数理解析研究所講究録
第 1898 巻 2014 年 146-155

Eulerの二重ゼータ関数の二乗平均値について

名古屋大学多元数理科学研究科　池田創一　松岡謙晶　永田義一
Soichi Ikeda, Kaneaki Matsuoka and Yoshikazu Nagata
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

概要

第一章で Euler の二重ゼータ関数について平均値の先行研究を中心に簡単に述べる。第二章で我々の主結果を述べる。第三章で証明の概略と先行研究の証明の手法との比較を述べる。第四章で主結果から考察されることを述べる。最後に、発表時に得られていなかった定理の改良が一部出来たので、最後に報告する。なお、本研究の内容は [3] に基づくものである。

1 導入

$s_1=\sigma_1+it_1$, $s_2=\sigma_2+it_2$ を複素数とする。Euler の二重ゼータ関数 $\zeta_2(s_1,s_2)$ を絶対収束する領域 ($\sigma_1+\sigma_2>2$ かつ $\sigma_2>1$) において

$$\zeta_2(s_1,s_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^{s_2}}$$

と定義する。Euler により絶対収束領域における整数点の公式である和公式と呼ばれる式などが示されているが、この時点での興味は整数点におけるいくつかの公式だけであったと思われる。Atkinson [2] は Euler の二重ゼータ関数を二変数の複素関数と見て、部分的な解析接続を行い Riemann ゼータ関数の 2 乗平均の誤差項の問題に応用した。その後、Akiyama, Egami and Tanigawa [1] および Zhao [12] によって一般の Euler-Zagier 型の多重ゼータ関数の解析接続が証明された。二重ゼータ関数の特異点は

$$\{(s_1,s_2)\in\mathbb{C}^2 \mid s_2=1, s_1+s_2\in\{2,1,0,-2,-4,-6,\dots\}\}$$

であり、それ以外の場所では正則である。解析接続の証明以降、Euler の二重ゼータ関数の解析的な挙動の研究が行われた。例えば、整数点における挙動は Ishikawa and Matsumoto [4] らにより解析され、関数等式は Matsumoto [8] により証明されて

いる[1]。また、一般の複素変数に対して $|\zeta_2(s_1,s_2)|$ の大きさが、Kiuchi and Tanigawa [5] および Kiuchi, Tanigawa and Zhai [6] により解析されている。最近、Matsumoto and Tsumura [9] により Euler の二重ゼータ関数の平均値が初めて考察された。平均値を考察する意義は色々あるが、平均的な関数の挙動をある程度正確に追跡できるという利点がある。よく知られているように $1/2 \leq \sigma \leq 1$ における $|\zeta(\sigma+it)|$ の評価を求める場合には、指数和の理論などを使うが期待される評価まで改善することは非常に難しい。一方で平均値を考えると、$\sigma > 1/2$ において

$$\int_2^T |\zeta(\sigma+it)|^2 dt = \zeta(2\sigma)T + O(T^{2-2\sigma_2})$$

であることは容易に導かれる。また、$\sigma = 1/2$ においても

$$\int_2^T |\zeta(1/2+it)|^2 dt = T\log T + O(T)$$

がよく知られている。このように Riemann ゼータ関数の平均値については漸近公式まで求めることが出来るのである。

Euler の二重ゼータ関数の絶対値の大きさは、上述の Kiuchi and Tanigawa [5] および Kiuchi, Tanigawa and Zhai [6] により解析されている。s_1 や s_2 がある条件を満たす場合は上述の論文で $|\zeta_2(s_1,s_2)|$ のオーダーが決定されているが、一般の場合については期待されるオーダーまで評価することは Riemann ゼータ関数の場合と同様に非常に難しいと思われる。Euler の二重ゼータ関数の調和積により

$$\zeta(s)^2 = \zeta(2s) + 2\zeta_2(s,s)$$

となるので、Euler の二重ゼータ関数のオーダー評価の問題はある意味で Riemann ゼータ関数のオーダー評価の問題を含んでいる。このような考察からも Euler の二重ゼータ関数のオーダー評価の難しさが分かると言える。なお、Euler の二重ゼータ関数のオーダーに関する予想については Kiuchi and Tanigawa [5] および Kiuchi, Tanigawa and Zhai [6] を参照。

Matsumoto and Tsumura [9] の結果を述べる。

$$I^{[2]}(T) = \int_2^T |\zeta_2(s_1,s_2)|^2 dt_2$$

および

$$\zeta_2^{[2]}(s_1,\sigma_2) = \sum_{n=2}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m^{s_1}}\right|^2\frac{1}{n^{\sigma_2}}$$

とする。この時、

$$I^{[2]}(T) \sim \zeta_2^{[2]}(s_1,2\sigma_2)T$$

が次の領域で成り立つことを示している。

[1]ただし Matsumoto [8] の式は Riemann ゼータ関数の関数等式とは少しタイプの違う式である。

1. $\sigma_1 > 1$ かつ $\sigma_2 > 1$ (Theorem 1.1 [9])

2. $\sigma_1 + \sigma_2 > 2$ and $1/2 < \sigma_2 \leq 1$ (Theorem 1.2 [9])

3. $1/2 < \sigma_1 < 3/2$ かつ $1/2 < \sigma_2 \leq 1$ かつ $3/2 < \sigma_1 + \sigma_2 \leq 2$ (Theorem 1.3 [9])

Matsumoto and Tsumura [9] の主結果は上の結果よりも強い漸近式を示しているが、誤差項の場合分けなどがやや複雑なので紙数の関係上ここでは述べないことにする。Matsumoto and Tsumura [9] は $\sigma_1 + \sigma_2 = 3/2$ が Riemann ゼータ関数の臨界線と類似しているのではないかという予想を述べている (Matsumoto and Tsumura [9] の Remark 1.6)。Riemann ゼータ関数の臨界線は関数等式の折り返し線、零点分布など色々な意味を持っているので何を持って「類似」と言うかは難しいが、$\sigma_1+\sigma_2 = 3/2$ で少なくとも何らかの解析的な挙動の変化があるという予想と言える。この予想を支持する根拠として Matsumoto and Tsumura [9] は $\zeta_2^{[2]}(s_1, 2\sigma_2)$ を $\sigma_1+\sigma_2 = 3/2$ に近づけると発散することを挙げている。これは Riemann ゼータ関数の二乗平均値において $\zeta(2\sigma)$ が $\sigma = 1/2$ に近づけると発散し、実際に $\sigma = 1/2$ において解析的な挙動が変化していることが分かる。したがって Riemann ゼータ関数と同様に考えるならば Euler の二重ゼータ関数も $\sigma_1 + \sigma_2 = 3/2$ で挙動が変化するのではないかと予想されるのである。しかし、この推測は t_2 で積分した場合に限ったものである。つまり、Euler の二重ゼータ関数は二変数の複素関数であり解析的な挙動は 2 つの変数に大きく依存すると推測される。このような背景から我々は Euler の二重ゼータ関数の解析的な挙動を理解するために、1 つの変数に関するだけではなく色々な種類の積分の挙動を考察した。

2 主定理

我々は Matsumoto and Tsumura [9] が扱っている平均値を含めて、次の 3 つの平均値を考察した。定理 2.1 は t_1 を変数としたときの積分である。定理 2.2 は Matsumoto and Tsumura [9] が扱っている平均値であり、Matsumoto and Tsumura [9] の主定理 Theorem 1.1, Theorem 1.2, Theorem 1.3 を全て含んでいる。また、解析的な挙動が変化すると予想されていた $\sigma_1 + \sigma_2 = 3/2$ および $\sigma_2 = 1/2$ における平均値の解析も行った。定理 2.3 は $s_1 = \sigma_1 + it$ および $s_2 = \sigma_2 + it$ と虚部を一定にして t に対して積分したものである。定理で扱っている領域は後の図を参照していただきたい。

定理 2.1.

$$I^{[1]}(T) = \int_2^T |\zeta_2(s_1, s_2)|^2 dt_1$$

および

$$\zeta_2^{[1]}(\sigma_1, s_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\sigma_1}} \left| \zeta(s_2) - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{s_2}} \right|^2$$

とする。ここで積分路は、特異点を通らないものとする。
$\sigma_1+\sigma_2>2$ ならば
$$I^{[1]}(T)=\zeta_2^{[1]}(2\sigma_1,s_2)+O(1)$$
であり、$3/2<\sigma_1+\sigma_2\le 2$ ならば
$$I^{[1]}(T)=\zeta_2^{[1]}(2\sigma_1,s_2)T+\begin{cases}O(T^{4-2\sigma_1-2\sigma_2}) & (3/2<\sigma_1+\sigma_2<2)\\ O((\log T)^2) & (\sigma_1+\sigma_2=2)\end{cases}$$
であり、$\sigma_1+\sigma_2=3/2$ ならば
$$I^{[1]}(T)=|s_2-1|^{-2}T\log T+O(T)$$
である。ここで O 定数は s_2 および σ_1 に依存する。

定理 2.2.
$$I^{[2]}(T)=\int_2^T|\zeta_2(s_1,s_2)|^2dt_2$$
および
$$\zeta_2^{[2]}(s_1,\sigma_2)=\sum_{n=2}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m^{s_1}}\right|^2\frac{1}{n^{\sigma_2}}$$
とする。ここで積分路は、特異点を通らないものとする。
$\sigma_2>1$ かつ $\sigma_1+\sigma_2>2$ ならば
$$I^{[2]}(T)=\zeta_2^{[2]}(s_1,2\sigma_2)T+O(1)$$
であり、$\sigma_1>1$ かつ $1/2<\sigma_2\le 1$ ならば
$$I^{[2]}(T)=\zeta_2^{[2]}(s_1,2\sigma_2)T+\begin{cases}O(T^{2-2\sigma_2}) & (\sigma_2\ne 1)\\ O((\log T)^2) & (\sigma_2=1)\end{cases}$$
であり、 $\sigma_1\le 1$ かつ $3/2<\sigma_1+\sigma_2\le 2$ かつ $s_1\ne 1$ ならば
$$I^{[2]}(T)=\zeta_2^{[2]}(s_1,2\sigma_2)T+\begin{cases}O(T^{4-2\sigma_1-2\sigma_2}) & (\sigma_1+\sigma_2\ne 2)\\ O((\log T)^2) & (\sigma_1+\sigma_2=2)\end{cases}$$
であり、$s_1=1$ かつ $1/2<\sigma_2\le 1$ ならば
$$I^{[2]}(T)=\zeta_2^{[2]}(s_1,2\sigma_2)T+\begin{cases}O(T^{2-2\sigma_2}(\log T)^2) & (\sigma_2\ne 1)\\ O((\log T)^4) & (\sigma_2=1)\end{cases}$$
であり、$\sigma_1>1$ かつ $\sigma_2=1/2$ ならば
$$I^{[2]}(T)=|\zeta(s_1)|^2T\log T+O(T)$$

であり、$\sigma_1+\sigma_2=3/2$ かつ $\sigma_2>1/2$ ならば

$$I^{[2]}(T)=|s_1-1|^{-2}T\log T+O(T)$$

であり、$\sigma_2=1/2$ かつ $\sigma_1=1$ かつ $s_1\neq 1$ ならば

$$I^{[2]}(T)=(|s_1-1|^{-2}+|\zeta(s_1)|^2)T\log T+O(T)$$

であり、$\sigma_2=1/2$ かつ $s_1=1$ ならば

$$I^{[2]}(T)=\frac{T(\log T)^3}{3}+O(T(\log T)^2)$$

である。ここで O 定数は s_1 および σ_2 に依存する。

定理 2.3. $s_1=\sigma_1+it,\ s_2=\sigma_2+it,\ \epsilon$ を十分小さな正の数とする。また

$$I^{\square}_{\sigma_1,\sigma_2}(T)=I^{\square}(T)=\int_2^T|\zeta_2(\sigma_1+it,\sigma_2+it)|^2dt$$

$$\zeta_2^{\square}(\sigma_1,\sigma_2)=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{\substack{mn=k\\ m<n}}\frac{1}{m^{\sigma_1}n^{\sigma_2}}\right)^2$$

とする。$\sigma_1+\sigma_2>2$ かつ $\sigma_2>1$ ならば

$$I^{\square}(T)=\zeta_2^{\square}(\sigma_1,\sigma_2)T+O(1)$$

であり、$\sigma_1>1$ かつ $1/2<\sigma_2\leq 1$ ならば

$$I^{\square}(T)=\zeta_2^{\square}(\sigma_1,\sigma_2)T+O(T^{2-2\sigma_2+\epsilon})+O(T^{1/2})$$

であり、$\sigma_1\leq 1$ かつ $3/2<\sigma_1+\sigma_2\leq 2$ ならば

$$I^{\square}(T)=\zeta_2^{\square}(\sigma_1,\sigma_2)T+O(T^{4-2\sigma_1-2\sigma_2+\epsilon})+O(T^{1/2})$$

であり、$\sigma_1>1$ かつ $\sigma_2=1/2$ ならば

$$I^{\square}(T)\sim\frac{\zeta(2\sigma_1)(\zeta(\sigma_1+1/2))^2}{\zeta(2\sigma_1+1)}T\log T$$

である。ここで O 定数は σ_1 および σ_2 に依存する。

3 主定理の証明の概略と先行研究との比較

証明の詳細はIkeda, Matsuoka and Nagata [3]を参照していただきたい。定理の証明において最も重要な部分はそれぞれの近似式を導出する部分である。近似式以外は平均値の一般的な手法により計算することが出来る。近似式を導出するにはEuler-Maclaurinの和公式、Riemannゼータ関数の近似式および定理2.2の一部でRiemannゼータ関数の導関数の近似式を用いる。定理2.1および定理2.2の証明においてはRiemannゼータ関数の近似式はHardy-Littlewoodによる所謂simplest approximation formulaで十分であるが、定理2.3で用いるRiemannゼータ関数の近似式は臨界領域以外の箇所も必要である。複素平面における実部が負の領域の近似式は、Kiuchi and Tanigawa [5]による合流型超幾何を使う方法を用いて近似式を導出する。この方法はRiemannゼータ関数をEuler-Maclaurinの和公式で展開した際に生じる誤差項を合流型超幾何関数の積分表示に帰着させるもので、指数和の議論を使わないという利点がある。

Matsumoto and Tsumura [9]は我々とは違う近似式を用いている。この近似式導出の為にはMellin-Barnesの積分公式を利用する。Mellin-Barnesの積分公式を利用した多重ゼータ関数の解析接続はMatsumoto [7]により初めて与えられた。この方法は解析接続する際に特異点を明示的に書き表すことが可能であり、また多重化した色々な級数と相性が良く、多重化したものを扱う上で非常に有用である。例えばEulerの二重ゼータ関数については

$$\zeta_2(s_1,s_2)=\frac{\zeta(s_1+s_2-1)}{s_2-1}-\frac{1}{2}\zeta(s_1+s_2)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\Gamma(s_2+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_2)}\zeta(s_1+s_2+z)\zeta(-z)dz$$

と書くことが出来る。この表示を見ると特異点の場所が簡単に分かり、被積分関数が実部を一定に保った上で虚部を無限に発散させると比較的早く零に収束することから、一見すると関数の評価という観点からも非常に有効だと思われる。しかし、関数の評価という観点から見ると幾分か難解な面がある。例えば、Eulerの二重ゼータ関数のあるオーダー評価を扱ったIshikawa and Matsumoto [4]の結果はKiuchi and Tanigawa [5]により改良されているが、ここではEuler-Maclaurinの和公式が用いられている。また、平均値についてもMatsumoto and Tsumura [9]で用いられたMellin-Barnesの積分公式を使わずにEuler-Maclaurinの和公式を使うほうが多くの領域を考察できたことを考えるとMellin-Barnesの積分公式による表示が関数の解析においては必ずしも有効とは言えない場合もあると思われる。しかし、Mellin-Barnesの積分公式は色々な多重ゼータ関数の解析接続などを考える上で極めて有用な方法であり、色々な多重ゼータ関数の解析を統一的に扱うためにはMellin-Barnesの積分公式を利用した解析的な方法を確立する必要があるようにも思われる。

4 主定理の考察

定理 2.1 で $I^{[1]}(T)$ の解析的な挙動が変化するのは $\sigma_1+\sigma_2=3/2$ の場合である。定理 2.2 で $I^{[2]}(T)$ の解析的な挙動が変化するのは $\sigma_1+\sigma_2=3/2$ および $\sigma_2=1/2$ の場合である。したがって $\sigma_1+\sigma_2=3/2$ が Euler の二重ゼータ関数において特別な意味を持っているのではないかと推測される。定理 2.3 の誤差項に $O(T^{4-2\sigma_1-2\sigma_2+\epsilon})$ とあるが、これは ϵ の差を除けば定理 2.1 および定理 2.2 に現れる誤差項と一致しているので、やはり $\sigma_1+\sigma_2=3/2$ が特殊であると推測できる。さらに誤差項の議論以外からもこの推測を支持する根拠を挙げることが出来る。定理 2.1 では $\sigma_1+\sigma_2>3/2$ において $\zeta_2^{[1]}(2\sigma_1,s_2)$ が絶対収束し、定理 2.2 でも $\sigma_1+\sigma_2>3/2$ かつ $\sigma_2>1/2$ において $\zeta_2^{[2]}(s_1,2\sigma_2)$ が絶対収束する。また定理 2.1 と定理 2.2 においてオーダーが T ではなく $T\log T$ となる領域が、定理 2.1 では $\sigma_1+\sigma_2=3/2$ であり定理 2.2 では $\sigma_1+\sigma_2=3/2$ と $\sigma_2=1/2$ である。これは Riemann ゼータ関数において $\zeta(2\sigma)$ が $\sigma>1/2$ で収束し、$\sigma=1/2$ で二乗平均値のオーダーが $T\log T$ となる結果の類似と考えることが出来るので、前述の $\sigma_1+\sigma_2=3/2$ が Euler の二重ゼータ関数において特別な意味を持っているのではないかという推測を支持していると思われる。しかし、定理 2.3 は事情が異なり $\zeta_2^{\square}(\sigma_1,\sigma_2)$ は $\sigma_1+\sigma_2>1$ かつ $\sigma_2>1/2$ で収束するので、定理 2.1 および定理 2.2 と同様に考えるならば $\sigma_1+\sigma_2=3/2$ で解析的な挙動が変化するとは考えられない。実際、Riemann ゼータ関数の四乗平均値の結果と Carlson の平均値定理から $I_{\sigma,\sigma}^{\square}(T)$ は $\sigma>1/2$ においてオーダーが T であり $\sigma=1/2$ でオーダーが $T\log^4 T$ であるので、$\sigma_1+\sigma_2=1$ で解析的な挙動が変化していると予想することが出来る。このように平均値についても Euler の二重ゼータ関数の挙動は分からない部分が多いので、Euler の二重ゼータ関数の解析的な挙動を理解するために色々な研究が必要であると考えている。

5 定理の改良について

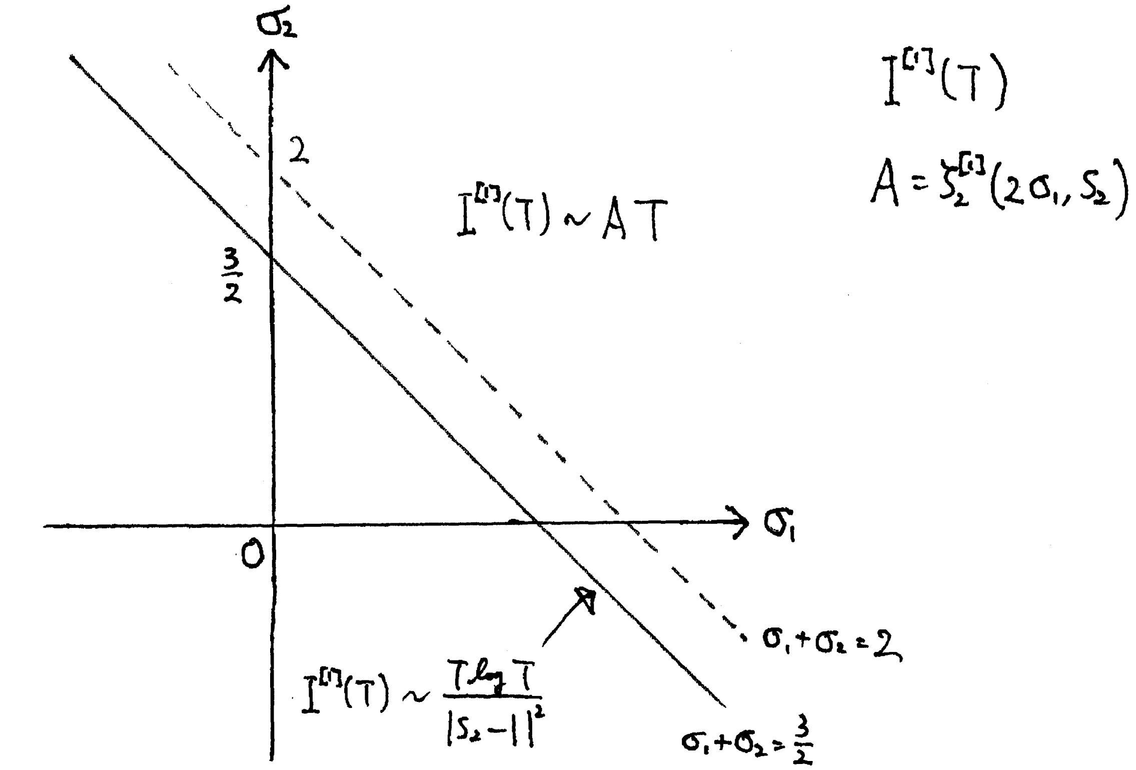
定理 2.3 の最後の

$$I^{\square}(T)\sim\frac{\zeta(2\sigma_1)(\zeta(\sigma_1+1/2))^2}{\zeta(2\sigma_1+1)}T\log T$$

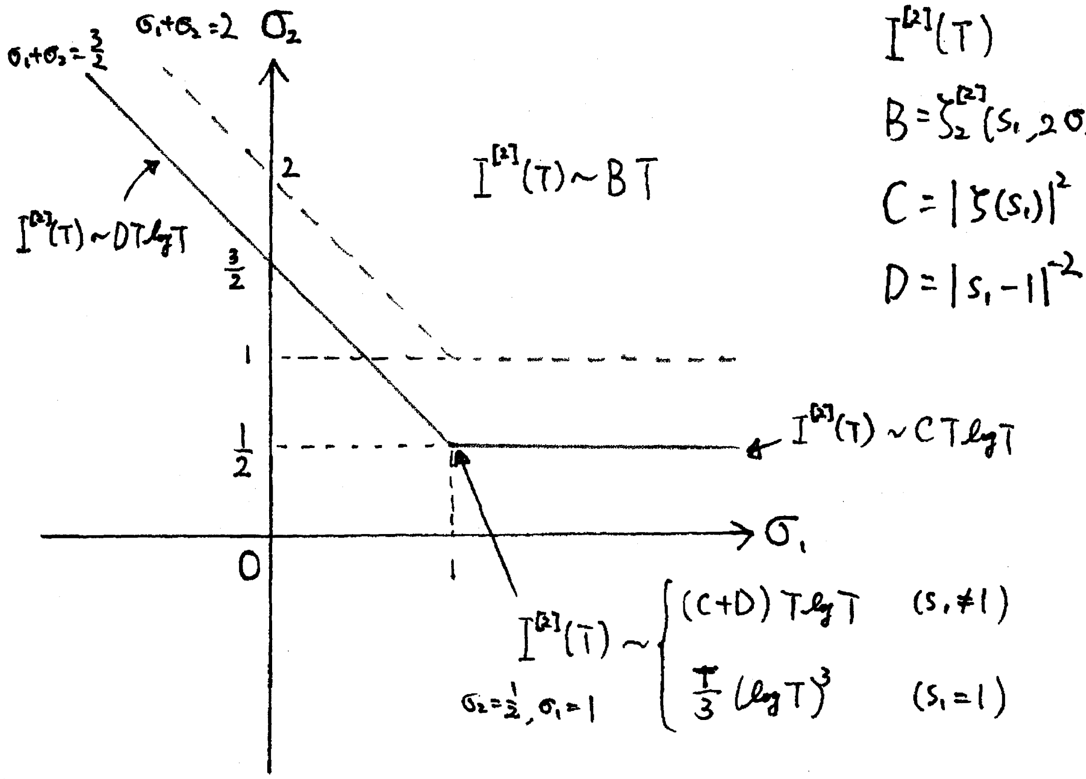
ですが、発表時は

$$I^{\square}(T)\asymp T\log T$$

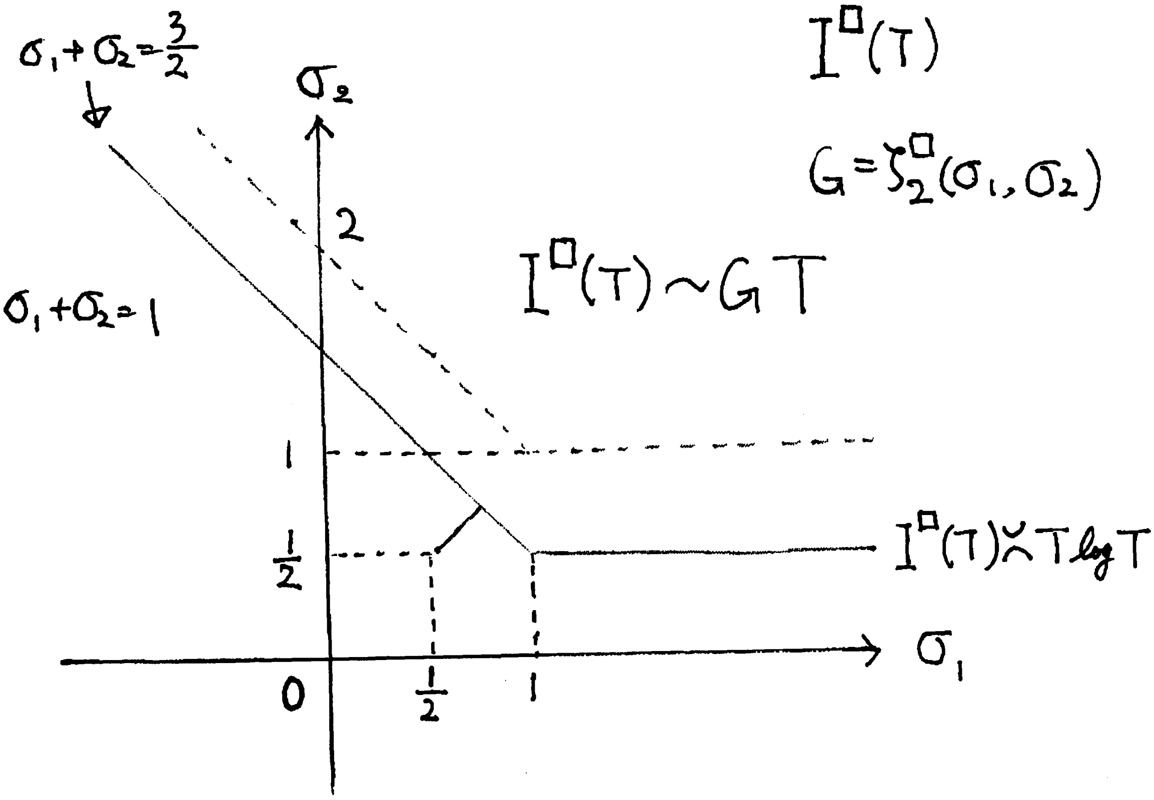
という結果しか得ていませんでした。最近になり Shimomura [10] の結果を使うことにより定理 2.3 を改良することが出来たので、ここに報告します。Shimomura [10] の結果を教えていただいた名古屋大学の松本耕二教授に感謝申し上げます。



σ_2
2
$\frac{3}{2}$
0
σ_1
$I^{[1]}(T)$
$A = \zeta_2^{[1]}(2\sigma_1, s_2)$
$I^{[1]}(T) \sim AT$
$\sigma_1+\sigma_2=2$
$I^{[1]}(T) \sim \frac{T\log T}{|s_2-1|^2}$
$\sigma_1+\sigma_2=\frac{3}{2}$



$\sigma_1+\sigma_2=\frac{3}{2}$
$\sigma_1+\sigma_2=2$
σ_2
$I^{[2]}(T)$
$B = \zeta_2^{[2]}(s_1, 2\sigma_2)$
$C = |\zeta(s_1)|^2$
$D = |s_1-1|^{-2}$
2
$I^{[2]}(T) \sim BT$
$I^{[2]}(T) \sim DT\log T$
$\frac{3}{2}$
1
$\frac{1}{2}$
$I^{[2]}(T) \sim CT\log T$
0
1
σ_1
$I^{[2]}(T) \sim \begin{cases} (C+D)\,T\log T & (s_1 \neq 1) \\ \frac{T}{3}(\log T)^3 & (s_1 = 1) \end{cases}$
$\sigma_2=\frac{1}{2}, \sigma_1=1$



Since the series $\zeta_2^{\square}(\sigma_1, \sigma_2)$ converges $\sigma_2 > \frac{1}{2}$, $\sigma_1 + \sigma_2 > 1$, we may expect that $\sigma_2 = \frac{1}{2}$, $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$ is an analogue of the critical line.

参考文献

[1] S. Akiyama, S. Egami and Y. Tanigawa, Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers, Acta Arith. **98** (2001), 107-116.

[2] F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, Acta Math. **81** (1949), 353-376.

[3] S. Ikeda, K. Matsuoka and Y. Nagata, On certain mean values of the double zeta-function, preprint.

[4] H. Ishikawa and K. Matsumoto, On the estimation of the order of Euler-Zagier multiple zeta-functions, Illinois J. Math. **47** (2003), 1151-1166.

[5] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, Bounds for double zeta-functions, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. Ser. V **5** (2006), 445-464.

[6] I. Kiuchi, Y. Tanigawa and W. Zhai, Analytic properties of double zeta-functions, Indag. Math. **21** (2011), 16-29.

[7] K. Matsumoto, On the analytic continuation of various multiple zeta-functions, Number Theory for the Millennium, II (Urbana, IL, 2000), A K Peters, Natick, MA, 2002, pp. 417-440.

[8] K. Matsumoto, Functional equations for double zeta-functions, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **136** (2004), 1-7.

[9] K. Matsumoto and H. Tsumura, Mean value theorems for double zeta-functions, J. Math. Soc. Japan, to appear.

[10] S. Shimomura, Fourth Moment of the Riemann Zeta-function with a Shift along the Real Line, Tokyo J. Math. **36** (2013), 355-377.

[11] E. C. Titchmarsh, The theory of the Riemann zeta-function, Oxford: Clarendon Press. 2nd. ed. revised by D. R. Heath-Brown, 1986.

[12] J. Q. Zhao, Analytic continuation of multiple zeta function, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 1275-1283.