

# 水平方向に往復または楕円運動する直方体容器中の水面波の振る舞い

京都大学大学院・情報学研究科・複雑系科学専攻  
平光亜衣, 船越満明

Ai Hiramitsu and Mitsuaki Funakoshi

Department of Applied Analysis and Complex Dynamical Systems, Graduate School of Informatics,  
Kyoto University

## 1 はじめに

流体の入った容器を水平方向に加振すると, 水面波のあるモードの固有振動数と加振振動数が近い共鳴的加振の場合には, 小さな加振振幅でも大きな振幅の水面波が発生して非線形性の効果が重要となる.

水平の一方向に往復加振する際の水面波の様子は, さまざまな形の容器に対して, 理論的, あるいは実験的に調べられてきた. たとえば Miles<sup>[1]</sup> は, 円筒形容器を水平方向に共鳴的に加振したときに励起される, 同じ振動数を持つ 2 つの水面波モードの複素振幅に対する非線形微分方程式を導出した. そして, この方程式が 2 種類の平衡点の解, 周期軌道の解のほかに, カオス解も持つことを示した. また, Funakoshi と Inoue<sup>[2]</sup> は, Miles と同じ場合について実験を行い, 実験で得られた水面波の減衰係数を用いたときの Miles の方程式の解の振る舞いが, 実験結果とかなりよく合うことを示した. Yoshimatsu と Funakoshi<sup>[3]</sup> は, 水平断面が正方形の直方体容器が水平方向に往復運動する際に生じる, 3 次元水面波について調べた. 彼らは, 無限水深の仮定の下で, 共鳴的に励起される 2 つの水面波モードの複素振幅の非線形時間発展方程式を弱非線形理論を用いて導出した. そして, 側壁と加振方向のなす角度や水面波の線形減衰係数, 水面波の固有振動数と加振振動数のずれなどのパラメータをさまざまに変えながら, この時間発展方程式の解を数値的に求め, 解の分岐が起こるパラメータ値などを細かく調べた.

本研究では, 正方形断面の直方体容器が水平方向に往復運動あるいは反時計回りの楕円運動をするときに共鳴的に励起される有限水深の 3 次元水面波について調べる. その際, 加振振動数は, 最も小さな固有振動数をもつ 2 つの水面波モードの固有振動数に近いと仮定し, 表面張力の効果は無視する. 本研究では, これら 2 つの水面波モードの複素振幅に関する非線形時間発展方程式を導出し, それを数値的に解くことによって水面波の振る舞いを調べるとともに, 得られた水面波の挙動の一部を先行研究の実験結果と比較することを目的とする.

以下の第 2 節では, 逐次摂動法を用い, 線形減衰効果も含ませることにより, 水面波の 2 つのモードの複素振幅に関する非線形時間発展方程式を導出する. 第 3 節では, この方程式の定常解を数値計算で求めた結果について説明したあと, Ikeda ら<sup>[4]</sup> による往復加振での実験結果との比較も行う. 第 4 節はまとめとなっている.

## 2 定式化

### 2.1 モデル方程式の導出

1 辺の長さ  $\pi L$  の正方形断面をもつ直方体容器の中に, 非圧縮性・非粘性流体が入っていると仮定する. この容器が水平方向に往復運動あるいは楕円運動を行うことによって励起される 3 次元の水面波を考える. 流体の運動は渦なしであり, 表面張力の効果は無視できると仮定する. 以下では全ての変数が長さ  $L$  と, 時間  $\sqrt{L/g}$  ( $g$  は重力加速度) によって無次元化されているものとする. まず慣性系のデカルト座標系を  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  とする.  $\tilde{x}, \tilde{y}$  は水平方向座標,  $\tilde{z}$  は鉛直上向き座標である. 慣性系  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  において, 容器の水平方向の変

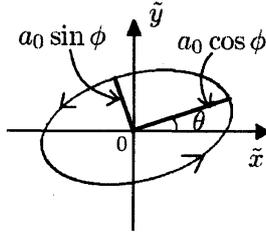


図 1: 容器の変位の楕円軌道

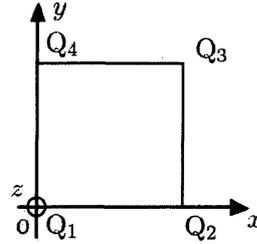


図 2: 容器と加振座標系

位が以下の (2.1) で表されるとする.

$$\begin{cases} \tilde{x} = -a_0(\cos \phi \cos \theta \cos \Omega t - \sin \phi \sin \theta \sin \Omega t), \\ \tilde{y} = -a_0(\cos \phi \sin \theta \cos \Omega t + \sin \phi \cos \theta \sin \Omega t), \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで,  $t$  は時間を表す. また,  $a_0$  は正定数であり, 定数  $\theta$  と  $\phi$  は  $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ ,  $0^\circ \leq \phi \leq 45^\circ$  を満たすとす. この場合の容器は, 図 1 のように, 振動数  $\Omega$  で反時計回りの楕円軌道を描くように変位する.  $\theta$  はこの楕円の長軸と  $\tilde{x}$  軸がなす角度を表す. そして, 楕円の長軸, 短軸の長さは, それぞれ  $2a_0 \cos \phi$ ,  $2a_0 \sin \phi$  である. 次に, 図 2 のような容器に固定した加振座標系  $(x, y, z)$  を導入する.  $x, y$  座標は, 容器の側壁に平行な水平座標であって, 側壁が  $x = 0, \pi$  と  $y = 0, \pi$  となるように選び, 鉛直上向きの  $z$  座標は静止水面が  $z = 0$  となるように選ぶ.

渦なし運動を仮定しているので, 流体速度  $\mathbf{u}$  は速度ポテンシャル  $\Phi(x, y, z, t)$  を用いて  $\mathbf{u} = (\partial_x \Phi, \partial_y \Phi, \partial_z \Phi)$  と表せる. ここで,  $\partial_x = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}$  である (他の偏微分についても同様に表す). 自由表面変位を  $z = \eta(x, y, t)$  と表したとき, ベルヌーイの定理と (2.1) より, 自由表面における力学的条件は, 表面張力を無視すると,

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi + \eta + f(\cos \phi \cos \theta \cos \Omega t - \sin \phi \sin \theta \sin \Omega t)x \\ + f(\cos \phi \sin \theta \cos \Omega t + \sin \phi \cos \theta \sin \Omega t)y + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 = 0, \quad \text{at } z = \eta, \end{aligned} \quad (2.2)$$

となる. ここで,  $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ ,  $f = a_0 \Omega^2$  である. 非圧縮性流体の連続の式は,

$$\text{div} \mathbf{u} = 0,$$

と表せる. この式は, 速度ポテンシャル  $\Phi$  を用いて,

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \text{for } -h \leq z \leq \eta, \quad (2.3)$$

と表される. ここで,  $\nabla^2$  はラプラス演算子であり,  $h$  は無次元化された水深である. また, 自由表面での運動学的条件は,

$$\partial_t \eta - \partial_z \Phi + \partial_x \eta \partial_x \Phi + \partial_y \eta \partial_y \Phi = 0, \quad \text{at } z = \eta, \quad (2.4)$$

と表される. 容器の側壁と底面において流体速度の法線成分が 0 であるという境界条件は,

$$\partial_x \Phi = 0, \quad \text{at } x = 0, \pi, \quad (2.5a)$$

$$\partial_y \Phi = 0, \quad \text{at } y = 0, \pi, \quad (2.5b)$$

$$\partial_z \Phi = 0, \quad \text{at } z = -h, \quad (2.5c)$$

である. (2.3) を境界条件 (2.5) の下で解くと, 水面波の固有モードの速度ポテンシャルは,

$$\Phi = T(t) \cos(mx) \cos(ny) \cosh[\lambda_{m,n}(z+h)] / \cosh[\lambda_{m,n}h],$$

と表される。ここで、 $m, n$  は  $(m, n) \neq (0, 0)$  を満たす 0 以上の整数で、 $\lambda_{m,n} = \sqrt{m^2 + n^2}$  である。以下では、この  $m$  と  $n$  で指定される固有モードを  $(m, n)$  モードと呼ぶことにすると、(2.2), (2.4) を線形化した式より、 $(m, n)$  モードの固有振動数  $\omega_{m,n}$  は、 $\omega_{m,n} = \sqrt{\lambda_{m,n} \tanh(\lambda_{m,n} h)}$  と表せることがわかる。すなわち

$$T(t) = ce^{i\omega_{m,n}t} + \text{c.c.},$$

と表せる。ここで、c.c. はそれより前の全ての項の複素共役を表し、 $c$  は  $(m, n)$  モードの複素振幅を表す。本研究では、加振振動数  $\Omega$  が  $(1, 0)$  モードと  $(0, 1)$  モードの固有振動数  $\sqrt{\tanh h}$  (以下では  $H$  とおく) に近い共鳴的加振の場合を考える。

以下では、逐減摂動法を用いた弱非線形理論によって、共鳴的加振によって励起される水面波の挙動を支配する非線形のモデル方程式の導出を行う。(2.2) の  $\Phi$  を  $z = 0$  のまわりでテイラー展開し、 $\eta, \Phi$  について 4 次以上の項を無視すると、

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi + \eta + f(\cos \phi \cos \theta \cos \Omega t - \sin \phi \sin \theta \sin \Omega t)x + f(\cos \phi \sin \theta \cos \Omega t + \sin \phi \cos \theta \sin \Omega t)y \\ + \eta \partial_z \partial_t \Phi + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{2}\eta^2 \partial_z^2 \partial_t \Phi + \frac{1}{2}\eta \partial_z [(\nabla \Phi)^2] = 0, \quad \text{at } z = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

が得られる。(2.4) も同様に展開すると、

$$\partial_t \eta - \partial_z \Phi - \eta \partial_z^2 \Phi + \partial_x \eta \partial_x \Phi + \partial_y \eta \partial_y \Phi - \frac{1}{2}\eta^2 \partial_z^3 \Phi + \eta \partial_x \eta \partial_z \partial_x \Phi + \eta \partial_y \eta \partial_z \partial_y \Phi = 0, \quad \text{at } z = 0, \quad (2.7)$$

となる。

次に、 $\epsilon$  を  $\epsilon \ll 1$  を満たす正の定数とし、

$$f = \epsilon^3 \pi, \quad (2.8)$$

と仮定する。また、 $\Phi$  と  $\eta$  を  $\epsilon$  を用いて

$$\Phi = \epsilon \Phi_1 + \epsilon^2 \Phi_2 + \epsilon^3 \Phi_3 + \dots, \quad (2.9a)$$

$$\eta = \epsilon \eta_1 + \epsilon^2 \eta_2 + \epsilon^3 \eta_3 + \dots, \quad (2.9b)$$

と展開する。さらに、 $\Omega - H = O(\epsilon^2)$  と仮定し、

$$\Omega = H + \epsilon^2 \delta, \quad (2.10)$$

と表す。また、水面波の振幅や位相の緩やかな時間変化を記述するために、引き伸ばされた時間の変数  $\tau = \epsilon^2 t$  を導入し、 $\Phi$  や  $\eta$  が  $t$  だけでなく  $\tau$  にも依存すると仮定する。

(2.6), (2.7) において  $\partial_t$  を  $\partial_t + \epsilon^2 \partial_\tau$  に置き換えたものに (2.9) を代入し、(2.8), (2.10) を用いると、 $O(\epsilon)$  の項より、

$$\partial_t \Phi_1 + \eta_1 = 0, \quad \text{at } z = 0, \quad (2.11a)$$

$$\partial_t \eta_1 - \partial_z \Phi_1 = 0, \quad \text{at } z = 0, \quad (2.11b)$$

を得る。また、 $O(\epsilon^2)$  の項より、

$$\partial_t \Phi_2 + \eta_2 + \eta_1 \partial_z \partial_t \Phi_1 + \frac{1}{2}(\nabla \Phi_1)^2 = 0, \quad \text{at } z = 0, \quad (2.12a)$$

$$\partial_t \eta_2 - \partial_z \Phi_2 - \eta_1 \partial_z^2 \Phi_1 + \partial_x \eta_1 \partial_x \Phi_1 + \partial_y \eta_1 \partial_y \Phi_1 = 0, \quad \text{at } z = 0, \quad (2.12b)$$

を得る。さらに、 $O(\epsilon^3)$  の項より、

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi_3 + \eta_3 + \partial_\tau \Phi_1 + \pi \{ \cos \phi \cos \theta \cos(t + \delta\tau) - \sin \phi \sin \theta \sin(t + \delta\tau) \} x \\ + \pi \{ \cos \phi \sin \theta \cos(t + \delta\tau) + \sin \phi \cos \theta \sin(t + \delta\tau) \} y + \eta_1 \partial_z \partial_t \Phi_2 \\ + \eta_2 \partial_z \partial_t \Phi_1 + \frac{1}{2}\eta_1^2 \partial_z^2 \partial_t \Phi_1 + \nabla \Phi_1 \cdot \nabla \Phi_2 + \frac{1}{2}\eta_1 \partial_z [(\nabla \Phi_1)^2] = 0, \quad \text{at } z = 0, \end{aligned} \quad (2.13a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \eta_3 - \partial_z \Phi_3 + \partial_\tau \eta_1 - \eta_1 \partial_z^2 \Phi_2 - \eta_2 \partial_z^2 \Phi_1 - \frac{1}{2}\eta_1^2 \partial_z^3 \Phi_1 + \partial_x \eta_1 \partial_x \Phi_2 + \partial_x \eta_2 \partial_x \Phi_1 \\ + \eta_1 \partial_x \eta_1 \partial_z \partial_x \Phi_1 + \partial_y \eta_1 \partial_y \Phi_2 + \partial_y \eta_2 \partial_y \Phi_1 + \eta_1 \partial_y \eta_1 \partial_z \partial_y \Phi_1 = 0, \quad \text{at } z = 0, \end{aligned} \quad (2.13b)$$

を得る. そして, 各  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) に対して, (2.3), (2.5) の  $O(\epsilon^j)$  の項より,

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi_j = 0, & \text{for } -h \leq z \leq \eta, \\ \partial_x \Phi_j = 0, & \text{at } x = 0, \pi, \\ \partial_y \Phi_j = 0, & \text{at } y = 0, \pi, \\ \partial_z \Phi_j = 0, & \text{at } z = -h, \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots), \quad (2.14)$$

を得る.

(2.10) の仮定より, 固有振動数が  $H$  である (1, 0) モードと (0, 1) モードが共鳴的に励起されると期待されるので, (2.11) および (2.14) で  $j = 1$  とした式を満たす解として

$$\Phi_1 = (a(\tau) \cos x e^{iHt} + b(\tau) \cos y e^{iHt}) \cosh(z+h) / \cosh(h) + \text{c.c.}, \quad (2.15a)$$

$$\eta_1 = -iH(a(\tau) \cos x + b(\tau) \cos y) e^{iHt} + \text{c.c.}, \quad (2.15b)$$

を仮定する. ここで,  $a(\tau)$  と  $b(\tau)$  はそれぞれ (1, 0) モードと (0, 1) モードの波の複素振幅を表し,  $\tau$  の関数であるとする.

(2.12) に (2.15) を代入し, (2.14) を用いると,

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & iS_1(a^2 + b^2)e^{2iHt} + \alpha_1(\tau)t + iS_2abe^{2iHt} \cos x \cos y \cosh[\sqrt{2}(z+h)] / \cosh(\sqrt{2}h) \\ & + iS_3a^2e^{2iHt} \cos 2x \cosh[2(z+h)] / \cosh(2h) + iS_3b^2e^{2iHt} \cos 2y \cosh[2(z+h)] / \cosh(2h) + \text{c.c.}, \end{aligned} \quad (2.16a)$$

$$\eta_2 = (S_4abe^{2iHt} + S_5ab^*) \cos x \cos y + (S_6a^2e^{2iHt} + S_7|a|^2) \cos 2x + (S_6b^2e^{2iHt} + S_7|b|^2) \cos 2y + \text{c.c.}, \quad (2.16b)$$

が得られる. ここで,  $\alpha_1(\tau)$  は  $\tau$  のみに依存する関数であり, \* は複素共役を表す. また,  $S_1, \dots, S_7$  は水深  $h$  のみに依存する定数で,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{8H}(3H^4 + 1), \quad S_2 = \frac{2H}{4H^2 - \sqrt{2} \tanh(\sqrt{2}h)}(3H^4 - 1), \quad S_3 = \frac{3H}{4(2H^2 - \tanh(2h))}(H^4 - 1), \\ S_4 &= \frac{H^2}{4H^2 - \sqrt{2} \tanh(\sqrt{2}h)}(3\sqrt{2} \tanh(\sqrt{2}h)H^2 - 4), \quad S_5 = H^4, \\ S_6 &= \frac{1}{4(2H^2 - \tanh(2h))}(3 \tanh(2h)H^4 - 4H^2 - \tanh(2h)), \quad S_7 = \frac{1}{4}(H^4 + 1), \end{aligned}$$

と表せる.

(2.15), (2.16) を (2.13) に代入すると,

$$\partial_t \Phi_3 + \eta_3 = (p_1 \cos x + p_2 \cos y) e^{iHt} + F + \text{c.c.}, \quad \text{at } z = 0, \quad (2.17a)$$

$$\partial_t \eta_3 - \partial_z \Phi_3 = (q_1 \cos x + q_2 \cos y) e^{iHt} + G + \text{c.c.}, \quad \text{at } z = 0, \quad (2.17b)$$

が得られる. ここで,  $p_j, q_j$  ( $j = 1, 2$ ) は

$$\begin{aligned} p_1 &= -\partial_\tau a + 2[\cos \phi \cos \theta + i \sin \phi \sin \theta] e^{i\delta\tau} - i|a|^2 a \left[ \left( \frac{1}{8} + S_7 - \frac{1}{2} S_6 \right) H^3 - S_3 \tanh(2h) H^2 + S_3 \right] \\ &\quad - ia|b|^2 \left[ \frac{1}{2}(S_5 - S_4 - 1)H^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 \tanh(\sqrt{2}h) H^2 + \frac{1}{2} S_2 \right] - ia^* b^2 \left( \frac{1}{2} S_5 + \frac{3}{4} \right) H^3, \\ p_2 &= -\partial_\tau b + 2[\cos \phi \sin \theta - i \sin \phi \cos \theta] e^{i\delta\tau} - i|b|^2 b \left[ \left( \frac{1}{8} + S_7 - \frac{1}{2} S_6 \right) H^3 - S_3 \tanh(2h) H^2 + S_3 \right] \\ &\quad - i|a|^2 a \left[ \frac{1}{2}(S_5 - S_4 - 1)H^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 \tanh(\sqrt{2}h) H^2 + \frac{1}{2} S_2 \right] - ia^2 b^* \left( \frac{1}{2} S_5 + \frac{3}{4} \right) H^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_1 &= iH\partial_\tau a - |a|^2 a \left( -\frac{1}{8}H^4 + S_3H + \frac{1}{2}S_6 + S_7 \right) - a|b|^2 \left( -\frac{1}{2}H^4 + \frac{1}{2}S_2H \right) - a^*b^2 \left( \frac{1}{4}H^4 \right), \\
q_2 &= iH\partial_\tau b - |b|^2 b \left( -\frac{1}{8}H^4 + S_3H + \frac{1}{2}S_6 + S_7 \right) - |a|^2 b \left( -\frac{1}{2}H^4 + \frac{1}{2}S_2H \right) - a^2b^* \left( \frac{1}{4}H^4 \right),
\end{aligned} \tag{2.18}$$

と表される  $\tau$  のみの関数であり  $x, y, t$  には依存しない。また, (2.17) において,  $F, G$  は,  $x, y, t$  に対する依存性が  $e^{iHt} \cos x$  または  $e^{iHt} \cos y$  の形でない項をまとめて表している。なお, (2.17) を得る際には,

$$\cos(Ht + \delta\tau) = \frac{1}{2}e^{iHt}e^{i\delta\tau} + \text{c.c.}, \quad \sin(Ht + \delta\tau) = -\frac{1}{2}e^{iHt}e^{i\delta\tau} + \text{c.c.},$$

であること,  $-\pi \leq x \leq \pi$  での  $|x|$  の Fourier 級数展開が,

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{1}{25} \cos 5x + \dots \right),$$

となることを用いた。さらに,  $e^{iHt}$  に比例し,  $\cos^2 x, \cos^3 x, \sin^2 x, \cos^2 y, \cos^3 y, \sin^2 y$  などに比例する項は, 倍角公式や 3 倍角公式を用いて変形し,  $\cos x$  または  $\cos y$  に比例する項は  $p_j, q_j$  ( $j = 1, 2$ ) に含ませ, それ以外は  $F$  または  $G$  に含ませた。また, (2.14) より,

$$\Phi_3 = \sum_{m,n} Q_{m,n}^{(3)} \cos(mx) \cos(ny) \cosh[\lambda_{m,n}(z+h)] / \cosh(\lambda_{m,n}h), \tag{2.19}$$

と表せる。ここで,  $m, n$  は  $(m, n) \neq (0, 0)$  を満たす 0 以上の整数であり,  $Q_{m,n}^{(3)}$  は  $t$  と  $\tau$  の関数である。(2.17), (2.19) を用いて, (2.17) の右辺第 1 項に対応する特殊解が存在するための条件を求める。 $x, y$  には  $\cos x$  または  $\cos y$  の形で依存しなければならないので, (2.19) において  $(m, n) = (1, 0), (0, 1)$  のみが条件に当てはまる。そこで,  $Q_{1,0}^{(3)} = \hat{\alpha}_1$ ,  $Q_{0,1}^{(3)} = \hat{\alpha}_2$  とおくと,

$$\Phi_3 = (\hat{\alpha}_1 \cos x + \hat{\alpha}_2 \cos y) \cosh(z+h) / \cosh(h), \tag{2.20}$$

となる。 $\eta_3$  も  $\Phi_3$  と同じ  $x, y$  依存性を持つべきなので,

$$\eta_3 = \hat{\beta}_1 \cos x + \hat{\beta}_2 \cos y, \tag{2.21}$$

と表せる。ただし,  $\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j$  ( $j = 1, 2$ ) は  $t$  と  $\tau$  の関数である。(2.17) の右辺第 1 項は  $t$  について  $e^{iHt}$  の形で依存するので, (2.20), (2.21) より,

$$\hat{\alpha}_j = \alpha_j e^{iHt} + \text{c.c.}, \quad \hat{\beta}_j = \beta_j e^{iHt} + \text{c.c.}, \quad (j = 1, 2), \tag{2.22}$$

と表される。ただし,  $\alpha_j, \beta_j$  ( $j = 1, 2$ ) は  $\tau$  の関数である。この  $\alpha_j, \beta_j$  を用いると,  $\Phi_3, \eta_3$  は,

$$\Phi_3 = (\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos y) e^{iHt} \cosh(z+h) / \cosh(h) + \text{c.c.}, \tag{2.23a}$$

$$\eta_3 = (\beta_1 \cos x + \beta_2 \cos y) e^{iHt} + \text{c.c.}, \tag{2.23b}$$

と表される。(2.23) を (2.17) の左辺に代入し, 右辺は第 1 項のみ残すと,

$$iH(\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos y) + \beta_1 \cos x + \beta_2 \cos y = p_1 \cos x + p_2 \cos y, \tag{2.24a}$$

$$iH(\beta_1 \cos x + \beta_2 \cos y) - H^2(\alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos y) = q_1 \cos x + q_2 \cos y, \tag{2.24b}$$

が得られる。この式で,  $\cos x, \cos y$  のそれぞれがかかった項は等しくないといけないので,

$$iH\alpha_j + \beta_j = p_j, \tag{2.25a}$$

$$iH\beta_j - H^2\alpha_j = q_j, \tag{2.25b}$$

が成り立つ ( $j = 1, 2$ ). よって, (2.25) より,

$$iHp_j = q_j, \quad (j = 1, 2), \quad (2.26)$$

が成り立つことが必要である. (2.26) に (2.18) を代入し,  $R_1 = \frac{1}{16H^5}(2H^{12} + 3H^8 + 12H^4 - 9)$ ,  $R_2 = \frac{1}{2}[-H^3 + S_2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}H^2 \tanh(\sqrt{2}h)) - \frac{1}{2}H^3 S_4 + \frac{1}{2}H^3 S_5]$ ,  $R_3 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}H^4)$  とおくと,

$$\partial_\tau a = -iR_1|a|^2 a - iR_2|b|^2 a - iR_3 a^* b^2 + e^{i\delta\tau}(\cos\phi \cos\theta + i \sin\phi \sin\theta), \quad (2.27a)$$

$$\partial_\tau b = -iR_1|b|^2 b - iR_2|a|^2 b - iR_3 a^2 b^* + e^{i\delta\tau}(\cos\phi \sin\theta - i \sin\phi \cos\theta), \quad (2.27b)$$

が得られる. そして,  $a(\tau) = A(\tau)e^{i\delta\tau}$ ,  $b(\tau) = B(\tau)e^{i\delta\tau}$  とおき, さらに水面波の線形減衰の効果を含めると,

$$\frac{dA}{d\tau} = -\alpha A - i\delta A - iR_1|A|^2 A - iR_2|B|^2 A - iR_3 A^* B^2 + \cos\phi \cos\theta + i \sin\phi \sin\theta, \quad (2.28a)$$

$$\frac{dB}{d\tau} = -\alpha B - i\delta B - iR_1|B|^2 B - iR_2 B|A|^2 - iR_3 A^2 B^* + \cos\phi \sin\theta - i \sin\phi \cos\theta, \quad (2.28b)$$

を得る. ここで,  $\alpha$  は線形減衰の係数である. この方程式では, 線形減衰の係数  $\alpha$ , 加振振動数と固有振動数のずれ  $\delta$ , 容器の変位の軌道を表す楕円の長軸と容器の側壁の1つがなす角  $\theta$ , この楕円の長軸, 短軸の長さの比を決める  $\phi$ , 水深  $h$  (定数  $R_1, R_2, R_3$  に含まれる) がパラメータである. (2.28) は, 水深  $h \rightarrow \infty$  で, かつ  $\phi = 0^\circ$  で容器の変位が往復運動の場合には, Yoshimatsu と Funakoshi<sup>[3]</sup> の導いた非線形時間発展方程式と一致する. また, (2.28) の非線形項の係数は, 鉛直加振の場合に Nagata<sup>[5]</sup> が導出したモデル方程式の係数と一致する.

## 2.2 波のパターンの回転

Yoshimatsu と Funakoshi<sup>[3]</sup> と同様に,  $M = \frac{1}{2}(A^* B - AB^*)$  という, 波のパターンの回転と関連した変数を導入する. そして,  $M$  の物理的意味を, Yoshimatsu と Funakoshi の説明に沿って以下に示す.  $a_r = \text{Re}[a]$ ,  $a_i = \text{Im}[a]$ ,  $b_r = \text{Re}[b]$ ,  $b_i = \text{Im}[b]$  とおくと, 自由表面変位の主要項  $\eta_1$  は,

$$\eta_1 = 2(a_r \cos x \sin Ht + a_i \cos x \cos Ht + b_r \cos y \sin Ht + b_i \cos y \cos Ht), \quad (2.29)$$

と表される. (1, 0) モードと (0, 1) モードが重なった水面波において節点となる容器の中心  $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  (点 N とする) の近傍において,

$$\begin{cases} x = r \cos \psi + \frac{\pi}{2}, \\ y = r \sin \psi + \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad |r| \ll 1,$$

によって定義される極座標  $(r, \psi)$  への変換を行う. この極座標を用いると,  $\eta_1$  は,

$$\eta_1 = -2r(a_r \cos \psi \sin Ht + a_i \cos \psi \cos Ht + b_r \sin \psi \sin Ht + b_i \sin \psi \cos Ht),$$

と表せる. そして,  $\eta_1 = 0$  を満たす  $\psi$  を  $\psi_n(t)$  とおくと,

$$\frac{d\psi_n}{dt} = H \frac{M}{(b_r \sin Ht + b_i \cos Ht)^2} \cos^2 \psi_n,$$

となる.  $H > 0$  なので, この式の右辺の符号は  $M$  の符号と等しくなる. これより, 点 N の近傍において節線 ( $\eta_1 = 0$  となる直線) は,  $M > 0$  ならば時間とともに反時計回りに回転し,  $M < 0$  ならば時計回りに回転することがわかる.

また, (2.29) より, すべての時間において,  $\eta_1$  の極大値は図 2 で示される容器の 4 つの角  $Q_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ), または側壁のみで見られる.  $Q_j$  における  $\eta_1$  の値を  $\eta(Q_j)$  とおくと,  $\eta(Q_1) = -\eta(Q_3)$ ,  $\eta(Q_2) = -\eta(Q_4)$  が各  $t$  で成立する.  $\eta(Q_1)$  と  $\eta(Q_2)$  が,

$$\eta(Q_j) = 2I_j \sin(Ht - \psi_j), \quad (j = 1, 2), \quad (I_j > 0), \quad (2.30)$$

と表されるとしたとき,

$$\sin(\psi_2 - \psi_1) = \frac{2}{I_1 I_2} M, \quad (2.31)$$

および  $I_1 = \{|a|^2 + |b|^2 + 2(a_r b_r + a_i b_i)\}^{\frac{1}{2}}$ ,  $I_2 = \{|a|^2 + |b|^2 - 2(a_r b_r + a_i b_i)\}^{\frac{1}{2}}$  が得られる. ゆえに, 容器の4つの角における  $\eta_1$  の値は,  $M > 0$  の場合,  $Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3 \rightarrow Q_4 \rightarrow Q_1 \rightarrow \dots$  のように反時計回りに極大値が順番に現れ,  $M < 0$  の場合は逆の時計回りの順に現れる.  $M = 0$  の場合は,  $\eta_1$  の極大値は対角線上の2つの角, または2つの相対する側壁で交互に現れる.

### 3 結果

#### 3.1 数値計算方法

まず, (2.28) の定常解 (平衡点) を Brent 法を用いた数値計算によって求めた. さらに, 各定常解の安定性を (2.28) のヤコビ行列の固有値に基づいて調べた. すなわち, 固有値の実部がすべて0以下ならば安定, そうでなければ不安定とした.

#### 3.2 $\theta, \phi$ 依存性

$\theta, \phi$  を  $0^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ ,  $0^\circ \leq \phi \leq 45^\circ$  の範囲で変化させ,  $h = \pi L$ ,  $\alpha = 0.3$  のときの定常解とその安定性の  $\theta, \phi$  依存性を調べた. まず  $\phi = 0^\circ$  の往復加振の場合は, 既に Yoshimatsu と Funakoshi<sup>[3]</sup> によって詳しく調べられており, その結果,  $\theta = 0^\circ$  または  $45^\circ$  のときには, 系の対称性から,  $M = 0$  の非回転波に加えて, 水面変位の振幅が同じ値をもつ  $M > 0$  の反時計回りの回転波と  $M < 0$  の時計回りの回転波がペアとなって存在することが分かっていた. そして,  $|\delta|$  が十分大きいときは非回転波のみが見られるが,  $|\delta|$  が小さいときは回転波と非回転波が同時に存在することも分かっていた.  $\phi$  を  $0^\circ$  から大きくして容器の変位を楕円運動にすると, 系の対称性が破れて非回転波は回転波に変わり, また時計回りと反時計回りの回転波は異なる振幅の値をとるようになる. その結果, 定常解の振幅の  $\delta$  依存性を表す振幅曲線は,  $|\delta| \rightarrow \infty$  ままで伸びている非局在ブランチと, 限られた  $\delta$  の範囲でのみ存在する閉曲線である局在ブランチに分かれる. そして, 容器の運動と逆方向の回転波が存在する  $\delta$  の範囲は,  $\phi$  の増加と共に小さくなっていき,  $\phi$  が  $45^\circ$  に近くて容器の変位が円運動に近い場合には, 逆方向回転波に対応する解が見られなくなる.

次に,  $\theta$  が  $0^\circ, 45^\circ$  でない場合には,  $\phi = 0^\circ$  のときでも非回転波は存在せず, 振幅曲線は  $M > 0$  あるいは  $M < 0$  の回転波の非局在ブランチと局在ブランチからなることが分かっていた. そして,  $\phi > 0^\circ$  のときには,  $\theta$  の値によっては, あるブランチ上の回転波の  $M$  の符号が途中で変わることがある.  $\phi$  を十分大きくすると, 全ての  $\delta$  の値に対して  $M > 0$  の安定な回転波が存在するようになる. また,  $\phi$  の増加と共に局在ブランチは小さくなり,  $M < 0$  の時計回りの回転波の存在する  $\delta$  の範囲は狭くなっていき, 十分大きい  $\phi$  では  $M > 0$  の回転波のみが存在する. 定常解が全て  $M > 0$  となる  $\phi$  の値は,  $\theta$  によって異なる.  $\phi = 45^\circ$  では容器の運動は円運動となり,  $\theta$  の値に関係なく同じ  $M > 0$  の回転波が得られる.

#### 3.3 実験との比較

(2.28) の定常解を Ikeda ら<sup>[4]</sup> による実験結果と比較した. 実験では, 水深 60[mm] の流体を入れた 1 辺 100[mm] の正方形断面の直方体容器が, (1, 0), (0, 1) の2つのモードが共鳴的に励起されるように,  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  の3つの振動方向に往復加振される場合 (すなわち  $\phi = 0^\circ$  の場合) が調べられている. また, 水面波の線形減衰率の値も求められている.

この実験条件に対応する  $\theta, \phi, h, \alpha$  の値を用いたときの (2.28) の安定定常解を, この実験における水面変位のデータと比較した結果, 回転波や非回転波の見られる  $\delta$  の範囲や, 波の振幅の大きさはかなり良い一致を示すことが分かった.

## 4 まとめ

正方形断面をもつ直方体容器の中の流体が、(1,0)モードと(0,1)モードの固有振動数に近い振動数で、水平方向に往復運動あるいは反時計回りの楕円運動をするときに共鳴的に励起されるこれらのモードの水面波について、表面張力の効果を見捨てることと仮定して調べた。減衰摂動法を用い、さらに線形減衰効果を含ませて、パラメータとして2つのモードの固有振動数と加振振動数のずれ $\delta$ 、線形減衰係数 $\alpha$ 、楕円運動の長軸と容器の側壁の1つのなす角 $\theta$ 、楕円運動の長軸と短軸の長さの比を決める $\phi$ 、水深 $h$ を含む、(1,0)モードと(0,1)モードの複素振幅に関する非線形時間発展方程式を導いた。

この方程式の定常解を、 $\theta$ 、 $\phi$ の値を変えながら数値的に求め、 $\theta$ 、 $\phi$ に対する依存性を調べた。 $\phi > 0^\circ$ では非回転波は存在せず、回転波の定常解の振幅の $\delta$ 依存性を表す振幅曲線は、 $|\delta| \rightarrow \infty$ まで伸びている非局在ブランチと、限られた $\delta$ の範囲でのみ存在する閉曲線である局在ブランチに分かれる。 $\phi$ を $0^\circ$ から大きくしていくと、局在ブランチは小さくなっていき、容器の運動と逆方向に回る $M < 0$ の回転波の存在する $\delta$ の範囲は狭くなる。十分大きい $\phi$ では定常解は全て容器の運動と同方向に回る $M > 0$ の回転波となり、全ての加振振動数の値に対して、 $M > 0$ の安定な定常解が存在するようになる。定常解が全て $M > 0$ となる $\phi$ の値は、 $\theta$ によって異なる。

数値計算結果を先行研究の実験結果と比較したところ、回転波や非回転波の見られる $\delta$ の範囲や、波の振幅の大きさについて良い一致が見られた。

## 参考文献

- [1] J. W. Miles : Resonantly forced surface waves in a circular cylinder, J. Fluid Mech., Vol. 149 (1984), pp. 15-31.
- [2] M. Funakoshi and S. Inoue : Surface waves due to resonant horizontal oscillation, J. Fluid Mech., Vol. 192 (1988), pp. 219-247.
- [3] K. Yoshimatsu and M. Funakoshi : Surface waves in a square container due to resonant horizontal oscillations, J. Phys. Soc. Jpn., Vol. 70 (2001), pp. 394-406.
- [4] T. Ikeda, R. A. Ibrahim, Y. Harata and T. Kuriyama : Nonlinear liquid sloshing in a square tank subjected to obliquely horizontal excitation, J. Fluid Mech., Vol. 700 (2012), pp. 304-328.
- [5] M. Nagata : Nonlinear Faraday resonance in a box with a square base, J. Fluid Mech., Vol. 209 (1989), pp. 265-284.