数理解析研究所講究録
第 1902 巻 2014 年 29-35

Absence of zero resonances of massless Dirac operators

学習院大学 理学部 数学科 相場 大佑
Daisuke Aiba
Department of Mathematics, Gakushuin University

1 Introduction, assumption and theorems.

$\mathbb{R}^3$ 上の $\mathbb{C}^4$-値関数に作用する, 次の massless Dirac operator を考える.

$$\begin{aligned} H &= \alpha \cdot D + Q(x) \qquad (1.1) \\ &= \sum_{j=1}^{4} \alpha_j(-i\partial_{x_j}) + Q(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

ここで, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ は 4×4 の Dirac 行列:

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_j \\ \sigma_j & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad j = 1, 2, 3.$$

但し, $\mathbf{0}$ は 2×2 の零行列を表すものとし, σ_j $(j = 1, 2, 3)$ は 2×2 の Pauli 行列である:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ポテンシャル $Q(x)$ は 4×4 のエルミート行列値関数であり, 次の条件を仮定する.

Assumption 1.1. ある定数 $C > 0$ と $\rho > 1$ が存在して, $Q(x)$ の各成分 $q_{j,k}(x)$ $(j, k = 1, \cdots, 4)$ は,

$$|q_{j,k}(x)| \le C\langle x \rangle^{-\rho}, \quad \langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

を満たす.

ここで, massless Dirac 作用素 (1.1) は電磁場ポテンシャルを持つ Dirac 作用素

$$\alpha \cdot (D - A(x)) + q(x)I_4 \tag{1.2}$$

の一般化であることに注意する. 特に, $q(x) = 0$ の時は,

$$\alpha \cdot (D - A(x)) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma \cdot (D - A(x)) \\ \sigma \cdot (D - A(x)) & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

と書け, 作用素 $\sigma \cdot (D - A(x))$ は Weyl-Dirac 作用素と呼ばれている ([8], [9]).
次に, 関数空間など, いくつか記号の定義をする. $\mathcal{F}f$, $\mathcal{F}^{-1}f$ はそれぞれ, f の Fourier 変換, Fourier 逆変換を表すものとする:

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx, \ (\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} f(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

また, 以下では $\hat{f}(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi)$, $\check{f}(x) = (\mathcal{F}^{-1}f)(x)$ と書く事がある. $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3) := L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ は $\mathbb{C}^4$-値の二乗可積分関数の全体を表すものとし, 内積を $f = {}^t(f_1, f_2, f_3, f_4)$, $g = {}^t(g_1, g_2, g_3, g_4)$ に対して, $(f,g)_{\mathcal{L}^2} = \sum_{j=1}^4 (f_j, g_j)_{L^2}$ で定めることにより, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ はヒルベルト空間である. 実数 $s \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{L}^{2,s}(\mathbb{R}^3) = L^{2,s}(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) := \langle x \rangle^{-s} L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ は重み付きの $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ 空間を表すものとし, 内積は $(f,g)_{\mathcal{L}^{2,s}} = \sum_{j=1}^4 (f_j, g_j)_{L^{2,s}}$ で定める. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ は $\mathbb{C}^4$-値の緩増加超関数全体を表すものとする. 実数 $s \in \mathbb{R}$ に対して, $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^3) = H^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ は s 階のソボレフ空間:

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^3) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) | \hat{f} \in \mathcal{L}^{2,s}(\mathbb{R}^3)\}$$

を表すものとし, 内積を $(f,g)_{\mathcal{H}^s} = \sum_{j=1}^4 (\hat{f}_j, \hat{g}_j)_{L^{2,s}}$ と定めることで $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^3)$ はヒルベルト空間である. また, $f \in \mathcal{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ 上の一次形式を

$$\langle f, g \rangle := \sum_{j=1}^4 \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}f_j)(\xi) \overline{(\mathcal{F}g_j(\xi))} d\xi, \ f \in \mathcal{H}^{-s}(\mathbb{R}^d), \ g \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d).$$

と定めることにより, $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ の共役空間は $\mathcal{H}^{-s}(\mathbb{R}^d)$ に等しい.

良く知られている様に, free の Dirac operator $H_0 := \alpha \cdot D$ は定義域を $\mathcal{D}(H_0) = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$ と取ることによって $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役作用素である. 従って, Kato-Rellich の定理から, H も定義域を $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0) = \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$ として $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役作用素となる. 以下では, それぞれの自己共役拡張を再び H_0, H と書くことにする. また, 以下では $f \in \mathcal{S}'$ に対しても, $H_0 f$ などと書くことにする. 次に, 先行結果, 主結果を述べるために, ゼロモード及びゼロレゾナンスの定義をする.

Definition 1.2. $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ が $Hf = 0$ を満たす時, f は H のゼロモードであると言う. $f \in \mathcal{L}^{2,-3/2}(\mathbb{R}^3)\backslash\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ が超関数の意味で $Hf = 0$ を満たす時, f は H のゼロレゾナンスであると言われる.

Dirac 作用素に対するゼロモード, ゼロレゾナンスについてのより詳しい事に関しては [1], [3], [8] 及び [9] を参照,

1.1 Main Theorem.

以下の定理が今回の主結果である.

Theorem 1.3. $Q(x)$ は *Assumption 1.1* を満たすとする. $f \in \mathcal{L}^{2,-3/2}(\mathbb{R}^3)$ が超関数の意味で $Hf = 0$ を満たすならば, 任意の $\mu < 1/2$ に対して $\langle x \rangle^{\mu} f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$ が成り立つ. 特に, H のゼロレゾナンスが存在しないことが分かる.

Remark 1.4. *Theorem 1.3* の結論における $\langle x \rangle^{\mu} f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$, $\mu < 1/2$ において μ をこれ以上改良することはできない. このことは, *Loss-Yau [5] ([1]* も参照*)* によって構成された *Weyl-Dirac* 作用素に対するゼロモードを用いることにより分かる. *(*詳しいことは, *Theorem 1.3* の証明で述べる*)*

1.2 Known Results.

ここでは, massless Dirac 作用素に対するゼロレゾナンスに関して, 現在までに知られている結果を紹介する.

Theorem 1.5. (Theorem 2.2. Saito-Umeda [8]) Assumption 1.1 において $\rho > 3/2$ の時, ある $0 < s < \min\{3/2, \rho - 1\}$ が存在して, $f \in \mathcal{L}^{2,-s}(\mathbb{R}^3)$ が超関数の意味で $Hf = 0$ を満たすならば $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$ が成り立つ.

Theorem 1.6. (Theorem 3.1.2. Zhang-Gao [10]) $\rho > 1$ に対しても Theorem 1.5 の結果が成立する.

Remark 1.7. *Theorem 1.5* において, *[8]* の議論は $\rho > 1$ に対してもそのまま通用する *([10])*. 主結果と先行結果の比較をしてみると, 主結果は仮定の $f \in \mathcal{L}^{2,-s}$ を $f \in \mathcal{L}^{2,-3/2}$ に改良している. 特に, $\rho > 1$ に依存していないことが分かる. また結論においては, $f \in \mathcal{H}^1$ を *sharp decay estimate* $\langle x \rangle^{\mu} f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$, $\mu < 1/2$ に改良している.

2 Preliminaries.

ここでは, 主結果を証明するためにいくつかの補題を準備する. 良く知られている次の Nirenberg-Walker [4] による補題を用いる.

Lemma 2.1. (Lemma 2.1. Nirenberg-Walker [4]) d を次元, $1 < p < \infty$ とし, $a, b \in \mathbb{R}$ は $a+b > 0$ を満たすものとし, 積分核 $k(x,y)$ を, 次の様に定める.

$$k(x,y) := \frac{1}{|x|^a |x-y|^{d-(a+b)} |y|^b}, \ x, y \in \mathbb{R}^d, \ x \neq y.$$

この時, $k(x,y)$ を積分核とする積分作用素

$$(K\phi)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} k(x,y)\phi(y)dy$$

が $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上有界であるための必要十分条件は, $a < d/p$ かつ $b < d/q$ である. ここで, $q = p/(p-1)$ は p の双対指数を表すものとする.

次に, $f = {}^t(f_1, f_2, f_3, f_4)$ に対して, 積分作用素 A を以下の様に定める.

$$(Af)(x) := \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\alpha \cdot (x-y)}{|x-y|^3} f(y)dy.$$

$$\frac{i}{4\pi} \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\xi}{|\xi|^3}\right)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{x}{|x|^2}$$

であるから,

$$\mathcal{F}^{-1}(Af)(x) = \frac{\alpha \cdot x}{|x|^2}(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = (\alpha \cdot x)^{-1}(\mathcal{F}^{-1}f)(x) \tag{2.1}$$

が成り立つことが分かる.

Lemma 2.2. 任意の $t \in (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ に対して, 積分作用素 A は $\mathcal{L}^{2,-t}$ から $\mathcal{L}^{2,-t-1}$ への有界作用素である.

Proof. 掛け算作用素 $\langle x \rangle^t$ は $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ から $\mathcal{L}^{2,-t}(\mathbb{R}^3)$ への同型写像であるから, $\langle x \rangle^{-t-1} A \langle x \rangle^t$ が $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ 上有界であることを示せばよい. この時,

$$\langle x \rangle^{-t-1} A(\langle \cdot \rangle^t f)(x) = \frac{i}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \langle x \rangle^{-t-1} \frac{\alpha \cdot (x-y)}{|x-y|^3} \langle y \rangle^t f(y)dy$$

であるから, $\langle x \rangle^{-t-1} A \langle x \rangle^t$ の積分核を $\tilde{k}(x,y)$ と書くことにすると,

$$|\tilde{k}(x,y)| \leq \frac{1}{4\pi \langle x \rangle^{t+1} |x-y|^2 \langle y \rangle^{-t}}$$

が成り立つことが分かる. 従って, Lemma 2.1 を $a = t+1$, $b = -t$, $d = 3$, $p = q = 2$ で用いれば, 任意の $t \in (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ に対して, $\langle x \rangle^{-t-1} A \langle x \rangle^t$ が $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ 上有界であり, Lemma 2.2 が成り立つ. $\square$

Lemma 2.3. $-3/2 < s < 1/2$ とする．この時，任意の $g \in \mathcal{L}^{2,-t}(\mathbb{R}^3)$ と $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\{0\})$ に対して，

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(Ag), \phi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}g, \frac{\alpha\cdot x}{|x|^2}\phi\rangle \tag{2.2}$$

が成り立つ．

Proof. まず，$\mathcal{F}^{-1}g \in \mathcal{H}^{-s-1}$, $\mathcal{F}^{-1}(Ag) \in \mathcal{H}^{-s-1}$ であることに注意する．実際，$g \in \mathcal{L}^{2,-s} \subset \mathcal{L}^{2,-s-1}$ であるから $\mathcal{F}^{-1}g \in \mathcal{H}^{-s-1}$ が成り立つ．また，仮定の $g \in \mathcal{L}^{2,-s}$, $-\frac{3}{2} < s < \frac{1}{2}$ と Lemma 2.2 から，$Ag \in \mathcal{L}^{2,-s-1}$ であるから $\mathcal{F}^{-1}(Ag) \in \mathcal{H}^{-s-1}$ が成立することが分かる．$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, \mathbb{C}^4)$ とし，$\lim_{n\to\infty}\|g_n - g\| = 0$ を満たすような $g_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ を取る．この時，Lemma 2.2 から作用素 A は $\mathcal{L}^{2,-s}$ から $\mathcal{L}^{2,-s-1}$ への連続写像であるから，

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}^{-1}(Ag), \phi\rangle &= \lim_{n\to\infty}\langle \mathcal{F}^{-1}(Ag_n), \phi\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\langle \frac{\alpha\cdot x}{|x|^2}\mathcal{F}^{-1}g_n, \phi\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\langle \mathcal{F}^{-1}g_n, \frac{\alpha\cdot x}{|x|^2}\phi\rangle \\ &= \langle \mathcal{F}^{-1}g, \frac{\alpha\cdot x}{|x|^2}\phi\rangle.\end{aligned}$$

ここで，第二の等式のところでは (2.1) を，第三の最後の等式では $\frac{\alpha\cdot x}{|x|^2}\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, \mathbb{C}^4)$ であることを用いた．以上から Lemma 2.3 が成り立つ．□

主結果を証明するにあたり，次の補題の関係式が重要な役割を果たす．

Lemma 2.4. $f \in \mathcal{L}^{2,-3/2}(\mathbb{R}^3)$ とし，ある $s \in (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ に対して，$H_0 f \in \mathcal{L}^{2,-s}(\mathbb{R}^3)$ であるとする．この時，

$$AH_0 f = f$$

が成り立つ．

Proof. まず，仮定から $f \in \mathcal{L}^{2,-3/2}$ であり，また，Lemma 2.2 から，$AH_0 f \in \mathcal{L}^{2,-s-1} \subset \mathcal{L}^{2,-3/2}$ であるから，$\mathcal{F}^{-1}f, \mathcal{F}^{-1}(AH_0 f) \in \mathcal{H}^{-3/2}$ が成り立つ．従って，

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(AH_0 f), \phi\rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}f, \phi\rangle, \quad for\ any\ \phi \in \mathcal{H}^{3/2} \tag{2.3}$$

を示せばよいことが分かる．さらに，良く知られているように $s \leq d/2$ に対して $C_0^\infty(\mathbb{R}^d\backslash\{0\}, \mathbb{C}^4)$ が $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$ で稠密であることから，(2.3) を $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\backslash\{0\}, \mathbb{C}^4)$ に対して示せば十分であることが分かる．$\mathcal{F}^{-1}(H_0 f)(x) = (\alpha\cdot x)(\mathcal{F}^{-1}f)(x)$ であることと，(2.2) を $g = H_0 f$ に対して用いることにより，

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(AH_0 f), \phi\rangle = \langle (\alpha\cdot x)\mathcal{F}^{-1}f, \frac{\alpha\cdot x}{|x|^2}\phi\rangle$$

$$= \langle \mathcal{F}^{-1} f, \frac{(\alpha \cdot x)^2}{|x|^2} \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1} f, \phi \rangle.$$

が成り立つことが分かる．ここで，最後の等式において Dirac 行列に対する反交換関係を用いた．従って，Lemma 2.4 が成り立つ． □

3 Proof of Theorem 1.3

まず，$1 < \rho < 3$ であると仮定しても一般性を失わないことに注意する．証明の方法としては，良く知られている Agmon による bootstrap argument を用いる．$f \in \mathcal{L}^{2,-3/2}$ とし，超関数の意味で $Hf = 0$ が成立すると仮定する．この時，Assumption 1.1 から，$H_0 f = -Qf \in \mathcal{L}^{2,-\frac{3}{2}+\rho}$ で，$-\frac{1}{2} < \rho - \frac{3}{2} < \frac{3}{2}$ であるから，Lemma 2.2 により $AQf \in \mathcal{L}^{2,-\frac{3}{2}+\rho-1}$ が成り立つ．従って，Lemma 2.4 から，$f = AH_0 f = -AQf \in \mathcal{L}^{2,-\frac{3}{2}+\rho-1}$ が成り立つことが分かる．この議論を繰り返すことにより，$-\frac{3}{2}+n(\rho-1)+1 < \frac{3}{2}$ である限り，$f \in \mathcal{L}^{2,-\frac{3}{2}+n(\rho-1)}$ が成立する．次に，n_0 を $-\frac{3}{2}+n_0(\rho-1)+1 < \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}+n_0(\rho-1)+\rho > \frac{3}{2}$ を満たす自然数で最大のものとすると，$f \in \mathcal{L}^{2,-\frac{3}{2}+n_0(\rho-1)}$ であり，$Qf \in \mathcal{L}^{2,-\frac{3}{2}+n_0(\rho-1)+\rho}$ が成り立つ．この時，任意の $\mu < 1/2$ に対して，$H_0 f = -Qf \in \mathcal{L}^{2,\mu+1}$ がであるから，Lemma 2.2, Lemma 2.4 より $f \in \mathcal{L}^{2,\mu}$ が成り立つ．次に $\langle x \rangle^\mu f \in \mathcal{H}^1$ を示す．直接微分すれば，

$$\begin{aligned} H_0 \langle x \rangle^\mu f &= -i\mu(\alpha \cdot x)\langle x \rangle^{\mu-2} f + \langle x \rangle^\mu H_0 f \\ &= -i\mu(\alpha \cdot x)\langle x \rangle^{\mu-2} f - \langle x \rangle^\mu Q f \in \mathcal{L}^2 \end{aligned}$$

が得られるので，$\mathcal{F}(\langle x \rangle^\mu f) \in \mathcal{L}^{2,1}$ が成り立つ．これは $\langle x \rangle^\mu f \in \mathcal{H}^1$ と同値であるから，Theorem 1.3 の証明ができた．最後に，Remark 1.4 で述べたが，$\langle x \rangle^\mu f \in \mathcal{H}^1$, $\mu < 1/2$ において，μ をこれ以上改良することは出来ないことについて述べる．Loss-Yau [5] ([1] も参照) において，Weyl-Dirac 作用素に対して，ベクトルポテンシャル $A_{LY}(x)$ とゼロモード $\phi_{LY}(x)$ で，次の性質を満たすものが構成されている．($A_{LY}(x)$, $\phi_{LY}(x)$ の具体的な形については [1] 及び [5] を参照)

$$A_{LY}(x) = \mathcal{O}(|x|^{-2}), \quad |\phi_{LY}(x)| = \langle x \rangle^{-2}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

この時，$f_{LY} := {}^t(0, \phi_{LY})$ と定めると，任意の $\mu < 1/2$ に対して，$f_{LY} \in \mathcal{L}^{2,-\mu}(\mathbb{R}^3)$ である．ところが，$|\phi_{LY}(x)| = \langle x \rangle^{-2} \notin L^{2,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ であることから，$\langle x \rangle^{\frac{1}{2}} f_{LY} \notin \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3)$ であり，一般には $\langle x \rangle^{\frac{1}{2}} f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^3)$ が成立しないことが分かる．

References

[1] A. A. Balinsky and W. D. Evans, SPECTRAL ANALYSIS of RELATIVISTIC OPERATORS. Imperial College Press.

[2] A. Jensen and T. Kato, Spectral properties of Schrödinger operators and time-decay of the wave functions, Duke Mathematical Journal, 46 (1979), 583-611.

[3] B. Thaller, The Dirac equation. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

[4] L. Nirenberg and H. F. Walker, The Null Spaces of Elliptic Partial Differential Operators in $\mathbb{R}^n$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 42 (1973), 271-301.

[5] M. Loss and H. T. Yau, Stability of Coulomb Systems with Magnetic Fields III. Zero Energy Bound States of the Pauli Operator. Communications in Mathematical Physics, 104 (1986), 283-290.

[6] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 132, Berlin Springer, 1996.

[7] S. T. Kuroda, An introduction to scattering theory, Lecture note series Vol 51, Mathematisk Institut, Aarhus Universitet, Aarhus, 1978.

[8] Y. Saito and T. Umeda, The zero modes and zero resonances of massless Dirac operators. Hokkaido Mathematical Journal, 37 (2008), 363-388.

[9] Y. Saito and T. Umeda, The zero modes and zero resonances of Dirac operators. 数理解析研究所講究録, 第 1563 巻, 2007 年, 157-161.

[10] Y. Zhong and G. Gao, Some new results about the massless Dirac operators. Journal of Mathematical Physics, 54 (2013), 043510, 1-25.