. 多面体的複体の基礎理論および関連する用語等については, 例えば Aleksandrov の入門書 [2] を参照されたい.

さて, 有限要素法などへの応用を前提にすると, 多面体的複体の各多面体は“良い”形をしていることが望ましい. 多面体の良さを記述する尺度は様々であるが³, ここでは **アスペクト比 (aspect ratio)** を採用する. 多面体 P が与えられたとき, P を含む球面の最小半径 $R(P)$ を P に含まれる球面の最大半径 $r(P)$ で割った値 $R(P)/r(P)$ を, P のアスペクト比という. 直感的には, アスペクト比が大きな多面体ほど“鋭い形”をしているということが出来る⁴.

次は Miller-Teng-Thurston-Vavasis ら [9] による結果である.

補題 5.2. ([9, Lemma 3.1]). r, γ を $r \geq \gamma > 0$ を満たす実数とする. $S_r \cap (\frac{1}{2} \cdot B_\gamma) \neq \emptyset$ と仮定する. このとき球冠 $S_r \cap B_\gamma$ の表面積は少なくとも $(\sqrt{7}\gamma/4)^{d-1} v_{d-1}$ である.

³例えば [9] 等を参照.

⁴アスペクト比というと, 2次元形状の物の長辺と短辺の比率を指し示すのに使われることもあるが, 本稿では少し違う意味で同一の用語を用いている.

多面体的複体 \mathcal{P} の 1-骨格 (すなわち頂点と辺 (縁) の集合) は自然にグラフと見なすことができる. このグラフを \mathcal{P} の有限体積グラフ (finite-volume graph) と呼び, $G_{\mathcal{P}}$ と表わす (本稿 2.2 節参照). $G_{\mathcal{P}}$ の頂点は \mathbb{R}^d の通常の位相空間の意味で内点をなすとき, グラフの内部頂点という. 同様に, $G_{\mathcal{P}}$ の頂点は \mathbb{R}^d の通常の位相空間の意味で境界点をなすとき, グラフの境界頂点という.

定理 5.3. \mathcal{P} を \mathbb{R}^d における多面体的複体とする. また \mathcal{P} の各多面体のアスペクト比の上界を c とする. このとき, 任意の $\alpha \geq q(c, d)$ に対してグラフ $G_{\mathcal{P}}$ が α 交差グラフの部分グラフをなすような正の実数 $q(c, d)$ が存在する. ただし $q(c, d)$ は c, d にのみ依存する関数であり $G_{\mathcal{P}}$ の位数に依らない.

定理 5.3 の証明. $G_{\mathcal{P}} = (V, \mathcal{E})$ とし, その内部頂点を p_1, \dots, p_n とおく. 各 $i = 1, \dots, n$ に対して頂点 p_i を含む多面体 P_1, \dots, P_{t_i} を考える. $r_i = \min_{j=1}^{t_i} r(P_j)$ とおく. このとき

$$r_i \leq \frac{1}{2} \min_{x \in \bigcup_{1 \leq k \leq u_j} F_{j,k}} \|x - p_i\|$$

が成り立つ. ただし $F_{j,k}$ ($k = 1, \dots, u_j$) は p_i の向い側にある P_j の面を表す. 頂点 p_i から面 $F_{j,k}$ を含む最小のアフィン部分空間までの距離を $a_{j,k}$ とおく. p_i は内部頂点なので,

$$\min_{\substack{1 \leq j \leq t_i \\ 1 \leq k \leq u_j}} a_{j,k} < \min_{x \in V} \|x - p_i\|$$

を得る. このことは $\{B_{r_i}(p_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ が \mathbb{R}^d の素近傍系をなすことを示している.

次に, $t_i \leq q^*(c, d)$ を満たし c, d にのみ依存する正の実数 $q^*(c, d)$ が存在することを示そう. そのためにまず, P_j に含まれ c_j を中心とする半径 $r(P_j)$ の球体を考える. 補題 5.2 より,

$$|B_{r(P_j)}(c_j) \cap S_{\rho_j}(p_i)| \geq \left(\frac{\sqrt{7}r(P_j)}{4} \right)^{d-1} v_{d-1}$$

が成り立つ. ここで左辺の記号 $|\cdot|$ は球冠の表面積を表し, また $\rho_j = \|p_i - c_j\|$ とする. 拡大写像 $g_j(x) = \frac{1}{\rho_j} x$ を考えると,

$$\begin{aligned} |g_j(B_{r(P_j)}(c_j^{(i)}) \cap S_{\rho_j}(p_i))| &\geq \left(\frac{\sqrt{7}r(P_j)}{4\rho_j} \right)^{d-1} v_{d-1} \\ &\geq \left(\frac{\sqrt{7}r(P_j)}{8R(P_j)} \right)^{d-1} v_{d-1} \\ &\geq \left(\frac{\sqrt{7}}{8c} \right)^{d-1} v_{d-1} \end{aligned}$$

を得る. 球冠 $B_{r(P_j)}(c_j) \cap S_{\rho_j}(p_i)$ ($1 \leq j \leq t_i$) は, p_i を端点にもち互いに共通部分をもたない t_i 個の凸錐によって分割 (被覆) される. 従って

$$s_{d-1} \geq \sum_{j=1}^{t_i} |g_j(B_{r(P_j)}(c_j) \cap S_{\rho_j}(p_i))| \geq t_i \left(\frac{\sqrt{7}}{8c} \right)^{d-1} v_{d-1}$$

であり, もちろんこれは

$$(5.1) \quad \left(\frac{8c}{\sqrt{7}} \right)^{d-1} \frac{s_{d-1}}{v_{d-1}} \geq t_i$$

に等しい. (5.1) の左辺 (以下 q^* とおく) が c と d にのみ依存することに注意する.

さて一般性を失うことなく、 $r_i = r(P_1)$ と仮定しても構わない。このとき次を示す。

$$(5.2) \quad R(P_j) \leq c^{q^*} R(P_1)$$

実際、 $P_j, P_{j'}$ が $(d-1)$ 次元の面を共有するならば、 $R(P_j) \geq r(P_{j'})$ が成り立つ。

$$cR(P_j) \geq cr(P_{j'}) \geq \frac{R(P_{j'})}{r(P_{j'})} r(P_{j'}) \geq R(P_{j'})$$

なので主張は確かに正しい。

(5.2) より、球体 $(2c^{q^*+1}) \cdot B_{r_i}(p_i)$ は P_1, \dots, P_{t_i} を被覆する。このことは任意の $\alpha \geq 2c^{q^*+1}$ に対してグラフ G_P が α 交差グラフの部分グラフをなすことを示している。□

系 5.4. ([9]). P を \mathbb{R}^d における単体的複体とし、すべての単体のアスペクト比の上界が c であるとする。このとき任意の $\alpha \geq q(c, d)$ に対してグラフ G_P が α 交差グラフの部分グラフとなるような正の実数 $q(c, d)$ が存在する。ただし $q(c, d)$ は c, d のみ依存する関数であり G_P の位数に依らない。

本節の結びに今後の研究課題に触れたい。

問題 5.5. アスペクト比以外の多面体形状評価基準を採用することによって、定理 5.3 の類似を得ることが可能か。

問題 5.6. 素近傍系 B の α 交差グラフは、 α を大きくするにつれて密なグラフに成長し、最終的に位数 $|B|$ の完全グラフになる。例えば B として \mathbb{R}^d の格子点の集合を採用すると、 α 交差グラフの成長過程に何かしらの規則性を見出すことができるか。

篠原-野崎 [11] は、任意の n 頂点グラフ G が \mathbb{R}^{n-1} に 2 距離集合として埋め込み可能であることを証明した。詳細は述べないが、 $0 < \alpha < \beta$ を満たす実数 α, β に対して、隣接 2 頂点間の距離が α で非隣接 2 頂点間の距離が β となるように、 G を \mathbb{R}^{n-1} に埋め込むこともできる。これら基礎論の応用として次の結果を得る。

定理 5.7. G を n 頂点グラフ、 $\alpha \geq 1$ を実数とする。このとき、 G が \mathbb{R}^{n-1} における $(\frac{\alpha}{2} + \epsilon)$ 交差グラフとなるような正の実数 ϵ が存在する。

上の定理は任意のグラフが Miller らの定理に適用されることを保証しており、交差グラフの基礎理論として重要である。一方で応用的側面からは、グラフの埋め込まれる空間の次元は低いほど望ましく、そのような小さな“埋め込み次元”をもつグラフの特徴付けは応用上極めて重要な課題と言えよう。

一般の距離集合としてのグラフの埋め込み問題については幾何の研究者を中心に様々な考察がなされているが、十分に研究が進展している状況とは言えないようである。

REFERENCES

- [1] Y. AJIMA, S. SUMIMOTO, T. SHIMIZU. *Tofu: A 6D Mesh/Torus Interconnect for Exascale Computers*. Computer, **42**(11), (2009), 36–40.
- [2] P.S. ALEKSANDROV. *Combinatorial Topology*. Vol. 1. Graylock Press, Rochester, N. Y., 1956.
- [3] G. AMDAHL. *Validity of the Single Processor Approach to Achieving Large-Scale Computing Capabilities*. AFIPS Conference Proceedings, **30**, 483–485.
- [4] N. ALON, P. SEYMOUR, R. THOMAS. *A separator theorem for graphs with an excluded minor and its applications*. Proc. of the 22th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, ACM, New York, 1990, pp. 293–299.
- [5] J. L. GUSTAFSON. *Reevaluating Amdahl's Law*. Communications of the ACM, **31**(5), (1988), 532–533.

- [6] G. KARYPIS AND V. KUMAR. *A Fast and Highly Quality Multilevel Scheme for Partitioning Irregular Graphs*. SIAM Journal on Scientific Computing, **20**(1), (1999), 359–392.
- [7] R.J. LIPTON, R.E. TARJAN. *A separator theorem for planar graphs*. SIAM J. Appl. Math. **36** (1979), 177–189.
- [8] G.L. MILLER, S.H. TENG, W. THURSTON, S.A. VAVASIS. *Automatic mesh partitioning*. Graph theory and sparse matrix computation, 57–84, IMA Vol. Math. Appl., **56**, Springer, New York, 1993.
- [9] G.L. MILLER, S.H. TENG, W. THURSTON, S.A. VAVASIS. *Geometric separators for finite-element meshes*. SIAM J. Sci. Comput. **19** (1998), 364–386.
- [10] T. NAKASHIMA, M. TSUBOKURA, M. VAZQUEZ, H. OWEN, Y. DOI. *Coupled analysis of unsteady aerodynamics and vehicle motion of a road vehicle in windy conditions*. Computers and Fluids, 2012, in Press.
- [11] H. NOZAKI AND M. SHINOHARA. *A geometrical characterization of strongly regular graphs*. Linear Algebra Appl. **437** (2012), 2587–2600.
- [12] F. PELLEGRINI AND J. ROMAN. *SCOTCH: A Software Package for Static Mapping by Dual Recursive Bipartitioning of Process and Architecture Graphs*. Proceedings of HPCN'96, Brussels, Belgium. LNCS **1067** (1996), 493–498.