数理解析研究所講究録
第 1905 巻 2014 年 40-52

Boundary Value Problems for Stationary MHD Equations

奈良女子大学・理学部数学科 柳澤 卓
Taku Yanagisawa
Department of Mathematics, Nara Women's University
taku@cc.nara-wu.ac.jp

Abstract

本稿では，非斉次境界条件下の定常的 MHD 方程式系の弱解の存在定理について論ずる．

1 問題設定

次の境界値問題を対象とする：

$$\begin{cases} (a)\ -\nu\Delta\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p-\mu\,\mathrm{rot}\ \mathbf{H}\times\mathbf{H}=\mathbf{f},\ \ \mathrm{div}\ \mathbf{u}=0, \\ (b)\ \dfrac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\ \mathbf{H}-\mathbf{E}+\mu\mathbf{H}\times\mathbf{u}=\dfrac{1}{\sigma}\mathbf{J}_0,\ \ \mathrm{div}\ \mathbf{H}=0,\ \ \mathrm{rot}\ \mathbf{E}=\mathbf{0}\ \ \mathrm{in}\,\Omega, \\ (c)\ \mathbf{u}=\mathbf{a},\ \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}=q,\ \ \mathbf{E}\times\mathbf{n}=\mathbf{b}\ \ \mathrm{on}\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここに，Ω は $\mathbb{R}^3$ の有界領域，$\partial\Omega$ は Ω の滑らかな[1]境界，$\mathbf{n}=\mathbf{n}(x)$ は $x\in\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルとする：$\mathbf{u}=\mathbf{u}(x)$，$\mathbf{E}=\mathbf{E}(x)$，$\mathbf{H}=\mathbf{H}(x)$，$p=p(x)$ はそれぞれ $x\in\bar{\Omega}$ における速度ベクトル，電場，磁場，圧力を表す未知関数とする；ν，μ，σ はそれぞれ粘性係数，透磁率，電気伝導係数を表す正定数であるとする；$\mathbf{f}$ と $\mathbf{J}_0$ はそれぞれ流体力学的外力，外部電流を表す既知関数とする；$\mathbf{a}$，q，$\mathbf{b}$ はそれぞれ境界 $\partial\Omega$ における速度ベクトル，磁場の法線成分，電場の接線成分を与える境界データとする．

境界値問題 (1) は単位質量密度の非圧縮粘性電気伝導流体を記述する定常的モデルの一つと考えられる．実際，(1)(b) の第 1 式に rot を作用させると

$$\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{H}-\mathrm{rot}\ \mathbf{E}+\mu\mathrm{rot}\ (\mathbf{H}\times\mathbf{u})=\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\ \mathbf{J}_0. \tag{2}$$

一方，ベクトル解析の公式より

$$\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \mathbf{H}=-\Delta\mathbf{H}+\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\ \mathbf{H},$$

$$\mathrm{rot}\ (\mathbf{H}\times\mathbf{u})=(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{H}-(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\mathbf{H}\,\mathrm{div}\ \mathbf{u}-\mathbf{u}\,\mathrm{div}\ \mathbf{H}$$

なので，$\mathrm{div}\ \mathbf{u}=\mathrm{div}\ \mathbf{H}=0$, $\mathrm{rot}\ \mathbf{E}=\mathbf{0}$ に注意すると (2) は

$$-\frac{1}{\sigma}\Delta\mathbf{H}+\mu\{(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{H}-(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{u}\}=\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\ \mathbf{J}_0,$$

[1]少なくとも，$C^{1,1}$-級の滑らかさを持つとする．

すなわち誘導方程式となり，(1) の (a),(b) は定常的非圧縮 MHD 方程式系を与えることがわかる．

領域 Ω に対しては以下次の条件を課すことにする．

Assumption A

(i) 境界 $\partial\Omega$ は互いに素な $L+1$ 個の滑らかな連結成分 $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_L$ から成り， $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_L$ は Γ_0 の内部に含まれる．

(ii) N 個の互いに素な $\partial\Omega$ と横断的に交わる滑らかな切断面 $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ が存在して，$\Omega\backslash(\cup_{j=1}^{N}\Sigma_j)(\equiv \dot{\Omega})$ は単連結となる．

2 境界値問題 (1) に対応する弱形式

本章では，境界値問題 (1) に対応する弱形式を適切な形で導入し，それを基に (1) の弱解を定義する．

まず必要となる関数空間を導入する．

$\mathbf{C}_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ を Ω に compact support をもつ C^∞-ベクトル場 ϕ で $\operatorname{div}\phi = 0$ in Ω なるもの全体からなる空間とし，$\mathbf{H}_{0,\sigma}^{1}(\Omega)$ を $\mathbf{C}_{0,\sigma}^{\infty}(\Omega)$ の Dirichlet norm $\|\nabla\cdot\|_{L^2}$ に関する完備化空間とする．次に div，rot に応じて

$$\mathbf{E}_{\mathrm{div}}(\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \operatorname{div}\mathbf{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega) \,\},$$

$$\mathbf{E}_{\mathrm{rot}}(\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \operatorname{rot}\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,\},$$

$$\mathbf{E}^0_{\mathrm{div}}(\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \,\},$$

$$\mathbf{E}^0_{\mathrm{rot}}(\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0} \,\}$$

とし，

$$\mathbf{X}(\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \operatorname{div}\mathbf{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \operatorname{rot}\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) = 0 \,\}^{2},$$

$$\mathbf{V}(\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \operatorname{div}\mathbf{v} \in \mathrm{L}^2(\Omega),\ \operatorname{rot}\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega),\ \tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) = 0 \,\}$$

とする．ここに，$\gamma_{\mathbf{n}}$，$\tau_{\mathbf{n}}$ は次で定義されるトレース作用素とする：

$$\gamma_{\mathbf{n}} : \mathbf{v} \in \mathbf{E}_{\mathrm{div}}(\Omega) \to \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),\ \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}|_{\partial\Omega} \text{ if } \mathbf{v} \in C(\overline{\Omega}),$$

$$\tau_{\mathbf{n}} : \mathbf{v} \in \mathbf{E}_{\mathrm{rot}}(\Omega) \to \tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega),\ \tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\times\mathbf{n}|_{\partial\Omega} \text{ if } \mathbf{v} \in C(\overline{\Omega}).$$

更に，

$$\mathbf{X}_\sigma(\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{X}(\Omega) \,|\, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \,\mathrm{in}\,\Omega \},$$

$$\mathbf{V}_\sigma(\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\Omega) \,|\, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \,\mathrm{in}\,\Omega \},$$

$$\mathbf{X}_{har}(\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{X}_\sigma(\Omega) \,|\, \operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0} \,\mathrm{in}\,\Omega \},$$

$$\mathbf{V}_{har}(\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{V}_\sigma(\Omega) \,|\, \operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0} \,\mathrm{in}\,\Omega \},$$

$$\mathbf{L}^2_\sigma(\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \,|\, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \,\mathrm{in}\,\Omega,\ \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}) = 0 \,\}$$

[2] 境界 $\partial\Omega$ が $C^{1,1}$ 級の滑らかさをもつならば，$\mathbf{X}(\Omega) \subset \mathbf{H}^1(\Omega)$ が成り立つことに注意（[4] pp.54-55 を参照).

とする．調和ベクトル場の空間 $\mathbf{X}_{har}(\Omega)$，$\mathbf{V}_{har}(\Omega)$ に関する L^2-Hodge-Weyl 分解は次で与えられる：

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{X}_{har}(\Omega) \oplus \mathrm{rot}\ \mathbf{V}_\sigma(\Omega) \oplus \nabla \mathrm{H}^1(\Omega), \tag{3}$$

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{V}_{har}(\Omega) \oplus \mathrm{rot}\ \mathbf{X}_\sigma(\Omega) \oplus \nabla \mathrm{H}^1_0(\Omega). \tag{4}$$

ここで，次の射影作用素[3]

$$\mathrm{P}_{\mathbf{X}_{har}} : \mathbf{L}^2(\Omega) \to \mathbf{X}_{har}(\Omega)$$

を導入する．rot $(\mathrm{P}_{\mathbf{X}_{har}}\mathbf{X}_\sigma(\Omega)) = \mathrm{rot}\ \mathbf{X}_{har}(\Omega) = \{\mathbf{0}\}$ なので $\mathrm{P}_{\mathbf{X}_{har}^\perp} = \mathrm{I} - \mathrm{P}_{\mathbf{X}_{har}}$ とおけば，

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{X}_\sigma(\Omega) = \mathrm{rot}\ (\mathrm{P}_{\mathbf{X}_{har}^\perp}\mathbf{X}_\sigma(\Omega))$$

が成り立つ．よって，$\widetilde{\mathbf{X}_\sigma(\Omega)} = \mathrm{P}_{\mathbf{X}_{har}^\perp}\mathbf{X}_\sigma(\Omega)$ とおけば，分解（4）は

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{V}_{har}(\Omega) \oplus \mathrm{rot}\ \widetilde{\mathbf{X}_\sigma(\Omega)} \oplus \nabla \mathrm{H}^1_0(\Omega) \tag{5}$$

と改良できる．更に，この分解に付随する Friedrichs の不等式 ([5]: Theorem 2.4(1)) より，任意の $\mathbf{u} \in \widetilde{\mathbf{X}_\sigma(\Omega)}$ に対して

$$\|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2} \le c_0 \|\mathrm{rot}\ \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2}$$

が成立することに注意する．ここに，c_0 は Ω のみに依存する定数である．

次に，境界条件 $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}$ を取り扱う為に次の接線方向トレース空間 $\tau_\mathbf{n}(\mathbf{E}_{\mathrm{rot}}\ (\Omega))$ の特徴付けを行う．その為に更に幾つかの空間を導入する：

$$\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{tan}(\partial\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \,|\, \gamma_\mathbf{n}(\mathbf{v}) = 0 \,\},$$

$\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}_{tan}(\partial\Omega) =: \mathbf{L}^2(\partial\Omega)$ に関する $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}_{tan}(\partial\Omega)$ の双対空間,

[3]射影作用素 $\mathrm{P}_{\mathbf{X}_{har}}$ は，具体的に

$$\mathrm{P}_{\mathbf{X}_{har}}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{v}, \mathbf{w}_i)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\mathbf{w}_i,\ \mathbf{w}_i = \nabla p_i,\ i = 1, \ldots, N,$$

で与えられる．ここに，p_i，$i = 1, \ldots, N$，は次の境界値問題の解である：

$$\begin{cases} \Delta p_i = 0 \ \text{ in } \dot{\Omega}, \\ \dfrac{\partial p_i}{\partial \mathbf{n}} = 0 \ \text{ on } \partial\dot{\Omega}, \\ [\dfrac{\partial p_i}{\partial \mathbf{n}_j}]_j = 0,\ [p_i]_j = \delta_{ij} \ \text{for } j = 1, \ldots, N. \end{cases}$$

ただし，$[f]_j$ は Assumption A(ii) の切断面 $\sum_j$ における f の「跳び」，すなわち $\sum_j$ の一方の面を $\sum_j^+$，もう一方の面を $\sum_j^-$ としたときの

$$[f]_j = f|_{\sum_j^+} - f|_{\sum_j^-}$$

を表すとし，$\mathbf{n}_j$ は $\sum_j^+$ から $\sum_j^-$ へ向いた $\sum_j$ の単位法線ベクトルであるとする．

$$\chi(\partial\Omega) = \{\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \mid \ < \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}), \phi >_{\partial\Omega} = 0 \text{ for } {}^{\forall}\phi \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega),\ \mathrm{div}_{\tau}\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \,\}.$$

ここに，$< \cdot, \cdot >_{\partial\Omega}$ は $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ と $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ (あるいは $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ と $\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$) の間の duality pairing を表し，$\mathbf{v} \in \mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ に対する接線的発散 $\mathrm{div}_{\tau}\mathbf{v}$ は次で定義される $\mathrm{H}^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ に属する超関数を意味する：

$$<< \mathrm{div}_{\tau}\mathbf{v}, \Psi >>_{\partial\Omega} = - < \mathbf{v}, (\nabla\Psi^{*})|_{\partial\Omega} >_{\partial\Omega} \text{ for } \Psi \in \mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega),$$

ただし，$<< \cdot, \cdot >>_{\partial\Omega}$ は $\mathrm{H}^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ と $\mathrm{H}^{-\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ の間の duality pairing を表し $\Psi^{*} \in \mathrm{H}^{2}(\Omega)$ は Ψ の Ω への任意の拡張を表す.

以上の準備の下，Alonso と Valli によって与えられた接線方向トレース空間 $\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{E}_{\mathrm{rot}}\,(\Omega))$ の特徴付けは次のように述べることができる[4].

<u>**Proposition 1**</u> ([2])

(I) 接線トレース作用素 $\tau_{\mathbf{n}}: \mathbf{E}_{\mathrm{rot}}\,(\Omega) \longrightarrow \chi(\partial\Omega)$ が存在し,

$$< \tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{v}), \Psi >_{\partial\Omega} = < \mathbf{v} \times \mathbf{n}, \Psi >_{\partial\Omega} \text{ for } {}^{\forall}\Psi \in \mathbf{H}^{1}(\Omega)$$

かつ評価式

$$\|\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\mathrm{div}_{\tau}\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le C\{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^{2}(\Omega)} + \|\mathrm{rot}\ \mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^{2}(\Omega)}\} \text{ for } {}^{\forall}\mathbf{v} \in \mathbf{E}_{\mathrm{rot}}\,(\Omega)$$

が成立する.

(II) $\tau_{\mathbf{n}}$ の右逆作用素 $\mathcal{R}_{\partial\Omega}$: $\chi(\partial\Omega) \longrightarrow \mathbf{E}_{\mathrm{rot}}\,(\Omega)$ が存在し,

$$< \tau_{\mathbf{n}}(\mathcal{R}_{\partial\Omega}\mathbf{v}), \Psi >_{\partial\Omega} = < (\mathcal{R}_{\partial\Omega}\mathbf{v}) \times \mathbf{n}, \Psi >_{\partial\Omega} = < \mathbf{v}, \Psi >_{\partial\Omega} \text{ for } {}^{\forall}\Psi \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

かつ評価式

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{R}_{\partial\Omega}\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^{2}(\Omega)} + \|\mathrm{rot}\ \mathcal{R}_{\partial\Omega}\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}^{2}(\Omega)} \\ &\qquad \le C\{\|\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{v})\|_{\mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\mathrm{div}_{\tau}\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\} \text{ for } {}^{\forall}\mathbf{v} \in \chi(\partial\Omega) \end{aligned}$$

が成立する.

更に，拡張作用素 $\mathcal{R}_{\partial\Omega}$ が injective なので，**Proposition 1** から直ちに次を得る.

<u>**Corollary 1**</u>

$\mathbf{b} \in \tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{E}^{0}_{\mathrm{rot}}\,(\Omega))(\subset \chi(\partial\Omega))$ なる任意の $\mathbf{b}$ に対して，$\mathbf{E}_{0} \in \mathbf{E}^{0}_{\mathrm{rot}}\,(\Omega)$ が存在して,

$$\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{E}_{0}) = \mathbf{b} \text{ on } \partial\Omega,\ \mathrm{rot}\ \mathbf{E}_{0} = \mathbf{0} \text{ in } \Omega,$$

および評価式

$$\|\mathbf{E}_{0}\|_{\mathbf{L}^{2}(\Omega)} \le C\{\|\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{b})\|_{\mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\mathrm{div}_{\tau}\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\} \tag{6}$$

[4] 以下，その依存性が文脈から明らかな汎用的定数を C あるいは c と表すことにする.

が成立する．

このProposition 1を用いて，境界条件 $\mathbf{E}\times\mathbf{n}=\mathbf{b}$ を陰に取り込んだ境界値問題 (1) に対応する弱形式を導入していく．$(\mathbf{u},\mathbf{H},p,\mathbf{E})$ を (1) の古典解とする．このとき，(1)(b) の第1式の両辺において $\mathrm{rot}\ \Psi$，$\Psi\in\widetilde{\mathbf{X}_\sigma(\Omega)}$，との $\mathbf{L}^2(\Omega)$-内積[5]をとると

$$\frac{1}{\sigma}(\mathrm{rot}\ \mathbf{H},\mathrm{rot}\ \Psi)-(\mathbf{E},\mathrm{rot}\ \Psi)+\mu(\mathbf{H}\times\mathbf{u},\mathrm{rot}\ \Psi)=\frac{1}{\sigma}(\mathbf{J}_0,\mathrm{rot}\ \Psi). \tag{7}$$

いま，(1)(c) の境界条件 $\mathbf{E}\times\mathbf{n}=\mathbf{b}$ における境界データ $\mathbf{b}$ が，条件

$$\mathbf{b}\in\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{E}^0_{\mathrm{rot}}\ (\Omega))$$

を満たすとすると，Corollary 1より $\mathbf{b}$ の Ω への拡張 $\mathbf{E}_0=\mathcal{R}_{\partial\Omega}\mathbf{b}$ の存在が保障される．更に，

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}_0,\ \mathrm{rot}\ \Psi)&=<\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{E}_0),\Psi>_{\partial\Omega}\\&=<\mathbf{b},\Psi>_{\partial\Omega}\\&=<\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{E}),\Psi>_{\partial\Omega}\\&=(\mathbf{E},\ \mathrm{rot}\ \Psi)\end{aligned}$$

が成り立つので，(7) は

$$\frac{1}{\sigma}(\mathrm{rot}\ \mathbf{H},\ \mathrm{rot}\ \Psi)+\mu(\mathbf{H}\times\mathbf{u},\ \mathrm{rot}\ \Psi)=(\frac{1}{\sigma}\mathbf{J}_0+\mathbf{E}_0,\ \mathrm{rot}\ \Psi)\ \text{for}\ {}^\forall\Psi\in\widetilde{\mathbf{X}_\sigma(\Omega)} \tag{8}$$

と書き換えられる．

一方，(1)(a) の第1式の両辺において $\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_{0,\sigma}(\Omega)$ との $\mathbf{L}^2(\Omega)$ 内積をとり，部分積分を実行すると

$$\nu(\nabla\mathbf{u},\ \nabla\mathbf{v})+((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\ \mathbf{v})-\mu(\mathrm{rot}\ \mathbf{H}\times\mathbf{H},\ \mathbf{v})=(\mathbf{f},\ \mathbf{v}).$$

更に，$\mathrm{rot}\ \mathbf{H}\times\mathbf{H}=-\nabla\frac{|\mathbf{H}|^2}{2}+(\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H}$ に注意すると

$$\nu(\nabla\mathbf{u},\ \nabla\mathbf{v})+((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\ \mathbf{v})-\mu((\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H},\ \mathbf{v})=(\mathbf{f},\ \mathbf{v})\ \text{for}\ {}^\forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1_{0,\sigma}(\Omega) \tag{9}$$

を得る．

従って，上記 (8) と (9) から境界値問題 (1) の弱解の定義として次が適切であることが分かる．

(1) の弱解の定義

境界データ $\mathbf{a}$，q，$\mathbf{b}$ がそれぞれ $\mathbf{a}\in\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ かつ $\int_{\partial\Omega}\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS=0$，$q\in\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ かつ $\int_{\partial\Omega}q\,dS=0$，$\mathbf{b}\in\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{E}^0_{\mathrm{rot}}\ (\Omega))$ を満たし，流体力学的外力と外部電流がそれぞれ $\mathbf{f}\in(\mathbf{H}^1_0(\Omega))'$，$\mathbf{J}_0\in\mathbf{L}^2(\Omega)$ を満たすとする．

このとき，$(\mathbf{u},\ \mathbf{H})\in\mathbf{H}^1(\Omega)\times\widetilde{X_\sigma(\Omega)}$ が $\mathbf{u}=\mathbf{a}$，$\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}=q$ on $\partial\Omega$ を満たし，次の等式を満足するとき，$(\mathbf{u},\ \mathbf{H})$ を (1) の弱解という．

[5]以下，$\mathbf{L}^2(\Omega)$-内積を $(\cdot,\cdot)$ と略記する．

$$\nu(\nabla \mathbf{u},\, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\, \mathbf{v}) - \mu((\mathbf{H}\cdot\nabla)\mathbf{H}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f},\, \mathbf{v}) \text{ for } {}^\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_{0,\sigma}(\Omega), \tag{10}$$

$$\frac{1}{\sigma}(\mathrm{rot}\ \mathbf{H},\, \mathrm{rot}\ \Psi) + \mu(\mathbf{H}\times\mathbf{u},\, \mathrm{rot}\ \Psi) = (\frac{1}{\sigma}\mathbf{J}_0 + \mathbf{E}_0,\, \mathrm{rot}\ \Psi) \text{ for } {}^\forall \Psi \in \widetilde{\mathbf{X}_\sigma(\Omega)}, \tag{11}$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega. \tag{12}$$

<u>**Remarks**</u>

(i) 良く知られている Helmholtz 分解を用いると，(10) から (1)(a) 第 1 式の ∇p が復元できる.

(ii) Hodge-Weyl 分解の改良形 (5) を用いると，(11) から次の事実が従う：
$\exists \mathbf{e} \in \mathbf{V}_{har}(\Omega)$, ${}^\exists \phi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ s.t.

$$\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\ \mathbf{H} + \mu\mathbf{H}\times\mathbf{u} - \frac{1}{\sigma}\mathbf{J}_0 - \mathbf{E}_0 = \mathbf{e} + \nabla\phi.$$

よって，$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{e} + \nabla\phi$ とおけば，

$$\frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\ \mathbf{H} + \mu\mathbf{H}\times\mathbf{u} - \frac{1}{\sigma}\mathbf{J}_0 = \mathbf{E}$$

かつ

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ in } \Omega,\ \tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{E}) = \tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{E}_0) = \mathbf{b} \text{ on } \partial\Omega$$

が従い，(1)(b) 第 1 式の $\mathbf{E}$ が復元できることが分かる.

3 Main Theorem およびその証明

本稿における主結果は次のものである.

<u>**Main Theorem**</u>

Ω を Assumption A を満足する $\mathbb{R}^3$ の有界領域とする．境界データ $\mathbf{a}$, q, $\mathbf{b}$ および流体力学的外力 $\mathbf{f}$，外部電流 $\mathbf{J}_0$ に対して次を仮定する：

$$\mathbf{a} \in \mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega) \text{ with } \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}) = 0,$$

$$q \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \text{ with } \int_{\partial\Omega} q\, dS = 0,$$

$$\mathbf{b} \in \tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{E}^0_{\mathrm{rot}}(\Omega)),$$

$$\mathbf{f} \in (\mathbf{H}^1_0(\Omega))',\ \mathbf{J}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega).$$

このとき，境界値問題 (1) の弱解 $(\mathbf{u},\, \mathbf{H}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)$ が少なくとも一つ存在する.

<u>**Remark**</u>

対応する Navier-Stokes 方程式の境界値問題，すなわち (1) において $\mathbf{H} = \mathbf{E} \equiv \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{J}_0 \equiv \mathbf{0}$, $q \equiv 0$, $\mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$ とした場合には，次の <u>**制限された flux 条件**</u>

$$\int_{\Gamma_j} \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\, dS = 0,\ \ j = 0, 1, \ldots, L \tag{13}$$

の下での弱解の存在定理が示されている ([8], [6])[6].

<u>Main Theorem の証明の概略</u>

まず，境界データ q と $\mathbf{a}$ の Ω への拡張を適切な形で与える.

<u>境界データ q の拡張</u>

$q \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ かつ $\int_{\partial\Omega} q\,dS = 0$ であるので，次の Laplace 方程式に対する Neumann 問題の解 $r \in H^2(\Omega)$ が存在することに注意する.

$$\begin{cases} \Delta r = 0 \text{ in } \Omega, \\ \dfrac{\partial r}{\partial \mathbf{n}} = q \text{ on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ここで $\mathbf{Q} = \nabla r$ とおくと，$\mathbf{Q} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ は

$$\text{div } \mathbf{Q} = 0, \text{ rot } \mathbf{Q} = \mathbf{0} \text{ in } \Omega,\ \mathbf{Q}\cdot\mathbf{n} = q \text{ on } \partial\Omega$$

を満たし，評価式

$$\|\mathbf{Q}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le C\|q\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \tag{14}$$

を満足する q の Ω への拡張となっている.

<u>境界データ $\mathbf{a}$ の拡張</u> (**Alekseev [1] のアイデアによる.**)

まず，境界データ $\mathbf{a} \in \mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)$ の Ω への通常の拡張を $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbf{W}^{1,3}(\Omega)$ とおく．すなわち，$\hat{\mathbf{A}}$ は $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{a}$ on $\partial\Omega$ かつ $\|\hat{\mathbf{A}}\|_{\mathbf{W}^{1,3}(\Omega)} \le c\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)}$ を満たすベクトル場とする．次に，Hopf の cut-off 関数 θ_ϵ[7] をとり，$\hat{\mathbf{A}}_\epsilon = \theta_\epsilon \hat{\mathbf{A}}$, とおくと，この $\hat{\mathbf{A}}_\epsilon$ は次を満たすことが分かる：$\hat{\mathbf{A}}_\epsilon \in \mathbf{W}^{1,3}(\Omega)$, $\hat{\mathbf{A}}_\epsilon = \mathbf{a}$ on $\partial\Omega$ であり，評価式

$$\begin{aligned} &\|\hat{\mathbf{A}}_\epsilon\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \le \hat{C}^1_\epsilon \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)} \\ &\|\hat{\mathbf{A}}_\epsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \le c\|\hat{\mathbf{A}}_\epsilon\|_{\mathbf{W}^{1,3}(\Omega)} \le \hat{C}^2_{1/\epsilon}\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)} \end{aligned} \tag{15}$$

が成立する．ここに，$\hat{C}^1_\epsilon$ と $\hat{C}^2_{1/\epsilon}$ は $\hat{C}^1_\epsilon \to 0$, $\hat{C}^2_{1/\epsilon} \to \infty$ as $\epsilon \to 0$ なる定数.

---

[6] この点からみると，Main Theorem における条件 $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}) = 0$ は強すぎるようにも思える．$\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}) = 0$ がテクニカルに必要にとなる部分は，以下の <u>証明の概略</u> において指摘するが，この条件が電磁現象を扱う際に本質的に現れる制限なのか否かは筆者には不明である.

[7] Hopf の cut-off 関数とは，$\theta_\epsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ($\epsilon > 0$:パラメータ) で

$$\theta_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & (\text{dist}(x,\partial\Omega) \le e^{-2/\epsilon} \text{のとき}) \\ 0 & (\text{dist}(x,\partial\Omega) > 2e^{-1/\epsilon} \text{のとき}), \end{cases}$$

かつ

$$|\nabla\theta_\epsilon(x)| \le \frac{\epsilon}{\text{dist}(x,\partial\Omega)} \quad (\text{dist}(x,\partial\Omega) > 2e^{-1/\epsilon} \text{のとき})$$

を満たす関数をいう.

ここで，次の既知の結果を用いる．

Proposition 2 ([3]:Theorem III.3.4)

$1 < r < \infty$ とする．$\mathbf{g} \in \mathbf{E}^r_{\mathrm{div}}(\Omega)$ が $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{g}) = 0$ を満たすならば，あるベクトル場 $\mathbf{G} \in \mathbf{W}^{1,r}_0(\Omega)$ が存在して

$$\mathrm{div}\ \mathbf{G} = \mathrm{div}\ \mathbf{g} \ \text{ in } \Omega$$

および評価式

$$\|\mathbf{G}\|_{\mathbf{W}^{1,r}(\Omega)} \le c\|\mathrm{div}\ \mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^r(\Omega)},\ \|\mathbf{G}\|_{\mathbf{L}^r(\Omega)} \le c\|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^r(\Omega)} \tag{16}$$

が成立する．ここに，$\mathbf{E}^r_{\mathrm{div}}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^r(\Omega) \,|\, \mathrm{div}\ \mathbf{v} \in \mathrm{L}^r(\Omega)\}$ である．

境界データ $\mathbf{a}$ の拡張法より $\hat{\mathbf{A}}_\epsilon \in \mathbf{W}^{1,3}(\Omega)$ かつ $\gamma_{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{A}}_\epsilon) = \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}) = 0$[8]であった．従って，$\hat{\mathbf{A}}_\epsilon$ に対して上の **Proposition 2** が適用でき，$\overline{\mathbf{A}}_\epsilon \in \mathbf{W}^{1,3}_0(\Omega)$ かつ $\mathrm{div}\ \overline{\mathbf{A}}_\epsilon = \mathrm{div}\ \hat{\mathbf{A}}_\epsilon$ in Ω を満足し，次の評価式を満たすベクトル場 $\overline{\mathbf{A}}_\epsilon$ が存在することが分かる．

$$\|\overline{\mathbf{A}}_\epsilon\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \le c\|\hat{\mathbf{A}}_\epsilon\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \le c\hat{C}^1_\epsilon \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)},$$
$$\|\overline{\mathbf{A}}_\epsilon\|_{\mathbf{W}^{1,3}(\Omega)} \le c\|\mathrm{div}\ \hat{\mathbf{A}}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} \le c\hat{C}^2_{1/\epsilon}\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)}.$$

よって，$\mathbf{A}_\epsilon = \hat{\mathbf{A}}_\epsilon - \overline{\mathbf{A}}_\epsilon$, とおけば，この $\mathbf{A}_\epsilon$ は，$\mathbf{A}_\epsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ かつ $\mathrm{div}\ \mathbf{A}_\epsilon = 0$ in Ω，$\mathbf{A}_\epsilon = \hat{\mathbf{A}}_\epsilon = \mathbf{a}$ on $\partial\Omega$ で次の評価式

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_\epsilon\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} &\le C^1_\epsilon \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)}, \\ \|\mathbf{A}_\epsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} &\le C^2_{1/\epsilon}\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)} \end{aligned} \tag{17}$$

を満足する境界データ $\mathbf{a}$ の Ω への拡張となる．ここに，C^1_ϵ，$C^2_{1/\epsilon}$ は $C^1_\epsilon \to 0$, $C^2_{1/\epsilon} \to \infty$ as $\epsilon \to 0$ なる定数である．

以上の準備の下，新たな未知変数 $\hat{\mathbf{u}}_\epsilon$, $\hat{\mathbf{H}}$ を $\hat{\mathbf{u}}_\epsilon = \mathbf{u} - \mathbf{A}_\epsilon$, $\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - \mathbf{Q} = \mathbf{H} - \nabla r$ として導入すると，容易に

$$\hat{\mathbf{u}}_\epsilon \in \mathbf{H}^1_{0,\sigma}(\Omega),\ \hat{\mathbf{H}} \in \widetilde{\mathbf{X}_\sigma(\Omega)},$$

であり，更に弱形式 (10), (11) は $\hat{\mathbf{u}}_\epsilon$, $\hat{\mathbf{H}}$ に関する次の弱形式に書き換えられることが分かる:

$$\begin{aligned} &< L_1(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \hat{\mathbf{H}}), \mathbf{v} > = < \mathbf{f}_1, \mathbf{v} > \ \text{ for } {}^\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1_{0,\sigma}(\Omega), \\ &< L_2(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \hat{\mathbf{H}}), \Psi > = < \mathbf{f}_2, \Psi > \ \text{ for } {}^\forall \Psi \in \widetilde{\mathbf{X}_\sigma(\Omega)}. \end{aligned} \tag{18}$$

ここに，

$$\begin{aligned} < L_1(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \hat{\mathbf{H}}), \mathbf{v} > = {}& \nu(\nabla\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \nabla\mathbf{v}) \\ & + ((\hat{\mathbf{u}}_\epsilon \cdot \nabla)\mathbf{A}_\epsilon, \mathbf{v}) + ((\mathbf{A}_\epsilon \cdot \nabla)\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \mathbf{v}) + ((\hat{\mathbf{u}}_\epsilon \cdot \nabla)\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \mathbf{v}) \\ & - \mu((\hat{\mathbf{H}} \cdot \nabla)\mathbf{Q}, \mathbf{v}) - \mu((\mathbf{Q} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v}) - \mu((\hat{\mathbf{H}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{H}}, \mathbf{v}), \\ < \mathbf{f}_1, \mathbf{v} > = {}& < \mathbf{f} - (\mathbf{A}_\epsilon \cdot \nabla)\mathbf{A}_\epsilon - \mu(\mathbf{Q} \cdot \nabla)\mathbf{Q} - \nu\Delta\mathbf{A}_\epsilon, \mathbf{v} >, \end{aligned}$$

[8]ここで，条件 $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}) = 0$ を用いている．

$$< L_2(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\hat{\mathbf{H}}),\Psi >= \frac{1}{\sigma}(\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}},\,\mathrm{rot}\ \Psi)$$
$$+\,\mu(\hat{\mathbf{H}}\times\mathbf{A}_\epsilon,\,\mathrm{rot}\ \Psi)+\mu(\mathbf{Q}\times\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\mathrm{rot}\ \Psi)+\mu(\hat{\mathbf{H}}\times\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\mathrm{rot}\ \Psi),$$
$$< \mathbf{f}_2,\Psi >= (\frac{1}{\sigma}\mathbf{J}_0+\mathbf{E}_0-\mu\mathbf{Q}\times\mathbf{A}_\epsilon,\,\mathrm{rot}\ \Psi)$$

である．

境界値問題(1)の弱解の存在定理の証明においては，弱形式 $< L_1(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\hat{\mathbf{H}}),\,\hat{\mathbf{u}}_\epsilon >$ と $< L_2(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\hat{\mathbf{H}}),\,\hat{\mathbf{H}} >$ に対する次の coerciveness を示すことが本質的となる．

Lemma

ある正定数 ϵ_0 が存在して次が成立：任意の ϵ: $0<\epsilon\le\epsilon_0$ に対して評価式

$$< L_1(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\hat{\mathbf{H}}),\,\hat{\mathbf{u}}_\epsilon > + < L_2(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\hat{\mathbf{H}}),\,\hat{\mathbf{H}} > \ge\ \delta\{\|\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}+\|\hat{\mathbf{H}}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\} \tag{19}$$

$$\text{for } {}^\forall\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\in\mathbf{H}^1_{0,\sigma}(\Omega),\ {}^\forall\hat{\mathbf{H}}\in\widetilde{\mathbf{X}_\sigma(\Omega)}$$

が成立する．ここに，δ は

$$\delta=\frac{1}{2}\min(\nu c_1^{-1},\,\frac{1}{\sigma}c_0^{-1})^9$$

なる定数．

Lemma の証明

$\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\in\mathbf{H}^1_{0,\sigma}(\Omega),\ \hat{\mathbf{H}}\in\widetilde{\mathbf{X}_\sigma(\Omega)}$ に注意して，部分積分法を適用すると

$$\begin{aligned}< L_1(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\hat{\mathbf{H}}),\hat{\mathbf{u}}_\epsilon >&= \nu(\nabla\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\nabla\hat{\mathbf{u}}_\epsilon)\\
&+((\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\cdot\nabla)\mathbf{A}_\epsilon,\,\hat{\mathbf{u}}_\epsilon)+((\mathbf{A}_\epsilon\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\hat{\mathbf{u}}_\epsilon)+((\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\hat{\mathbf{u}}_\epsilon)\\
&-\mu((\hat{\mathbf{H}}\cdot\nabla)\mathbf{Q},\,\hat{\mathbf{u}}_\epsilon)-\mu((\mathbf{Q}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{H}},\,\hat{\mathbf{u}}_\epsilon)-\mu((\hat{\mathbf{H}}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{H}},\,\hat{\mathbf{u}}_\epsilon)\\
&=\nu\|\nabla\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|^2_{\mathbf{L}^2}-(\mathbf{A}_\epsilon,\,(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}_\epsilon)\\
&-\mu((\hat{\mathbf{H}}\cdot\nabla)\mathbf{Q},\,\hat{\mathbf{u}}_\epsilon)-\mu((\mathbf{Q}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{H}},\,\hat{\mathbf{u}}_\epsilon)-\mu((\hat{\mathbf{H}}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{H}},\,\hat{\mathbf{u}}_\epsilon),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}< L_2(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\hat{\mathbf{H}}),\hat{\mathbf{H}} >&= \frac{1}{\sigma}(\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}},\,\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}})\\
&+\mu(\hat{\mathbf{H}}\times\mathbf{A}_\epsilon,\,\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}})+\mu(\mathbf{Q}\times\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}})+\mu(\hat{\mathbf{H}}\times\hat{\mathbf{u}}_\epsilon,\,\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}})\\
&=\frac{1}{\sigma}\|\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}}\|^2_{\mathbf{L}^2}+\mu(\hat{\mathbf{H}}\times\mathbf{A}_\epsilon,\,\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}})\\
&+\mu(\mathrm{rot}\ (\mathbf{Q}\times\hat{\mathbf{u}}_\epsilon),\,\hat{\mathbf{H}})+\mu(\mathrm{rot}\ (\hat{\mathbf{H}}\times\hat{\mathbf{u}}_\epsilon),\,\hat{\mathbf{H}})\end{aligned}$$

---

[9] c_0 および c_1 は，それぞれ Friedrichs の不等式（21）および Poincarè の不等式（22）に現れる定数である．

を得る．更に，§1で挙げたベクトル解析の公式を用いると

$$
\begin{aligned}
&< L_1(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \hat{\mathbf{H}}), \hat{\mathbf{u}}_\epsilon > + < L_2(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \hat{\mathbf{H}}), \hat{\mathbf{H}} > \\
&\quad = \nu\|\nabla\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|^2_{\mathbf{L}^2} + \frac{1}{\sigma}\|\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}}\|^2_{\mathbf{L}^2} - (\mathbf{A}_\epsilon, (\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}_\epsilon) \\
&\quad\ - \mu((\hat{\mathbf{H}}\cdot\nabla)\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{u}}_\epsilon) - \mu((\mathbf{Q}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{u}}_\epsilon) - \mu((\hat{\mathbf{H}}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{u}}_\epsilon) \\
&\quad + \mu(\hat{\mathbf{H}}\times\mathbf{A}_\epsilon, \mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}}) + \mu((\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\cdot\nabla)\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{H}}) - \mu((\mathbf{Q}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \hat{\mathbf{H}}) \\
&\quad + \mu((\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\cdot\nabla)\hat{\mathbf{H}}, \hat{\mathbf{H}}) - \mu((\hat{\mathbf{H}}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \hat{\mathbf{H}}) \\
&\quad = \nu\|\nabla\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|^2_{\mathbf{L}^2} + \frac{1}{\sigma}\|\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}}\|^2_{\mathbf{L}^2} - (\mathbf{A}_\epsilon, (\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}_\epsilon) + \mu(\hat{\mathbf{H}}\times\mathbf{A}_\epsilon, \mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}}) \\
&\qquad\quad - \mu((\hat{\mathbf{H}}\cdot\nabla)\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{u}}_\epsilon) + \mu((\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\cdot\nabla)\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{H}})
\end{aligned}
\tag{20}
$$

が導かれる[10]．

ここでまず，§2で指摘したように $\hat{\mathbf{H}} \in \widetilde{\mathbf{X}_\sigma(\Omega)}$ なので Friedrichs の不等式から

$$\|\hat{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{H}^1} \le c_0\|\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{L}^2} \tag{21}$$

が，また Poincarè の不等式からは

$$\|\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|_{\mathbf{H}^1} \le c_1\|\nabla\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|_{\mathbf{L}^2} \tag{22}$$

が従うことに注意する．よって，(20) 式の最右辺の最初の 2 項は

$$\nu\|\nabla\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|^2_{\mathbf{L}^2} + \frac{1}{\sigma}\|\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}}\|^2_{\mathbf{L}^2} \ge \nu c_1^{-1}\|\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|^2_{\mathbf{H}^1} + \frac{1}{\sigma}c_0^{-1}\|\hat{\mathbf{H}}\|^2_{\mathbf{H}^1} \tag{23}$$

と評価できる．

次に拡張 $\mathbf{A}_\epsilon$ の性質 (17) とソボレフの埋蔵定理より，次が従う．

$$|(\mathbf{A}_\epsilon, (\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\cdot\nabla)\hat{\mathbf{u}}_\epsilon)| \le \|\mathbf{A}_\epsilon\|_{\mathbf{L}^3}\|\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|_{\mathbf{L}^6}\|\nabla\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|_{\mathbf{L}^2} \le C_aC_\epsilon^1\|\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|^2_{\mathbf{H}^1} \tag{24}$$

$$|(\hat{\mathbf{H}}\times\mathbf{A}_\epsilon, \mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}})| \le \|\hat{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{L}^6}\|\mathbf{A}_\epsilon\|_{\mathbf{L}^3}\|\mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{L}^2} \le C_bC_\epsilon^1\|\hat{\mathbf{H}}\|^2_{\mathbf{H}^1}. \tag{25}$$

ここに，C_a，C_b は $\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)}$ にのみ依存する定数である．

一方，拡張 $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{Q} = \nabla r$ として与えられているので，容易に

$$
\begin{aligned}
&- \mu((\hat{\mathbf{H}}\cdot\nabla)\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{u}}_\epsilon) + \mu((\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\cdot\nabla)\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{H}}) \\
&= -\mu((\hat{\mathbf{H}}\cdot\nabla)\nabla r, \hat{\mathbf{u}}_\epsilon) + \mu((\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\cdot\nabla)\nabla r, \hat{\mathbf{H}}) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{26}
$$

となることが確かめられる．

---

[10] (20) 式の最右辺第 4 項目の $\mu(\hat{\mathbf{H}}\times\mathbf{A}_\epsilon, \mathrm{rot}\ \hat{\mathbf{H}})$ の評価が，従来 Navier-Stokes 方程式に対して用いられてきた解析法の直接の適用を困難にしている部分の一つである．すなわち，境界データ $\mathbf{a}$ の拡張として Navier-Stokes 方程式の解析で有効であった Hopf による cut-off 関数と Hardy の不等式を組み合わせた議論がこの部分に適用できないことが分かる．§4 今後の課題も見よ．

以上の (20), (23), (24), (25) および (26) を合わせると次の評価式を得る．

$$
\begin{aligned}
&(L_1(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \hat{\mathbf{H}}), \hat{\mathbf{u}}_\epsilon) + (L_2(\hat{\mathbf{u}}_\epsilon, \hat{\mathbf{H}}), \hat{\mathbf{H}}) \\
&\geq \nu c_1^{-1}\|\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|_{\mathbf{H}^1}^2 + \frac{1}{\sigma}c_0^{-1}\|\hat{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{H}^1}^2 \\
&\quad - C_a C_\epsilon^1\|\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|_{\mathbf{H}^1}^2 - C_b C_\epsilon^1\|\hat{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{H}^1}^2.
\end{aligned}
$$

C_ϵ^1 は $C_\epsilon^1 \to 0$ as $\epsilon \to 0$ なる定数だったので，**Lemma** の主張は証明された．

一方，$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{u}}_\epsilon$，$\Psi = \hat{\mathbf{H}}$ としたときの (18) の右辺は，(14)，(17) および **Corollary 1** から，それぞれ

$$
\begin{aligned}
|<\mathbf{f}_1, \hat{\mathbf{u}}_\epsilon>| &\leq \{\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} + \|\mathbf{A}_\epsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|\mathbf{Q}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \nu\|\mathbf{A}_\epsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\}\|\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&\leq C\{\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} + (C_{1/\epsilon}^2)^2\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)}^2 + \|q\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + \nu C_{1/\epsilon}^2\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)}\}\|\hat{\mathbf{u}}_\epsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)},
\end{aligned} \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
|<\mathbf{f}_2, \hat{\mathbf{H}}>| &\leq \{\frac{1}{\sigma}\|\mathbf{J}_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\mathbf{E}_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + C\mu\|\mathbf{Q}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\|\mathbf{A}_\epsilon\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}\}\|\hat{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \\
&\leq C\{\frac{1}{\sigma}\|\mathbf{J}_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{b})\|_{\mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \|\mathrm{div}_\tau\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\
&\qquad + \mu C_{1/\epsilon}^2\|q\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)}\}\|\hat{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}
\end{aligned} \tag{28}
$$

と評価される．従って，(18) と **Lemma** および (27)，(28) を合わせると，境界値問題 (1) の弱解の $\mathbf{H}^1(\Omega)$-ノルムに関する次のア-プリオリ評価を得る．

$$
\|\hat{\mathbf{u}}_{\epsilon_0}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \delta^{-1}C\{\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega)} + (C_{1/\epsilon_0}^2)^2\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)}^2 + \|q\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}^2 + \nu C_{1/\epsilon_0}^2\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)}\}, \tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\hat{\mathbf{H}}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \leq \delta^{-1}C\{&\frac{1}{\sigma}\|\mathbf{J}_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\tau_{\mathbf{n}}(\mathbf{b})\|_{\mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\
&+ \|\mathrm{div}_\tau\mathbf{b}\|_{\mathbf{H}_{tan}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + \mu C_{1/\epsilon_0}^2\|q\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\|\mathbf{a}\|_{\mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)}\}.
\end{aligned} \tag{30}
$$

このア・プリオリ評価 (29)，(30) と Leray-Schauder の不動点定理および Leray-Schauder の写像度のホモトピー不変性を用いると，Navier-Stokes 方程式に対する解析においてよく知られている議論により (1) の弱解の存在が示される（詳しくは，例えば [7] p.32 を参照せよ）．

4 今後の課題

今後の課題として，非斉次境界条件下の定常的 MHD 方程式系の境界値問題 (1) に対する弱解の存在定理 (Main Theorem) に係るいくつかの問題を挙げる．

(I) 次で定義される不等式は，非斉次境界値問題 (1) の弱解の存在を示す際に本質的となる．

Definition (Maxwell Type の Leray の不等式)

境界データ $\mathbf{a}$ が $\mathbf{a} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ かつ $\int_\Omega \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$ を満たしているとする．このとき，

$^{\forall}\epsilon > 0,\ ^{\exists}\mathbf{A}_\epsilon \in \mathbf{H}^1(\Omega)$: div $\mathbf{A}_\epsilon = 0$ in Ω and $\mathbf{A}_\epsilon = \mathbf{a}$ on $\partial\Omega$ s.t.

$$|((\varphi \cdot \nabla)\varphi,\ \mathbf{A}_\epsilon)| \le \epsilon \|\nabla\varphi\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \text{ for } ^{\forall}\varphi \in \mathbf{H}^1_{0,\sigma}(\Omega), \tag{31}$$

$$|((\psi \times \mathbf{A}_\epsilon,\ \mathrm{rot}\ \psi)| \le \epsilon \|\psi\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \text{ for } ^{\forall}\psi \in \widetilde{\mathbf{X}_\sigma(\Omega)} \tag{32}$$

が成立するとき，Maxwell Type の Leray の不等式が $\mathbf{a}$ および Ω に対して成り立つ という.

境界値問題 (1) は流体現象と電磁現象の相互作用を対象にしていることから，不等式 (31) に加え，新たに不等式 (32) の成立を要請する点に特に注意する.

本稿では，Alekseev のアイデアを用いることにより，$\mathbf{a} \in \mathbf{W}^{\frac{2}{3},3}(\partial\Omega)$ with $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}) = 0$ なる条件を満たすデータ $\mathbf{a}$ に対しては Maxwell Type の Leray の不等式が成立することを示したのである. 従って，自然に以下の問題が提起されるであろう.

・$\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}) = 0$ より弱い条件の下でも，Maxwell Type の Leray の不等式が成り立つだろうか？（2 次元流に限定したときはどうか？）
・Maxwell Type の Leray の不等式の成立と領域 Ω の位相的性質との関係は？

(II) Main Theorem でその存在を示した弱解の安定性および正則性の検討.

(III) 粘性係数 $\nu = 0$ and (or) 電気伝導係数 $\sigma = \infty$ としたときの (1) の弱解の存在定理の検討.

(IV) 物理的パラメータ ν, σ を動かしたときの弱解の分岐現象の検討.

References

[1] Alekseev, G. V., Solvability of control problems for staionary equations of magnetohydrodynamics of a viscous fluid. *Siberian Math. J.* Vol. 45, 197-213 (2004).

[2] Alonso, A., Valli, A., Some remarks on the characterization of the space of tangential trace of $H(\mathrm{rot}\ ;\Omega)$ and the construction of an extension operator. *Manuscripta. Math. J.* Vol. 89, 159-178 (1996).

[3] Galdi, G.P., *An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations. Steady-State Problems,* 2nd Edition, Springer, New York-Dordrechet-Heidelberg-London, 2011.

[4] Girault, V., Raviart, P.A. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Theory and Algorithms,* Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[5] Kozono, H., Yanagisawa, T., L^r-variational inequality for vector fields and the Helmholtz-Weyl decomposition in bounded domains. *Indiana Univ. Math. J.* Vol. 58, 1853-1920 (2009).

[6] Kozono, H., Yanagisawa, T.,Nonhomogeneous boundary value problems for stationary Navier-Stokes Equations in a multiply connected domain. *Pacific J. Math.* Vol. 243, 127-150 (2009).

[7] Ladyzhenskaya, O.A., *The mathematical theory of viscous incompressible flow.* 2nd Edition, Gordon and Breach Science Publication, New York, 1969.

[8] Leray, J., Etude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique. *J. Math. Pures Appl.* Vol. 12, 1–82, (1933).