数理解析研究所講究録
第 1894 巻 2014 年 53-57

2013 年度冬の LA シンポジウム [S4]

パリティハミルトン閉路問題
Parity Hamiltonian Cycle Problem

西山 宏 Hiroshi Nishiyama　山内 由紀子 Yukiko Yamauchi　来嶋 秀治 Shuji Kijima　山下 雅史 Masafumi Yamashita

九州大学
Kyushu University

1 はじめに

ハミルトン閉路問題は，$\mathcal{NP}$ 完全な問題の代表的なものであり，いくつかの十分条件，必要条件が明らかにされつつも，“良い特徴づけ”の発見には至っていない．本発表では，ハミルトン閉路問題の一つの一般化として，パリティハミルトン閉路問題を導入する．ハミルトン閉路が各頂点を一度ずつ訪問する全域巡回路であるのに対し，パリティハミルトン閉路は各頂点を奇数回訪問する全域巡回路である．パリティハミルトン閉路問題は，このような巡回路の存在性を決定する問題である．

本予稿では，パリティハミルトン閉路問題ならびにその最適化問題について，主にその多項式時間解決可能性，およびアルゴリズムについて考察する．2 章で本予稿で用いる記法や用語，およびパリティハミルトン閉路問題の定義を行う．3 章では制約のない場合のパリティハミルトン閉路問題について議論し，4 章では辺の通過回数に制約をつけた問題について考える．

2 定義

2.1 用語・記法

頂点集合 V，辺集合 E をもつ無向グラフを $G=(V,E)$ で表す．本予稿では連結無向グラフのみを扱うため，連結無向グラフを以下単にグラフと書く．G の部分グラフ H について，その頂点集合と辺集合をそれぞれ $V(H), E(H)$ で表す．グラフ G において頂点 v と隣接している頂点の集合を $N_G(v)$，頂点 v に接続している辺の集合を $\delta_G(v)$ と表す．いずれも考えているグラフ G が明らかである場合は，単に $N(v), \delta(v)$ と表す．グラフ G と頂点 v について，G から頂点 v と v に接続するすべての辺を取り除いてできるグラフを $G-v$ と表記する．

正整数 k と辺集合 E に対し，E の各辺 e を k 個含むような多重集合を kE と書く．このとき，単純グラフ G に対し，$G_k=(V,kE)$ を G の k **重グラフ**と呼ぶ．

2.2 T-join

グラフ $G=(V,E)$ に対し頂点集合 $T\subseteq V$ が与えられたとき，T のすべての頂点の次数が奇数となり，かつその他の頂点の次数がすべて偶数となるような辺の部分集合を **T-join** と呼ぶ．すなわち，辺集合 $J\subseteq E$ に対し $K=(V,J)$ とおくと，

$$d_K(v) \equiv \begin{cases} 1 \pmod 2 & \text{if } v\in T \\ 0 \pmod 2 & \text{if } v\notin T \end{cases} \tag{1}$$

を満たすとき，J は G における T-join である．G に T-join が存在するための必要十分条件は，$|T|$ が偶数であることである．

2.3　パリティハミルトン閉路問題

パリティハミルトン閉路問題とは，入力グラフ G に対し，G の全ての頂点を奇数回訪問する巡回路が存在するかを判定する問題である．そのような巡回路のことを**パリティハミルトン閉路**と呼ぶ．パリティハミルトン閉路では，ハミルトン閉路と異なり，同じ辺を何度通過してもよいとする．辺の通過回数に制限を設けた場合の考察は 4 章で行う．**MAX-パリティハミルトン閉路問題**とは，パリティハミルトン閉路問題を最適化問題の形に直したものである．すなわち，入力グラフ G において，巡回路を構成するとき，奇数回訪問できる頂点の最大個数を求める問題である．奇数回訪問する頂点の個数を最大化する巡回路を **MAX-パリティハミルトン閉路**と呼ぶ．

G 上の巡回路に対し，辺 $e \in E$ を通過する回数を x_e で表す．また，頂点 v の**訪問数**を

$$visit(v) = \frac{1}{2}\sum_{e\in\delta(v)} x_e \tag{2}$$

で定める．

3　制約なしパリティハミルトン閉路問題

本章では，辺の通過回数に制約がない場合のパリティハミルトン閉路問題について考察する．

定理 3.1. (MAX-) パリティハミルトン閉路問題は多項式時間で解ける．

定理 3.1 を示すため，いくつかの補題を示す．

補題 3.2. 任意のグラフ $G = (V, E)$ は $|V| - 1$ 個以上の頂点を奇数回訪問する巡回路をもつ．

証明. $T = V$ とおく．ただし $|T|$ が奇数のときは，適当な頂点 $v \in T$ を選び，T から取り除くとする．G に T-join J を構成し，x_e を

$$x_e \leftarrow \begin{cases} 2 & \text{if } e \in J \\ 4 & \text{if } e \notin J \end{cases}$$

と定めて巡回路を構成する．このようにして作った巡回路は連結であり，かつ T の全ての頂点を奇数回訪問する．すなわち，$|V| - 1$ 個以上の頂点を奇数回訪問する巡回路は必ず存在する．□

補題 3.3. 頂点数が偶数または奇閉路をもつグラフはパリティハミルトン閉路をもつ．

証明. 頂点数が偶数の場合，補題 3.2 における巡回路の構成法から明らか．

頂点数が奇数かつ奇閉路 C をもつグラフを考える．このとき，はじめに C に属すすべての辺 e について $x_e \leftarrow 1$ とする．$T = \{v \in V \mid visit(v) \equiv 0 \pmod 2\}$ とおいて，T-join J を構成し，補題 3.2 と同様に x_e の値を増加させる．すなわち，

$$x_e \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } e \notin J \text{ かつ } e \in E(C) \\ 2 & \text{if } e \in J \text{ かつ } e \notin E(C) \\ 3 & \text{if } e \in J \text{ かつ } e \in E(C) \\ 4 & \text{if } e \notin J \text{ かつ } e \notin E(C) \end{cases}$$

とする．この巡回路は連結かつ全ての頂点を奇数回訪問する．□

補題 3.4. 頂点数が奇数の二部グラフはパリティハミルトン閉路をもたない．

証明. $G = (V, E)$ を頂点数が奇数の二部グラフとする．G がパリティハミルトン閉路をもつと仮定すると，

$$\sum_{v\in V} visit(v) \equiv \sum_{v\in V} 1 \equiv |V| \equiv 1 \pmod 2 \tag{3}$$

が成り立つ．一方，G は二部グラフであるから，V の二部分割を A, B とすると，

$$\sum_{v\in A} visit(v) = \sum_{v\in B} visit(v). \tag{4}$$

(4) より，

$$\begin{aligned}\sum_{v\in V} visit(v) &= \sum_{v\in A} visit(v) + \sum_{v\in B} visit(v) \\ &= 2\sum_{v\in A} visit(v) \equiv 0 \pmod 2.\end{aligned} \tag{5}$$

これは (3) と矛盾するため，G はパリティハミルトン閉路をもたない． □

MAX-パリティハミルトン閉路の構成アルゴリズムをアルゴリズム 3.1 に示す．

Algorithm 3.1 MAX-パリティハミルトン閉路の構成

```
/* 初期化 */
for all e ∈ E do
  x_e ← 0
end for
/* |V| が奇数かつ G に奇閉路があるならば奇閉路を一周 */
if |V| が奇数 and G に奇閉路 C が存在 then
  for all e ∈ E(C) do
    x_e ← 1
  end for
end if
T ← {v ∈ V | visit(v) が偶数 }
if |T| が奇数 then
  v ∈ T を選び T ← T \ {v}
end if
/* 訪問数が偶数の頂点間に往復路を追加 */
T-join J を構成
for all e ∈ J do
  x_e ← x_e + 2
end for
/* 巡回路を連結にする */
for all e ∈ E do
  if x_e = 0 then
    x_e ← 4
  end if
end for
各 e ∈ E を x_e 回通過する Euler 閉路を構成
```

定理 3.1 の証明．アルゴリズム 3.1 が多項式時間で終了することを示せば十分．頂点数の偶奇および奇閉路の存在性の判定，T-join の構成はすべて $O(|V|+|E|)$ 時間で可能である．また，Euler 閉路の構成（向き付け）は Fleury のアルゴリズム [3] によって多項式時間で行える． □

4 辺を通る回数に制約の付いたパリティハミルトン閉路問題

本章では，辺の通過回数に制約のついたパリティハミルトン閉路問題について考察する．すなわち，辺の通過回数の上限 k を定め，

$$x_e \leq k, \text{ for all } e \in E \tag{6}$$

を満たすような巡回路のみを許す．

定理 4.1. $k \geq 4$ のとき，パリティハミルトン閉路問題は多項式時間で解ける．

証明．アルゴリズム 3.1 が多項式時間で終了することから明らか． □

定理 4.2. $k = 1$ のとき，パリティハミルトン閉路問題は $\mathcal{NP}$ 完全．

証明．最大次数が 3 以下のグラフにおいては，$k = 1$ でのパリティハミルトン閉路問題はハミルトン閉路問題と等価である．[1] によると，平面的 3-辺連結 3-正則グラフにおけるハミルトン閉路問題は $\mathcal{NP}$ 完全である．したがって，$k = 1$ のパリティハミルトン閉路問題も $\mathcal{NP}$ 完全である． □

4.1 modulo factor

パリティハミルトン閉路は，グラフの全ての頂点 v について $\sum_{e \in \delta_G(v)} x_e \equiv 2 \pmod 4$ を満たす連結な辺集合と見なせる．言い換えれば，パリティハミルトン閉路問題とは，$f\colon V \to \{0,1,2,3\}$ が $f(v) = 2$ for all $v \in V$ であるとき，G の k 重グラフ G_k において

$$\forall v \in V, \quad |\delta_{G_k}(v) \cap F| \equiv f(v) \pmod 4 \tag{7}$$

を満たす連結な辺集合 $F \subseteq E(G_k)$ の存在性を判定する問題と言える．この f を一般化したときに，式

(7) を満たすような辺集合を，G の **modulo factor** として定義する．

定義 4.3 (modulo factor)**.** グラフ $G=(V,E)$ と $f\colon V\to\{0,1,\ldots,d-1\}$ に対して，辺部分集合 $F\subseteq E$ が

$$\forall v\in V,\quad |\delta_G(v)\cap F|\equiv f(v)\pmod d \tag{8}$$

を満たすとき，F を G の **mod** d f**-factor** と呼ぶ．

定義 4.4 (万能性)**.** グラフ G 上において，任意の $f\colon V\to\{0,1,\ldots,d-1\}$（ただし d が偶数のときは $\sum_{v\in V}f(v)\equiv 0\pmod 2$ を満たすものに限る）に対して連結 mod d f-factor が存在するとき，グラフ $G=(V,E)$ は mod d で**万能**であるという．

補題 4.5. G が mod 4 で万能ならば G は $k=1$ でパリティハミルトン閉路をもつ．

証明. G が万能であることから，G は

$$f(v)=2,\ \forall v\in V$$

なる f に対する連結 mod 4 f-factor をもつ．そのような factor は全頂点を奇数回訪問する巡回路を与える． □

以下，$k=3$ のもとで，G_3 の万能性について考察する．すなわち，G_3 が mod 4 で万能であれば，G は $k=3$ でパリティハミルトン閉路をもつ．

補題 4.6. $G=K_3$ のとき，G_3 は mod 4 で万能である．

証明. 実際に全ての f に対して連結 mod 4 f-factor が作れることを確認すればよい． □

補題 4.7. G_3 が mod 4 で万能であるとする．このとき，G に長さ 7 以下の耳を加えたグラフ G' について，G'_3 も mod 4 で万能である．

証明. 計算機実験によって確かめられる．すなわち，長さ 7 以下の耳 $P=e_0v_1e_1v_2e_2\ldots v_le_l(l\le 6)$ に対するすべての $f\colon V(P)\to\{0,1,2,3\}$ に対して，

$$x_{e_{i-1}}+x_{e_i}\equiv f(v_i)\pmod 4\ (1\le i\le l)$$

かつ $x_{e_i}=0$ となるような i が高々1個しか存在しないような $x_{e_1},x_{e_2},\ldots,x_{e_l}$ が存在することを確かめればよい． □

定理 4.8. G が次の条件を満たす耳分解をもつとき，G_3 は mod 4 で万能である．

- 全ての耳の長さが 7 以下である．
- 最後の耳が K_3 である．

証明. 補題4.6，4.7 より明らか． □

定理 4.9. $G=(V,E)$ が 2-辺連結弦グラフのとき，G_3 は mod 4 で万能である．

証明. 証明略． □

2-辺連結弦グラフに対する $k=3$ でのパリティハミルトン閉路の構成アルゴリズムをアルゴリズム 4.1 に示す．

定理 4.10. $G=(V,E)$ が 2-辺連結 P_4-free グラフかつ G が奇閉路をもつとき，G_3 は mod 4 で万能である．

証明. 証明略． □

5 まとめと今後の課題

本予稿では，パリティハミルトン閉路問題を導入し，その計算量とアルゴリズム，またパリティハミルトン閉路が存在するための条件について考察を行った．また，modulo factor と万能性の概念を導入し，mod 4 においてグラフが万能であるための十分条件について考察した．

今後の課題としては，辺の通過回数に制約を設けた問題において，$k=2,3$ での時間計算量の考察が挙げられる．また，Jump System[2] 等の代数構造を用いた最適化についても考えていきたい．

Algorithm 4.1 2-辺連結弦グラフにおける $k = 3$ でのパリティハミルトン閉路の構成

/* 初期化 */
for all $e \in E$ **do**
  $x_e \leftarrow 0$
end for
$H \leftarrow G$
完全消去列 $v_1, v_2, \ldots, v_n$ を見つける
for $i = 1$ **to** $n - 3$ **do**
  $U \leftarrow N_H(v_i)$
  $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ とする
  $x_{v_i u_1} \leftarrow 2$
  if $\sum_{e \in \delta_G(v_i)} x_e \equiv 0 \pmod 4$ **then**
    $x_{v_i u_2} \leftarrow 2$
  end if
  $H \leftarrow H - v_i$
end for
三角形 $v_{n-2}v_{n-1}v_n$ において，$\sum_{e \in \delta_G(v_i)} x_e \equiv 2 \pmod 4$ $(i = n-2, n-1, n)$ かつ $x_{v_{n-2}v_{n-1}}, x_{v_{n-1}v_n}, x_{v_n v_{n-2}}$ のうち 0 となるものが高々1個となるように $x_{v_{n-2}v_{n-1}}, x_{v_{n-1}v_n}, x_{v_n v_{n-2}}$ の値を決める

参考文献

[1] M. R. Garey, D. S. Johnson, R. E. Tarjan, "The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete," SIAM Journal on Computing, 5(4), 704–714, 1976.

[2] Y. Kobayashi, K. Takazawa: "Even factors, jump systems, and discrete convexity," Journal of Combinatorial Theory B, 99(2009), 139–161.

[3] L. Lesniak, O. R. Oellermann, "An Eulerian Exposition, " Journal of Graph Theory, 100(1), 277–297, 1986.