

## 複素領域の境界上における直交多項式展開

公立はこだて未来大学・システム情報科学部 村重 淳 (Sunao Murashige)  
田中 健一郎 (Ken'ichiro Tanaka)

School of Systems Information Science, Future University Hakodate

### 概要

複素平面上の滑らかな Jordan 閉曲線で囲まれた領域で正則な複素関数の級数展開と、その収束性について考える。特に、領域の境界上で直交化した多項式系による級数展開の収束性は、ベキ級数の収束円の考え方を一般化した収束レムニスケートを用いて定量的に評価できることを示す。

### 1 はじめに

本研究では、複素平面の単位円の内側 ( $|z| < 1$ ) で正則な関数  $f(z)$  の近似について考える。単位円上で  $f(z)$  の境界条件が与えられている場合、 $f(z)$  をベキ級数  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  の形に展開し、境界条件をみたすように係数  $c_n$  を決定する方法がしばしば用いられる。無限級数を適当な項数で打ち切ることにより近似解を得ることができるが、誤差や計算の速度は級数の収束性に依存する。ベキ級数の収束性は、単位円の外側にある  $f(z)$  の特異点に支配される。特異点が単位円に近い場合は、収束半径が小さくなるため、級数の収束が遅くなる。

ベキ級数の収束を加速する方法の一つとして、等角写像により特異点を領域から遠ざける方法が考えられる [1][2][3]。このような等角写像で写された複素平面では、領域の境界上で直交化した多項式系を用いた級数展開により、さらに収束を速くすることができる。本研究では、この直交多項式展開の収束性の定量的評価法について考える。

### 2 正則関数 $f(z)$ の例とベキ級数展開

本研究では例として、 $z$  平面の単位円の内側 ( $|z| < 1$ ) で正則な複素関数

$$f(z) = \log(1 + \beta z) \quad (0 < \beta < 1) \quad (1)$$

の級数展開について考える。この  $f$  は単位円の外側の点  $z = -1/\beta$  で特異であることに注意する。(1) は、水深が無限大の水路を一方向に一定速度で進む水波の鉛直断面における 2 次元的運動の近似解を表す [3]。  $\beta$  は波の高さに対応するパラメータで、  $\beta$  の値とともに波の高さが大きくなる。領域の境界 (単位円) が水面に対応し、水波の問題では水面の境界条件をみたす正則関数を求めることが必要になる。

(1) で与えられる  $f$  のべき級数展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (2)$$

の収束半径  $R$  は, Cauchy-Hadamard の公式より係数  $c_n$  と次のような関係がある.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n} = 1/R \quad (3)$$

収束半径  $R$  は原点  $z=0$  から最も近い  $f(z)$  の特異点までの距離と等しいので, (1) に対するべき級数展開 (2) の  $R$  は次式で与えられる.

$$R = 1/\beta \quad (4)$$

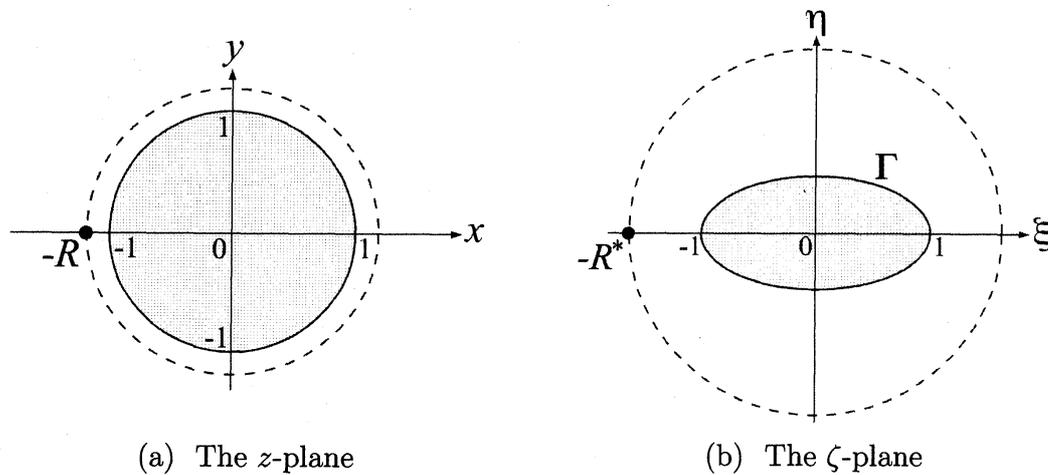


Fig.1 Enlargement of the radius of convergence by conformal mapping from  $z$  to  $\zeta$ . ( $R = 1/\beta$  and  $R^* = 1/\beta^*$ )

### 3 等角写像を用いた収束半径の拡大

Fig.1 のように, 等角写像を用いて領域の外側の特異点を遠ざけることにより, べき級数の収束半径を大きくすることが考えられる. 本研究では,  $z = \pm 1$  を  $\zeta = \pm 1$  に写す等角写像として, 次式のような変換  $T$  を用いた.

$$T(z) = \frac{1}{\beta^*} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2 z^2}}{\beta z} \right) \quad (5)$$

ここで,  $0 < \beta < 1$  で,  $\beta^*$  は次式で与えられる.

$$\beta^* = (1 - \sqrt{1 - \beta^2})/\beta \quad (6)$$

Fig.2 は,  $\beta = 0.4$  のときの  $T$  による変換の様子を表している. この図のように,  $z$  平面上の単位円の内部は  $\zeta$  平面上の閉曲線で囲まれた領域に等角的に写され, (5) の  $T$  の逆

写像  $T^{-1}$  は次式で与えられる.

$$T^{-1}(z) = \frac{1}{\beta} \left( \frac{2\beta^*\zeta}{1 + \beta^{*2}\zeta^2} \right) \quad (7)$$

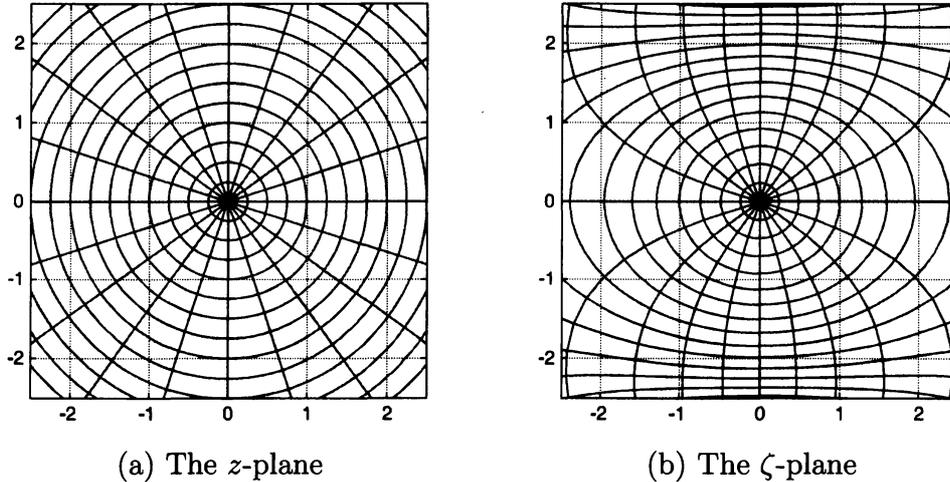


Fig.2 Conformal mapping  $T : z \mapsto \zeta$  for  $\beta = 0.4$ .

(5) と (7) より, (1) で与えられる複素関数  $f(z)$  は  $\zeta = T(z)$  の関数  $\hat{f}(\zeta) = f(T^{-1}(\zeta))$  として次のように変形できる.

$$\hat{f}(\zeta) = f(T^{-1}(z)) = 2 \log(1 + \beta^*\zeta) - \log(1 + \beta^{*2}\zeta^2) \quad (8)$$

したがって, (1) の特異点  $z = z_s = -1/\beta$  は  $\zeta = \zeta_s = -1/\beta^*$  に,  $z = z_\infty = \infty$  は  $\zeta = \zeta_\infty = \pm i(1/\beta^*)$  に写される. その結果, (1) で与えられる複素関数  $f$  の  $\zeta$  平面における特異点  $\zeta = \zeta_s$  と  $\zeta = \zeta_\infty$  の原点  $\zeta = 0$  からの距離  $R^*$  はすべて等しく, 次式で与えられる.

$$R^* = 1/\beta^* = (1 + \sqrt{1 - \beta^2})/\beta \quad (9)$$

このとき,  $\zeta$  平面における (1) のべき級数展開

$$f(z) = f(T^{-1}(\zeta)) = \hat{f}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n \quad (10)$$

の収束半径は  $R^*$  となり,  $z$  平面におけるべき級数 (2) の収束半径  $R$  との比は次式で与えられる.

$$R^*/R = 1 + \sqrt{1 - \beta^2} > 1 \quad (11)$$

したがって, つねに  $R^*/R > 1$  であるので, Cauchy-Hadamard の公式 (3) より, べき級数 (10) の係数  $b_n$  は (2) の係数  $c_n$  より速く減衰する. Fig.3 は, 異なる  $\beta$  の値に対する係数の絶対値  $|b_n|$  と  $|c_n|$  を比較し, (5) の写像  $T$  で写した  $\zeta$  平面におけるべき級数 (10) の係数  $b_n$  の方が速く減衰していることを示している.

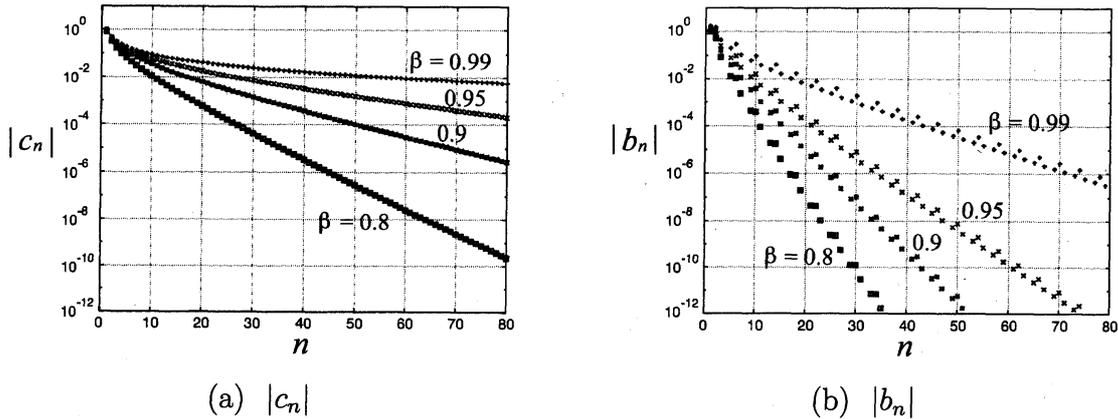


Fig.3 Comparison of decay of the absolute values  $|c_n|$  and  $|b_n|$  of coefficients of the power series  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  and  $\hat{f}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$ .

#### 4 複素領域の境界上の直交多項式展開

##### 4.1 直交多項式系 $\{p_n(\zeta)\}$ による級数展開

Fig.1 のように、領域の境界は (5) の変換  $T$  により、 $\zeta$  平面上の単位円ではない閉曲線  $\Gamma$  に写される。このとき、次のような境界  $\Gamma$  上で直交化された多項式系  $\{p_n(\zeta)\}$  による級数展開は、 $\Gamma$  上の内積  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$  によるノルムに関して最良近似を与える [4, 5].

$$\hat{f}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(\zeta) \quad \text{with } a_n = (\hat{f}, p_n)_{\Gamma} \quad (12)$$

内積  $(\cdot, \cdot)_{\Gamma}$  は、境界  $\Gamma$  を  $\zeta = \lambda e^{i\sigma}$  ( $\lambda = \lambda(\sigma)$ ,  $0 \leq \sigma \leq 2\pi$ ) のように表すことにより、次のように定めることができる。

$$(F, G)_{\Gamma} = \int_0^{2\pi} F(\zeta = \lambda e^{i\sigma}) \overline{G(\zeta = \lambda e^{i\sigma})} d\sigma \quad (13)$$

ここで、 $\overline{G(\zeta)}$  は  $G(\zeta)$  の複素共役を表す。 $(p_m, p_n)_{\Gamma} = \delta_{mn}$  をみたす正規直交多項式系  $\{p_n(\zeta)\}$  は、 $\{1, \zeta, \zeta^2, \dots\}$  に対して Gram-Schmidt の直交化法を適用することにより求めることができる。ただし、コンピュータを用いて Gram-Schmidt の直交化法にしたがい  $\{p_n(\zeta)\}$  を数値的に求めようとするると丸め誤差の影響が大きい。そこで、本研究では、計算方法として修正 Gram-Schmidt 法 (たとえば [6]) を使用し、さらに多倍長演算用ライブラリ `exflib`<sup>1</sup> を用いて有効数字の桁数を 40 に増やすことにより、丸め誤差の軽減を行った。

Fig.4 は、(1) の  $f$  に対する直交多項式展開 (12) の係数  $a_n$ 、 $z$  平面におけるべき級数 (2) の係数  $c_n$ 、 $\zeta$  平面におけるべき級数 (10) の係数  $b_n$  の比較、特にそれぞれの絶対値  $|a_n|$ 、 $|b_n|$ 、 $|c_n|$  の  $n$  の増加にともなう減衰を比較している。直交多項式展開 (12) により、係数の減衰率が大きくなり、級数の収束が加速されていることがわかる。また、Fig.5(a),(b) はそれぞれ Fig.4(a)(b) に対応する領域の境界  $\Gamma$  の形状を表している。

<sup>1</sup><http://www-an.acs.i.kyoto-u.ac.jp/~fujiwara/exflib/> 最終アクセス：2012年12月4日

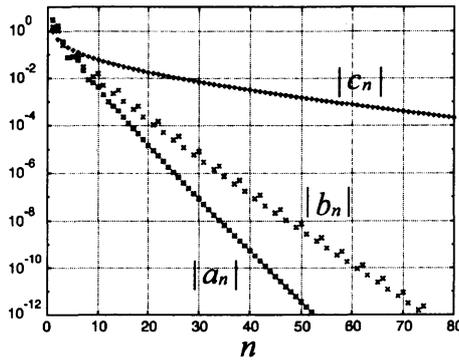
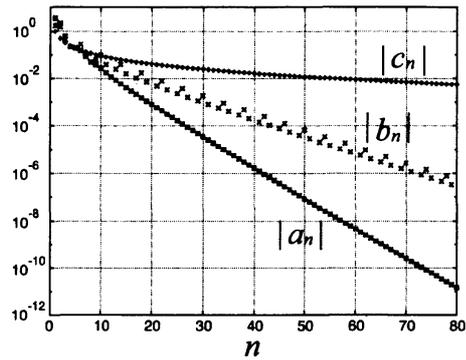
(a)  $\beta = 0.95$ (b)  $\beta = 0.99$ 

Fig.4 Comparison of decay of the absolute values  $|a_n|$ ,  $|b_n|$  and  $|c_n|$  of coefficients in the series expansions  $\hat{f}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(\zeta)$  in (12),  $\hat{f}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$  in (10) and  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  in (2).

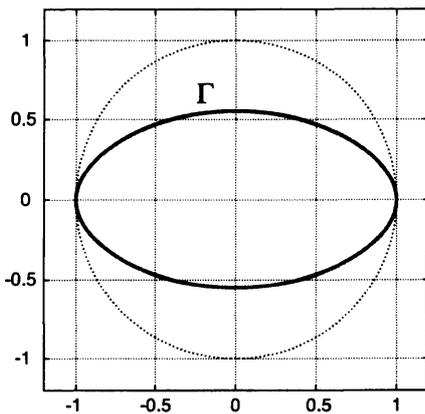
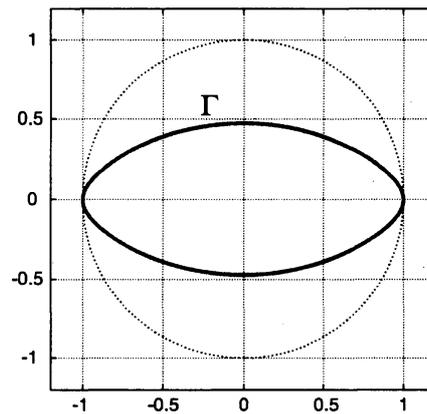
(a)  $\beta = 0.95$ (b)  $\beta = 0.99$ 

Fig.5 Shape of the boundary  $\Gamma$  in the  $\zeta$ -plane

#### 4.2 直交多項式展開の収束性

直交多項式展開 (12) の収束性を考えるために必要な定理を、以下にまとめる。

**定理 1** (Walsh [4], p.65) Fig.6 のように、 $\zeta$  平面の境界  $\Gamma$  の外側の領域を  $Z$  平面の単位円の外側の領域  $|Z| > 1$  に写し、 $\Gamma$  を単位円  $|Z| = 1$  に、 $\zeta = \infty$  を  $Z = \infty$  に写す等角写像  $\Phi: \zeta \mapsto Z$  が存在する。このとき、 $Z$  平面の半径  $\rho (> 1)$  の円  $U_\rho: |Z| = \rho$  は  $\zeta$  平面の  $\Gamma$  の外側の曲線 (レムニスケート)

$$C_\rho: |\Phi(\zeta)| = \rho \quad (14)$$

に対応する。

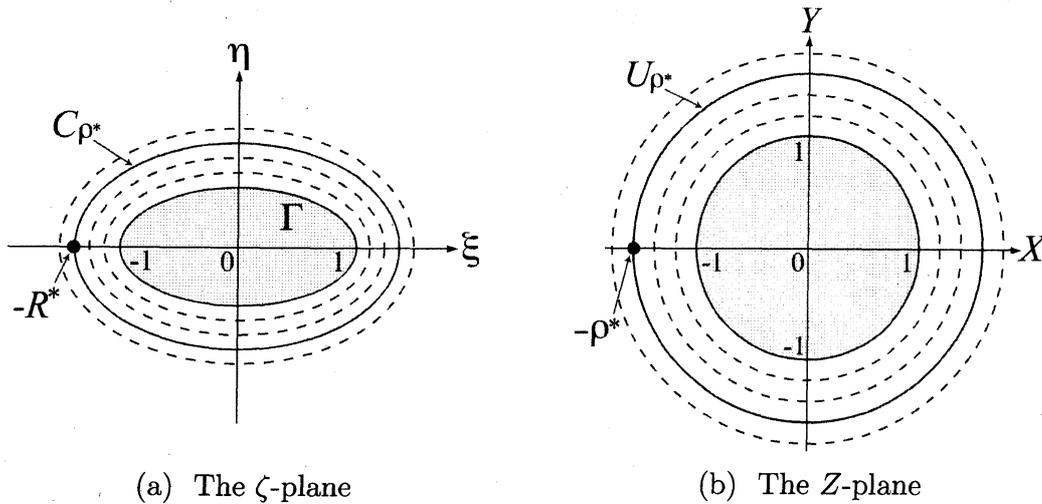


Fig.6 Conformal mapping  $\Phi : \zeta \mapsto Z$ . ( $R^* = 1/\beta^*$ )

**定理 2** (Walsh [4], p.75, p.128, p.131)  $f(\zeta)$  が正則となる  $C_\rho$  の内側の領域を最大にする  $\rho$  を  $\rho^*$  とする (Fig.6 参照). このとき, 直交多項式展開 (12) の係数  $a_n$  に対して, 次の関係が成り立つ.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 1/\rho^* \quad (15)$$

$C_{\rho^*}$  を収束レムニスケートとよぶ. また,  $N$  次近似多項式  $\hat{f}_N(\zeta) = \sum_{n=0}^N a_n p_n(\zeta)$  は  $C_{\rho^*}$  の内部の任意の閉集合上で  $N$  とともに  $\hat{f}(\zeta)$  に一様収束し, 次の関係が成り立つ.

$$\|\hat{f} - \hat{f}_N\|_\Gamma \leq K \frac{1}{\rho^{*N}} \quad (16)$$

ここで,  $\|\cdot\|_\Gamma$  は  $\|F\|_\Gamma = \sqrt{(F, F)_\Gamma}$  で定義されるノルムを表し,  $K$  は定数である.

**定理 3** (Szegő [7], p.372) 境界  $\Gamma$  の外側の  $\zeta$  に対して,  $\Gamma$  上で正規直交化された多項式系  $\{p_n(\zeta)\}$  と (14) の  $\Phi(\zeta)$  の間に, 次の関係が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n(\zeta)}{p_{n-1}(\zeta)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{p_n(\zeta)\}^{1/n} = \Phi(\zeta) \quad (\zeta \text{ exterior to } \Gamma) \quad (17)$$

定理 2 より,  $\rho^*$  を求めることができれば, (15) を用いて (12) の係数  $a_n$  の減衰率と級数の収束性を定量的に評価することができる. 本研究では,  $\rho^*$  を次のようにして求めた. まず,  $\zeta$  平面上の特異点  $\zeta = \zeta_s$  と (14) を用いて,  $\rho^*$  は次のように表すことができる.

$$\rho^* = |\Phi(\zeta_s)| \quad (18)$$

したがって, (17) の  $\zeta$  に  $\zeta_s = -1/\beta^*$  を代入することにより,  $\rho^*$  を十分大きな  $n$  に対する  $|p_n(\zeta_s)/p_{n-1}(\zeta_s)|$  で近似することができる. Fig.7 は  $|p_n(\zeta_s)/p_{n-1}(\zeta_s)|$  が比較的速く収

束していることを表している. Fig.8 は  $n = 80$  に対する  $|p_n(\zeta_s)/p_{n-1}(\zeta_s)|$  を用いて近似的に求めた  $\rho^*$  と,  $z$  平面のベキ級数 (2) の収束半径  $R$ ,  $\zeta$  平面のベキ級数 (10) の収束半径  $R^*$  を比較している. 広範囲の  $\beta$  の値に対して,  $\rho^*$  が最も大きく, 直交多項式展開 (12) による収束が最も速いことがわかる. また, このようにして求めた  $\rho^*$  と (15) から推定される係数  $a_n$  の減衰率は, Fig.4 の計算結果とよく合っていることを確認した.

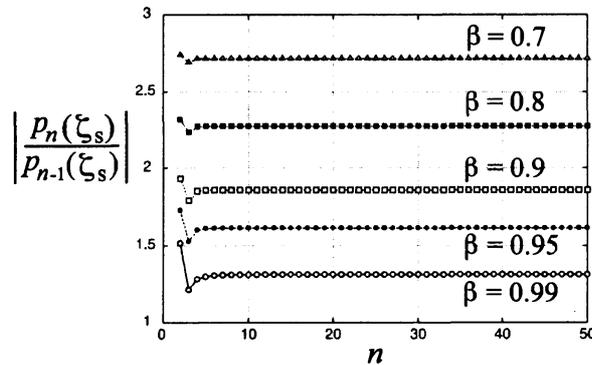


Fig.7 Computed results of  $|p_n(\zeta_s)/p_{n-1}(\zeta_s)|$ . ( $\zeta_s = -1/\beta^* = -R^*$ )

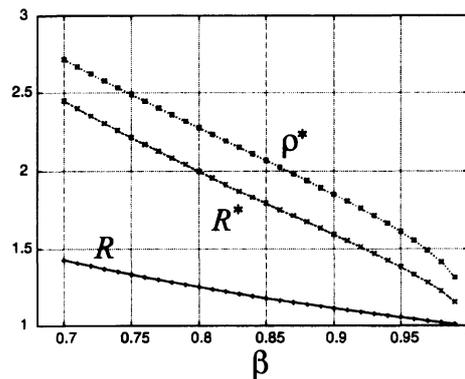


Fig.8 Comparison of  $\rho^*$  of the lemniscate  $C_{\rho^*}$  of convergence with the radius  $R = 1/\beta$  of convergence of (2) and  $R^* = 1/\beta^*$  of (10).

## 5 まとめ

本研究では, Fig.1 (b) のような滑らかな閉曲線  $\Gamma$  で囲まれた領域で正則な関数  $\hat{f}(\zeta)$  の級数展開と, その収束性について考えた.  $\Gamma$  上の境界条件をみたすように  $\hat{f}(\zeta)$  の近似を求める場合, (12) のように  $\Gamma$  上で直交した多項式系  $\{p_n(\zeta)\}$  による級数展開は, ベキ級数と比べて収束が速いことを示した. また, その収束性は, 収束レムニスケート  $C_{\rho^*}$  の考え方 (定理 2) にしたがって, 定量的に評価できることを示した.

## 参考文献

- [1] Mori, M. : Analytic representations suitable for numerical computation of some special functions. *Numer. Math.*, vol.35, pp.163–174, 1980.
- [2] Takahasi, H. and Mori, M. : Analytic continuation of some special functions by variable transformation, *Japan J. Appl. Math.*, vol.1, pp.337–346, 1984.
- [3] Murashige, S. : Numerical use of exterior singularities for computation of gravity waves in shallow water., *J. Eng. Math.*, vol.77, pp.1–18, 2012.
- [4] Walsh, J.L. : Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, 5th ed., American Mathematical Society, Colloquium publications, vol.20, 1969.
- [5] Henrici, P. : Applied and computational complex analysis, vol.3, John Wiley & Sons, 1986.
- [6] Higham, N.J. : Accuracy and stability of numerical algorithms, 2nd ed., SIAM, 2002.
- [7] Szegő, G. : Orthogonal polynomials, 4th ed., American Mathematical Society, Colloquium publications, vol.23, 1975.