数理解析研究所講究録
第1855巻 2013年 115-119

有限グラフ上のランダムウォークの被覆時間について

京都大学理学研究科　阿部圭宏
Yoshihiro Abe
Kyoto University

1 イントロダクション

ランダムグラフ上の対称マルコフ連鎖の研究は近年盛んに行われている．これらの研究の主な着目点は，ランダムグラフの幾何的性質の変化に応じて，その上を動く対称マルコフ連鎖のふるまいがどのように変化するかということである．この好例が Erdős-Rényi random graph である．Erdős-Rényi random graph は次のようにして定義される: N 個の点があり，各2点は確率 p で辺で結ばれているとする．このようにしてできるランダムなグラフが Erdős-Rényi random graph である．このランダムなグラフに対して，次の相転移があることが知られている [8] ([9, section 11.2] も参照): 確率 $p=\frac{c}{N}$ (c は正定数) に対する Erdős-Rényi random graph の最大連結成分の点の総数は，$c>1, c=1, c<1$ それぞれの場合で $\Theta(N), \Theta(N^{2/3}), O(\log N)$ となる．このランダムグラフ上の simple random walk (SRW) の性質の一例として次の事実が知られている [4, 3]: 確率 $p=\frac{c}{N}$ (c は正定数) に対する Erdős-Rényi random graph の最大連結成分上の SRW の被覆時間は，$c>1, c=1$ それぞれの場合で $\Theta(N(\log N)^2), \Theta(N)$ となる ($c<1$ の場合は c が N に依存することを許せば [3] で被覆時間の評価が行われている)．Erdős-Rényi random graph に限らず，木や正方格子などの具体的なグラフ上の SRW の被覆時間の評価は詳しく研究されている [2, 7]．しかし，被覆時間を統一的に研究したものはあまりない．そこで本研究では，一般の有限ランダムグラフ列上の対称マルコフ連鎖に対する被覆時間の評価の特徴づけを行った [1]．この特徴づけは，有限ランダムグラフの4つの幾何的量 (辺の総数，有効抵抗の最大値，packing number, covering number) で与えた．さらにこの特徴づけを応用して，様々なランダムグラフに対する被覆時間を評価した．以下では簡単のために SRW に限定して説明する．

2 被覆時間の定義と既知の事実

有限グラフ $G=(V(G),E(G))$ を考える．点集合を $V(G)$，辺集合を $E(G)$ とする．次の2つの時間を考える (これらの基本的な性質は [12] の Chapter 10, 11 を参照):

- 被覆時間 (cover time): $t_{\mathrm{cov}}(G) := \max_{x\in V(G)} E_x(\max_{y\in V(G)} \tau_y(G))$,
  但し，$\tau_x(G)$ は SRW による点 x への到達時刻とする．

- 最大到達時間 (maximal hitting time): $t_{\mathrm{hit}}(G) := \max_{x,y\in V(G)} E_x\tau_y(G)$.

被覆時間は, SRW がグラフのすべての点を訪れるまでの時間の期待値を表わす. もちろんこの値は SRW の出発点によるが, 被覆時間といえば出発点について最大値をとったものを指すことが多い. 最大到達時間は SRW が一方の点から他方の点を訪れるまでの時間の最大値を表わす. 一般に被覆時間と最大到達時間の間に次のような関係がある:

$$t_{\mathrm{hit}}(G) \le t_{\mathrm{cov}}(G) \le 2 \cdot t_{\mathrm{hit}}(G) \cdot \log |V(G)|, \tag{1}$$

但し, $|V(G)|$ はグラフの点の総数を表わす. 不等式 (1) の左辺は定義から自明である. 不等式 (1) の右辺は Matthews [13] により示された. 不等式 (1) の右辺の $t_{\mathrm{hit}}(G) \cdot \log |V(G)|$ が被覆時間の正しいオーダーとなるグラフの例としては正則な木, 2 次元以上の立方格子上のボックス, 多くの supercritical random graphs などがある. 不等式 (1) の左辺の $t_{\mathrm{hit}}(G)$ が被覆時間の正しいオーダーとなるグラフの例としては, path や多くの critical random graph がある.

被覆時間の研究では有効抵抗 (effective resistance) が重要な役割を果たす. 有効抵抗は次で定義される:

$$R_{\mathrm{eff}}(x,y)^{-1} := \inf\{\mathcal{E}(f,f) : f \in \mathbb{R}^{V(G)}, f(x)=1, f(y)=0\}, x, y \in V(G).$$

但し,

$$\mathcal{E}(f,f) := \frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v \in V(G) \\ \{u,v\} \in E(G)}} (f(u)-f(v))^2, f \in \mathbb{R}^{V(G)}.$$

有効抵抗 $R_{\mathrm{eff}}(x,y)$ の確率論的解釈は次の等式によって与えられる:

$$P_x(\tau_x^+(G) > \tau_y(G)) = \frac{1}{\deg(x) \cdot R_{\mathrm{eff}}(x,y)}, \tag{2}$$

但し, $\tau_x^+(G)$ は時刻 1 以降に SRW が x に到達する時刻, $\deg(x)$ は x の隣の点の総数である. 等式 (2) より, x と y の間の有効抵抗が大きければ大きいほど, SRW が x から出発して再び x に戻る前に y に到達する可能性は低いことが読み取れる. 等式 (2) の証明は, 例えば [12] の Proposition 9.5 を参照. 有効抵抗の具体的な評価例としては, 例えば [12] の Proposition 9.16 が非常に興味深い.

次の commute time identity は, 被覆時間と有効抵抗を結びつける重要な等式である.

Commute time identity ([5], [12, Proposition 10.6]): 任意の $x, y \in V(G)$ に対して,

$$E_x(\tau_y(G)) + E_y(\tau_x(G)) = 2|E(G)|R_{\mathrm{eff}}(x,y),$$

但し, $|E(G)|$ は G の辺の総数.

これより, (1) は辺の総数と $\mathrm{diam}_R(G) := \max_{x,y \in V(G)} R_{\mathrm{eff}}(x,y)$ を用いて次のように書き直すことができる:

$$|E(G)| \cdot \mathrm{diam}_R(G) \le t_{\mathrm{cov}}(G) \le 4|E(G)| \cdot \mathrm{diam}_R(G) \cdot \log |V(G)|.$$

3 packing number と covering number

有限グラフ上の SRW の被覆時間の一般的な特徴づけを以下に定義する packing number と covering number で与える. 有限グラフ $G = (V(G), E(G))$ を考える. 有効抵抗に関するボールを次のように定義する:

$$B_{\mathrm{eff}}(x,r) := \{y \in V(G) : R_{\mathrm{eff}}(x,y) \le r\}.$$

このボールを用いて, covering number と packing number を次のようにそれぞれ定義する:

$$n_{\mathrm{cov}}(G,r) := \min\Big\{m \geq 1:\ \text{ある点 } x_1,\cdots,x_m \in V(G) \text{ が存在して},\ V(G) \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_{\mathrm{eff}}(x_k,r)\Big\},$$

$$n_{\mathrm{pac}}(G,r) := \max\Big\{m \geq 1:\ \text{ある点 } x_1,\cdots,x_m \in V(G) \text{ が存在して},\ B_{\mathrm{eff}}(x_1,r),\cdots,B_{\mathrm{eff}}(x_m,r) \text{ は互いに disjoint}\Big\}.$$

4 結果 1: 被覆時間の特徴づけ

有限連結グラフ $G = (V(G), E(G))$ を考える.

命題 4.1 ([1, Theorem 1.3, 1.4])
(1) ある正定数 $c_1, c_2 > 0$ が存在して,

$$\log\{n_{\mathrm{pac}}(G, c_1 \cdot \mathrm{diam}_R(G))\} \geq c_2 \log|V(G)|$$

が成り立つとする. このとき, ある正定数 $c > 0$ が存在して,

$$c \cdot t_{\mathrm{hit}}(G) \cdot \log|V(G)| \leq t_{\mathrm{cov}}(G) \leq 2 \cdot t_{\mathrm{hit}}(G) \cdot \log|V(G)|.$$

(2) ある正定数 $c_1 > 0$ と $r_0 = \mathrm{diam}_R(G) \geq \cdots \geq r_{k_0-1} > 0 = r_{k_0}$ なる列 $(r_k)_{0\leq k\leq k_0}$ が存在して,

$$\sum_{k=1}^{k_0} \sqrt{r_{k-1}\log\{n_{\mathrm{cov}}(G,r_k)\}} \leq c_1\sqrt{\mathrm{diam}_R(G)}$$

が成り立つとする. このとき, ある正定数 $c > 0$ が存在して,

$$t_{\mathrm{hit}}(G) \leq t_{\mathrm{cov}}(G) \leq c \cdot t_{\mathrm{hit}}(G).$$

注 1: (1) を適用するグラフとしては, 様々な supercritical random graph が挙げられる. グラフ G が木の場合や木を含むグラフの場合, 高さの大きい木を数え上げることで (1) の仮定を確かめることが多い. 例えば [1] の Section 3.1, 3.3 を参照.

注 2: (2) を適用するグラフとしては critical random graph やフラクタルグラフなど複雑なグラフが多い. (2) の仮定を確かめるとき, 半径列として指数的に減少する列をとり, それに対して covering number が高々 (二重) 指数的に増加することを示すことが多い. 例えば [1] の Section 3.5, 3.8 を参照.

注 3: (1) の仮定が hitting time で記述されているものは Matthews [13] が既に示している. (1) はこの仮定を有効抵抗による条件に簡略化できることを表わしている. (2) の仮定の半径列が特別な形の場合のものは [3] で既に示されている. (2) はこの半径列をもっと一般的なものにとれることを表わしている.

注 4: (1), (2) の証明には最近示された cover time と Gaussian free field の関係 [6], 及び Gaussian field の理論 (Sudakov minoration, Dudley's entropy bound) (例えば [11] の Theorem 11.17, [14] の Lemma 2.1.2 を参照) を援用した.

5 結果 2: 具体的なランダムグラフの被覆時間

ここでは主に生存するように条件づけた critical Galton-Watson family tree を具体例として紹介する. 確率過程 $(Z_N)_{N\geq 0}$ は, 次の generating function をもつ critical Galton-Watson process とする:

$$E(s^{Z_1}) = s + (1-s)^{\alpha} L(1-s), s \in (0,1),$$

但し, L は $x \to 0+$ のとき slowly varying で $\alpha \in (1,2]$.
Galton-Watson process $(Z_N)_{N\geq 0}$ に対応する Galton-Watson family tree は確率 1 で有限な木であるが, Kesten はある無限のランダムな木を構成した:

補題 5.1 ([10, Lemma 1.14]) ランダムな木 $\mathcal{T}_{\leq k}$ は, $(Z_N)_{N\geq 0}$ に対応する Galton-Watson family tree の初めの k 世代とする. 任意の k 世代からなる family tree T に対して, 次が成り立つ:

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}(\mathcal{T}_{\leq k} = T | Z_N > 0) = |T_k| \mathrm{P}(\mathcal{T}_{\leq k} = T),$$

但し, $|T_k|$ は T の k 世代目の点の総数. そこで $P_0(T) = |T_k| P(\mathcal{T}_{\leq k} = T)$ とおくと, P_0 は infinite family tree 全体の集合上のある確率測度 $\mathbb{P}$ に一意的に拡張できる.

補題 5.1 の確率測度 $\mathbb{P}$ に従うランダムな木を $\mathcal{T}^*$ と表わし, incipient infinite cluster (IIC) と呼ぶことにする. このランダムな木は, 「幹」, 「枝」, 「部分木」から成る (図 1 を参照). 「幹」は backbone と呼ばれる無限の path である. 「枝」の数が k 本である確率は $(k+1)\mathrm{P}(Z_1 = k+1)$ である. 「部分木」達は, 「幹」と「枝」の条件付けの下では独立で, $(Z_N)_{N\geq 0}$ に対応する Galton-Watson family tree と同じ分布に従う ([10, Lemma 2.2] を参照).

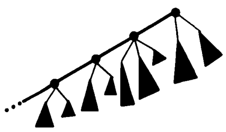

図 1. Kesten が構成した無限のランダムな木 (IIC)

IIC の初めの N 世代を $\mathcal{T}^*_{\leq N}$ と表わすことにする. 次の命題は, $\mathcal{T}^*_{\leq N}$ 上の SRW の被覆時間を評価したものである.

命題 5.1 ([1, Proposition 3.14])
ある正定数 c_1, c_2 が存在して, 十分大きな $\lambda > 0, N \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\Big(\lambda^{-1} N^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}} \ell(N)^{-1} \leq t_{\mathrm{cov}}(\mathcal{T}^*_{\leq N}) \leq \lambda N^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}} \ell(N)^{-1}\Big)\\ &\geq 1 - c_1 \lambda^{-c_2},\end{aligned}$$

但し, $\ell(N)$ は $\mathrm{P}(Z_N > 0) = N^{-\frac{1}{\alpha-1}} \ell(N)$ を満たす, 無限遠点での slowly varying function.

注 1: Z_1 の出生分布が有限の分散を持つ場合は, [2, 3] で被覆時間の評価を行われている. 命題 5.1 はこの結果を Z_1 の出生分布が無限の分散を持つ場合にまで拡張している.
注 2: 証明は命題 4.1 (2) を用いる. 様々なサイズの木を数え上げることで命題 4.1 (2) の仮定を確かめる.

[1] では, supercritical Galton-Watson family tree, 高次元のランダムウォークトレース, シェルピンスキーガスケットグラフの被覆時間の評価も行っている. 最後にそれらの結果を以下の表にまとめておく:

表 1: 本研究で扱ったグラフの幾何的量と被覆時間のオーダー

グラフ	辺の総数	有効抵抗の最大値	被覆時間
Supercritical Galton-Watson family trees	m^N	N	$N^2 m^N$
The IIC for critical Galton-Watson family tree	$N^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\ell(N)^{-1}$	N	$N^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}\ell(N)^{-1}$
The range of random walk in $\mathbb{Z}^d, d \geq 5$	N	N	N^2
Sierpinski gasket graphs	3^N	$\left(\frac{5}{3}\right)^N$	5^N

注: 表 1 の supercritical Galton-Watson family trees の欄に現れる m は出生分布の期待値で 1 より大きいと仮定する.

参考文献

[1] Y. Abe. Cover times for sequences of reversible Markov chains on random graphs. Available at `http://arxiv.org/abs/1206.0398`.

[2] D. J. Aldous, Random walk covering of some special trees. *J. Math. Anal. Appl.* **157** (1991), 271-283.

[3] M. T. Barlow, J. Ding, A. Nachmias, and Y. Peres. The evolution of the cover time. *Combin, Probab. Comput.* **20** (2011), 331-345.

[4] C. Cooper and A. Frieze. The cover time of the giant component of a random graph. *Random Struct. Alg.* **32** (2008), 401-439.

[5] A. K. Chandra, P. Raghavan, W. L. Ruzzo, R. Smolensky and P. Tiwari, The electrical resistance of a graph captures its commute and cover times. *Comput. Complexity.* **6** (1996/1997), 312-340.

[6] J. Ding, J. R. Lee, and Y. Peres. Cover times, blanket times, and majorizing measures. *Ann. of Math.* **175** (2012), 1409-1471.

[7] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen, and O. Zeitouni. Cover times for Brownian motion and random walks in two dimensions. *Ann. of Math.* **160** (2004), 433-464.

[8] P. Erdős and A. Rényi. The evolution of random graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.* **5** (1960), 17-61.

[9] G. Grimmett. *Probability on Graphs.* Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[10] H. Kesten. Subdiffusive behavior of random walk on a random cluster. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **22** (1986), 425-487.

[11] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces,* Springer-Verlag, New York, 1991.

[12] D. A. Levin, Y. Peres, and E. L. Wilmer. *Markov chains and mixing times.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. With a chapter by James G. Propp and David B. Wilson.

[13] P. Matthews. Covering problems for Brownian motion on spheres. *Ann. Probab.* **16** (1988), 189-199.

[14] M. Talagrand. *The generic chaining.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Upper and lower bounds of stochastic processes.