

# On some problems related to spherical designs

坂内英一 (Eiichi Bannai)  
上海交通大学 (Shanghai Jiao Tong University)  
(bannai@sjtu.edu.cn and bannai@math.kyushu-u.ac.jp)

## 1 はじめに

この講演では, 田上真さん (新潟工科大) との共同研究である調和指数  $t$  の球面デザインについて最初に話しました. 講演の後, 奥田隆幸さん (東京大学) からこの問題についての新しいアイデアを貰い, 現在坂内-田上-奥田の共同研究としてその後の研究が進展中です. それについても解説を加えたいと思います. 他に Null spherical  $t$ -designs の話と, 坂内悦子との共同研究である almost-tight  $t$ -designs についても講演で簡単に触れました. Spherical  $t$ -designs と組合せ論デザインとの対比という意味も込めて, それらについても少しだけ述べます.

## 2 Spherical $t$ -designs of strength $t$ , index $t$ , and harmonic index $t$

$S^n$  における  $t$ -design の概念は Delsarte-Goethals-Seidel (1977) により定義された. ([5, 2, 3] 等参照.)

### • [球面 design (of strength $t$ ) の定義]

$X \subset S^{n-1} (\subset \mathbb{R}^n)$  が球面  $S^{n-1}$  上の  $t$ -design (Design of strength  $t$ ) であるとは,

$$\frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(x) d\sigma(x) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x) \quad (2.1)$$

がすべての  $f(x) = f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ : 多項式  $\deg(f) \leq t$  に対して成り立つことと定義する, この定義は

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0, \quad \forall f(x) \in \mathbf{Harm}_k(\mathbb{R}^n), \quad \forall k = 1, 2, \dots, t. \quad (2.2)$$

であることと同値である.

ここで,  $\mathbf{Harm}_k(\mathbb{R}^n)$  は次数  $k$  の斉次の調和多項式全体の空間を表す. すなわち,  $\Delta f(x) = 0$ ,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ , を満たす多項式である. また,  $\dim \mathbf{Harm}_k(\mathbb{R}^n) = \binom{n-1+k}{k} -$

$\binom{n+k-3}{k-3}$  である.

注意.  $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$  と重み関数  $w: X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  の組  $(X, w)$  が weighted spherical  $t$ -design (design of strength  $t$ ) であるとは, (あるいは, cubature formula of strength  $t$  であるとは),

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x) d\sigma(x) = \frac{1}{\sum_{x \in X} w(x)} \sum_{x \in X} w(x) f(x) \quad (2.3)$$

がすべての  $f(x) = f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ : 多項式  $\deg(f) \leq t$  に対して成り立つことと定義する, この定義は

$$\sum_{x \in X} w(x) f(x) = 0, \quad \forall f(x) \in \mathbf{Harm}_k(\mathbb{R}^n), \quad \forall k = 1, 2, \dots, t. \quad (2.4)$$

であることと同値である.

• [Fisher 型不等式]

球面  $t$ -デザイン  $X$  あるいは weighted な球面  $t$ -デザイン  $(X, w)$  に対して次の Fisher 型不等式が知られている.

$$\begin{aligned} |X| &\geq \binom{n-1+e}{e} + \binom{n-1+e-1}{e-1} \quad \text{if } t = 2e \\ &\geq 2 \binom{n-1+e}{e} \quad \text{if } t = 2e + 1 \end{aligned}$$

• [Index  $t$  の球面 design の定義]

$X \subset \mathbb{S}^{n-1} (\subset \mathbb{R}^n)$  が球面  $\mathbb{S}^{n-1}$  上の index  $t$  の  $t$ -design (design of index  $t$ ) であるとは, すべての  $f(x) = f(x_0, x_1, \dots, x_n)$ : 次数  $t, t-2, t-4, \dots, 2$  の斉次多項式  $\deg(f) \leq t$  に対して次の式が成り立つことと定義する (ここでは  $t$  は偶数であることを仮定する.), この定義は

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0, \quad \forall f(x) \in \mathbf{Harm}_k(\mathbb{R}^n), \quad \forall k = 2, 4, \dots, t. \quad (2.5)$$

であることと同値である.

Index  $t$  の  $t$ -デザインについては次の Fisher 型不等式が知られている.

$$|X| \geq \binom{n+e}{e}, \quad \text{if } t = 2e. \quad (2.6)$$

注意. 次のことが容易に分かる.

$X$  が index  $2e$  のデザイン  $\iff X \cup (-X)$  が strength  $2e+1$  のデザインである。(厳密には  $X \cap (-X) = \emptyset$  の仮定のもとである.)

次の概念がこの講演の主題である.

- [harmonic index  $t$  の球面 design の定義]

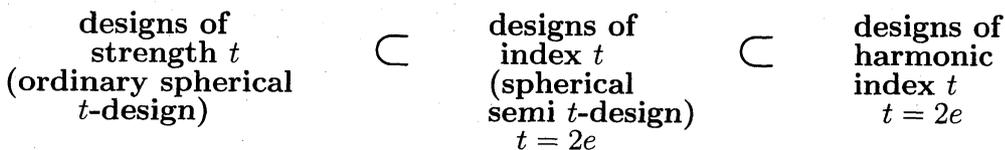
Harmonic index  $t$  のデザインであるとは, 次が成り立つことと定義する.

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0 \quad \text{任意の } f(x) \in \text{Harm}_t(\mathbb{R}^n) \quad (2.7)$$

(ただしここでは通常  $t = 2e$  を仮定している).

ここでの主目的は, harmonic index  $t$  の球面デザイン  $X \subset \mathbb{S}^{n-1}$  の  $|X|$  の下からの bound について考えることである.

以上の関係を図示すると次のようになる.



先で index  $t$  あるいは harmonic index  $t$  の時に  $t$  が偶数であることを仮定した理由は, そのとき任意の  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  に対して  $X = \{x, -x\}$  がその例になっているからである.

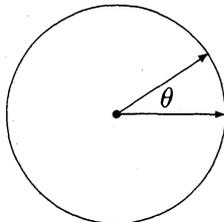
易しい観察

- $t = 2, n = \text{arbitrary}$  と仮定する.

このとき,  $X = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  は design of harmonic index 2 となる. ( $X$  は index 2 の 2-design であることに注意.)

- $n = 2, t = 2e$  (arbitrary) と仮定する.

このとき,  $X = \{v_1, v_2\}$  は design of harmonic index  $2e$  となる. ここで  $v_1, v_2$  は two unit vectors with angle  $\theta = 2\pi(\frac{1}{4e})$  or  $\theta = 2\pi(\frac{\text{odd}}{4e})$  である.



自明でない最初の場合は

$n = 3, t = 4$  ( $t = 2e = 6, 8, 10, \dots$ ) の場合と思われる。

$\{f_{t,i} \mid i = 1, 2, \dots, c_{t,n-1}\}$  を  $\text{Harm}_t(\mathbb{R}^n)$  の正規直交基底とする。ただし  $c_{t,n-1} = \dim \text{Harm}_t(\mathbb{R}^n)$  とする。

次に

$$\Psi(X) = \sum_{i=1}^{c_{t,n-1}} \left( \sum_{x \in X} f_{t,i}(x) \right)^2.$$

と定義する。ここで、 $X$  が  $\mathbb{S}^{n-1}$  の部分集合で  $|X|$  を固定したときの最小値を求めることを問題にする。このとき次が成り立つことは明らかである。

•  $X$  is a design of harmonic index  $t \iff \Psi(X)$  takes the minimum value 0

以下  $A(n, t, M) = \text{Min}_{X \subset \mathbb{S}^{n-1}, |X|=M} \Psi(X)$  と置く。

$n = 3, t = 4$  の場合のコンピューター実験 (田上真氏による)

$$|X| = 2$$

$$|X| = 3$$

$$|X| = 4$$

のとき、数値的には  $A(n, t, M)$  は正の値を取る。実際 0 から十分離れた正の値を取る。(このことから、厳密な証明はしていないが、 $A(n, t, M) > 0$  の厳密な証明も可能である。  $|X| = 2, 3$  の場合には直接にも証明できている。また次の節も参照されたい。)

興味深いのは  $|X| = 5$  の場合である。この時、コンピューター実験 (田上真氏による) により、 $A(3, 4, 5)$  が 0 に非常に近い ( $10^{-20}$  程度の精度で) 値を取る 5 点集合  $X$  が見いだされた。これらの 5 点集合としては、大きさの違う 2 種類の正 5 角形 (と思われる図形) が生じ、さらにその 5 点の内いくつかを原点に関して対称な点で置き換えたような図形も出来た。また次の  $n = 3, t = 6, |X| = 7$  の場合に、数値的に  $A(3, 6, 7) = 0$  となり 3 種類の正 7 角形 (と思われる図形) が得られた。これらの実験結果から次が予想され、さらに厳密な証明が与えられた。

定理 1 (坂内一田上)  $A(3, 2e, 2e+1) = 0$  が成り立つ。さらにこのような図形として、 $e$  種類の大きさの正  $2e+1$  角形が得られる。(さらにその  $2e+1$  点の内いくつかを原点に関して対称な点で置き換えたような図形も  $A(3, 2e, 2e+1) = 0$  を満たす。)

証明の方針

$\mathbb{S}^{n-1}$  上の  $\text{Harm}_t(\mathbb{R}^n)$  の空間の具体的な基底は良く知られており、Gegenbauer 多項式を用いて記述される。(例えば文献 [8] 参照。)

ここでは  $n = 3$  の場合に、 $z$  を Gegenbauer 多項式  $C_{2e}^{\frac{1}{2}}(x)$  の正の零点とする。

$$X = \left\{ \left( z, \sqrt{1-z^2} \cos\left(\frac{2\pi p}{2e+1}\right), \sqrt{1-z^2} \sin\left(\frac{2\pi p}{2e+1}\right) \right) \right\}$$

と  $S^2$  上に正  $2e+1$  角形を置く. ただしここで,  $p = 0, 1, \dots, 2e$ . である.  $t$  が奇数のときは, 上に取った  $\text{Harm}_{2e}(\mathbb{R}^3)$  の基底に対して  $X$  の上での値の和が 0 であることが直ちに証明される.

上の定理から少し easy ではあるが次の予想が得られた.

予想 1:  $X \subset S^2$  が harmonic index  $2e$  であれば,  $|X| \geq 2e+1$  が成り立つのではないか.

予想 2: 上で  $|X| \geq 2e+1$  であれば,  $X$  は上の定理で述べた  $e$  種類の正  $2e+1$  角形 (あるいはその  $2e+1$  点の内のいくつかを原点に関して対称な点で置き換えたような図形) に限られるのではないだろうか.

注意. 上の定理 1 の高次元版も可能である. すなわち  $X_1$  を  $S^{n-2}$  の  $2e$ -デザインとする. 正確には,  $S^{n-2}$  は原点からの距離が  $z$  の  $\mathbb{R}^n$  のおける超平面と  $S^{n-1}$  の共通部分としてとらえる. ここで,  $z$  は Gegenbauer 多項式  $C_{2e}^{\frac{n-2}{2}}(x)$  の ( $e$  個の正の) 零点とする. このとき,  $X_1$  は  $S^{n-1}$  の harmonic index  $2e$  のデザインとなる. (このようにしてサイズ  $|X|$  が一番小さい harmonic index  $t$  のものが得られるのではないかと当初は考えたが甘い予想であった.)

先に述べた予想 1 従って予想 2 も, 実は一般の  $e$  に対しては成り立たない. ( $e=2$  あるいは  $e=3$  の場合などに成り立つかはまだ未解決である. 興味を持たれた方の挑戦を期待したい.)

反例.  $S^2$  における正 20 面体の 12 点の頂点は harmonic index 14 になっている (strength は 11 である). また, その 12 点の半分 (原点に関して対称な 2 点から 1 つずつ選ぶ) の 6 点も harmonic index 14 になっている. 従って,  $A(3, 14, 6) = 0$  がなりたつ. これは定理 1 での主張の  $2e+1 = 15$  に比べるとはるかに小さい.

高次元での上に述べた (甘い) 予想に対する反例もいろいろと存在する. 例えば,  $n=8$  での  $E_8$  型ルートの 240 点 (およびその半分の 120 点) は harmonic index 10 になっている. 一方,  $S^6(\subset S^7)$  の Fisher 不等式による strength  $t$  の  $t$ -デザインの bound は  $\binom{6+5}{5} + \binom{6+4}{4}$  であり 120 よりはるかに大きい. また  $n=4$  での 600-cell の 120 点 (およびその半分の 60 点) は harmonic index 58 になっている. 一方,  $S^2(\subset \mathbb{R}^3)$  の Fisher 不等式による strength  $t$  の  $t$ -デザインの bound は  $\binom{2+29}{29} + \binom{2+28}{28}$  であり 60 よりはるかに大きい.

なお, この linear programming の方法を少しだけ改良すると, 正 20 面体の antipodal half である 6 点は  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  の harmonic index 8 かつ 14 であるものの中で最小頂点数をもつものになっているということを確認できることも注意しておく.

実際, harmonic index  $2e$  の良い Fisher 型の  $|X|$  の下からの bound は一般にはまだ良く分かっていないと言える.

何故 harmonic index  $t$  の場合にこだわるかと言う質問があると思う. もちろん一般には任意の  $\{1, 2, 3, \dots\}$  の部分集合  $T$  に対して harmonic index  $T$  の  $T$ -デザインは定義される. しかし, harmonic index  $t$  の場合がテストケースとして面白く, いろいろな面白い例も存在すると思われるからである. アソシエーションスキームの場合も  $T$ -デザイ

ンの定義は良く知られているが ([4] 参照), また球面上の場合には須田氏の 東北大学学位論文 (2009) に見られるような特別の  $T$  に注目する研究もあるが, harmonic index  $t$  の場合でも  $|X|$  の下限を求めようという具体的な研究はまだあまり成されていなかったと思われる. 従ってその先駆けとしてこの研究を位置付けたいと思う.

### 3 Harmonic index $t$ のデザインに関する Linear Programming methods

数理研での講演に答えて, 奥田隆幸さん (東大) から次のような Linear Programming を harmonic index  $t$  の場合に考えると良いのではないかとの指摘を受けた. 実際非常に有効である. 現在このアイデアを用いて, 坂内一田上-奥田の間で共同研究が進展中である. どこまでこの方向で進展出来るかまだ確定は出来ないが, また最終的にはそれをどこかで報告出来るようになることを期待しているが, 中間報告と言う形でこの進展を記述したいと思う.

$Q_t(x)$  を  $Harm_t(\mathbb{R}^n)$  に付随する  $t$ -次の Gegenbauer 多項式とする.  $Q_t(x)$  は  $Q_t(1) = \dim Harm_t(\mathbb{R}^n) = \binom{n-1+t}{t} - \binom{n-1+t-2}{t-2}$  と正規化されている. 正の実数  $c_{t,n}$  を

$$c_{t,n} = -\text{Min}_{x \in [-1,1]} Q_t(x)$$

で定義する.  $c_{t,n}$  が正になることは直ちにわかる.

定理 2 (奥田)  $X$  が  $S^{n-1}$  の harmonic index of index  $t$  のデザインならば,

$$|X| \geq 1 + \frac{\binom{n-1+t}{t} - \binom{n-1+t-2}{t-2}}{c_{t,n}}$$

が成り立つ.

以下,

$$b_{t,n} = 1 + \frac{\binom{n-1+t}{t} - \binom{n-1+t-2}{t-2}}{c_{t,n}}$$

とおく. この定理の証明の概略は以下の通りである.

変数  $s$  についての多項式  $F(s)$  を

$$F(s) = c_{t,n} + Q_t(s)$$

と置く. このとき,  $c_{t,n}$  の定義から,  $F(s)$  は区間  $[-1, 1]$  で非負の値を取る. このとき

$$\sum_{x,y \in X} F(x \cdot y)$$

を二通りの方法で評価する. ここで  $x \cdot y$  は通常のユークリッド内積である.

$X$  が harmonic index  $t$  であることは,

$$\sum_{x,y \in X} Q_t(x \cdot y) = 0$$

と同値である。従って、

$$\sum_{x,y \in X} F(x \cdot y) = c_{t,n} |X|^2$$

がなりたつ。一方、 $F(s)$  が区間  $[-1, 1]$  で非負であることから、

$$\sum_{x,y \in X} F(x \cdot y) \geq \sum_{x \in X} F(x \cdot x)$$

を得る。従って、 $x \cdot x = 1$  と

$$Q_t(1) = \binom{n-1+t}{t} - \binom{n-1+t-2}{t-2}$$

であることから、

$$c_{t,n} |X|^2 \geq |X| \left\{ c_{t,n} + \binom{n-1+t}{t} - \binom{n-1+t-2}{t-2} \right\}$$

から求める結果を得る。

なお、前の節に述べた「易しい観察」で述べた2つの下限もこの linear programming を用いても得ることが出来ることにも注意しよう。

この定理を用いて、 $b_{t,n}$  の値は与えられた  $t, n$  に対して具体的に計算できる。例えば、 $t = 4$ ,  $3 \leq n \leq 10$  に対しての  $b_{t,n}$  の値は次のようになる。 $b_{4,3} = 3.33\dots$ ,  $b_{4,4} = 5$ ,  $b_{4,5} = 7$ ,  $b_{4,6} = 9.33\dots$ ,  $b_{4,7} = 12$ ,  $b_{4,8} = 15$ ,  $b_{4,9} = 18.33\dots$ ,  $b_{4,10} = 22$  という具合である。

実際、 $b_{4,n} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$  が厳密に示される。 $n$  が 3 の倍数で無いとき、この値は整数になる。 $b_{4,n} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$  を実現する harmonic index 4 の  $S^{n-1}$  のデザインが存在するか否か興味ある問題と思われる。実は  $|X| = b_{4,n} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$  を満たす時、 $X$  の元の内積の集合  $A(X) = \{x \cdot y \mid x, y \in X\}$  に対していろいろな条件が得られ、

$$t = 4, n = 4, |X| = 5,$$

$$t = 4, n = 5, |X| = 7$$

の場合を含め多くの場合に非存在が得られる。定理 2 で等号が成り立つ時にいつも非存在が言えるかどうか、まだ証明は完成していないが、証明出来る可能性は大きいと思われる。(後日報告出来ることを期待する。)

最期にいくつかの未解決な場合を述べて、この節の説明を終えることにする。

問題 1.  $n = 3, t = 4$  の場合、 $|X| = 4$  のものの非存在を厳密に示せ。また、 $|X| = 5$  のものは先の定理に述べたものに限ることは示せるか？(前半は容易の筈であるが、後半は易しくないかもしれない。)

問題 2.  $n = 3, n = 6, 8$  の場合に、 $|X| = 4$  または 5 のものは存在するか？

問題 3.  $n = 8, t = 4, |X| = 15$  のものは存在するか？

## 4 Null $t$ -デザイン

唐突であるが、また最終結果に到達していなくて中途半端のおもむきはあるが、spherical  $t$ -design に対する null  $t$ -design の概念を考察してみたいと思う。Combinatorial  $t$ -design に対する null  $t$ -design の概念は良く知られている。それについては文献 [11, 10, 9] などを参照されたい。

• [球面 null  $t$ -design の定義]

$X \subset \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $|X| < \infty$

$w: X \rightarrow \mathbb{R}_{\neq 0}$  とする。

$(X, w)$  が  $\mathbb{S}^{n-1}$  における null  $t$ -design であるとは、

$$\sum_{x \in X} w(x) f(x) = 0$$

が任意の  $f(x) \in \text{Harm}_i(\mathbb{R}^n)$  with  $i = 0, 1, 2, \dots, t$  にたいして成り立つことと定義する。  
( $i = 0$  にたいしても成り立っていることに注目されたい。)

次の問題を考えたい。

$(X, w)$  が  $\mathbb{S}^{n-1}$  の null  $t$ -design のとき、 $|X|$  の下からの自然な bound はあるか？

結果として次を予想している。

予想.  $|X| \geq 2(t+1)$ , for any  $n \geq 2$  and any  $t$ .

Some results.

(i) For any  $t$  and any  $n \geq 2$ , there are examples of null  $t$ -design  $X$  with  $|X| = 2(t+1)$ .

(ii) For  $n = 2$ , we have succeeded in proving that  $|X| \geq 2(t+1)$ .

注意. There are analogous results for combinatorial null  $t$ -designs (i.e for  $t$ - $(v, k, \lambda)$  designs):

$$|X| \geq 2^{t+1}, \quad (\text{Frankl-Pach, 1983}).$$

## 5 球面 $t$ -デザインと $t$ - $(v, k, \lambda)$ デザインの Fisher 型不等式 に關係する対比

先に述べた spherical  $t$ -design on  $\mathbb{S}^{n-1}$  における Fisher 型不等式の改良はいろいろと知られている。しかし次のことに注意したい。改良は  $n$  を固定し、 $t$  が大きくなるとき、Yudin の結果を含めいろいろと良い改良が得られている。(そのこともあって、Fisher 型 bound は一般に既に時代遅れの bound であると考えている人も多いと思われる。しかし、 $t$  を固定して、 $n$  を大きくするとき、Fisher bound の下限である場合の tight

$t$ -design の非存在を越える改良は全く得られていない。実際, linear programming あるいは semi-definite programming を用いても, この場合に改良の可能性がほとんど無いことも示されている。(Dutour-Sikiric, Schurmann and Vallentin による未発表実験結果。) 一方 tight spherical  $t$ -design は  $t = 4, 5, 7$  を除き完全に分類されている。しかしそれを越える分類は, 例えば tight bound をほんの少し越えた場合も (場合によっては 1 を加えただけの場合も) 未解決である。(  $n$  を固定し,  $t = 2e$  が大きくなるとき.)

一方 combinatorial  $t$ - $(v, k, \lambda)$  ( $t = 2e$  とする) の場合, tight  $2e$ -designs はほとんど存在しないが,  $t \leq 18$  の場合を除くと完全な分類はまだ得られていない。([7, 1, 6] 参照。) ここでは, 次の最近得られた結果を紹介する。

**定理 3 (坂内一坂内)** For each given pair of positive integers  $e$  and  $c$ , there exist only finitely many non-trivial  $2e$ - $(v, k, \lambda)$  designs with the number of blocks equal to  $\binom{v}{e} + c$ . More specifically,

$$v \leq \frac{e^3(e-1)c^3}{2} + 1, \quad \text{if } e \geq 2, \quad ; \text{ and}$$

$$v \leq \frac{c^2(c+1)}{4} + 1, \quad \text{if } e = 1.$$

( $c = 0$  の場合はここに述べた  $v$  の評価は適応されない。この結果は  $c = 0$  の tight な場合には何もわからないが, それとは独立に tight から bound を少しだけ増やした時に分類が可能ということがみそである。)

## References

- [1] E. BANNAI, *On tight  $t$ -designs*, *Quarterly J. Math.* 28 (1977), 433-448.
- [2] E. BANNAI AND E. BANNAI, 球面上の代数的組合せ理論, シュプリンガー・東京 (1999).
- [3] E. BANNAI AND E. BANNAI, *A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres*, *European J. Combin.*, 30 (2009), 1392-1425.
- [4] P. DELSARTE, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, *Philips Res. Rep. Suppl.* 10 (1973).
- [5] P. DELSARTE, J. M. GOETHALS, AND J. J. SEIDEL, *Spherical codes and designs*, *Geom. Dedicata* 6 (1977), 363-388.
- [6] P. DUKES AND SHORT-GERSHMANN, *Nonexistence results for tight block designs*, *J. Alg. Combin.* to appear, arXiv:1110-3464.
- [7] H. ENOMOTO, N. ITO AND R. NODA, *Tight 4-designs*, *Osaka J. Math.* 16 (1979), 39-43.

- [8] A. ERDELYI ET AL., *Higher Transcendental Function, Vol II, (Bateman Manuscript Project)*, MacGraw-Hill, 1953.
- [9] P. FRANKL AND J. PACH, *On the number of sets in a null  $t$ -design*, **Europ. J. Comb.** 4 (1983), 21–23.
- [10] R. L. GRAHAM, S.-Y. R. LI AND W.-C. W. LI, *On the structure of  $t$ -designs*, **SIAM J. Alg. Discrete Math.** 1 (1980), 8–14. 4 (1983), 21–23.
- [11] J. E. GRAVER AND W. B. JURKAT, *The module structure of integral designs*, **J. Combin. Theory Ser. A** 15 (1973), 75–90.