数理解析研究所講究録
第 1907 巻 2014 年 44-49

パラメタを含む代数的局所コホモロジー類の満たす偏微分方程式系

渋田敬史
TAKAFUMI SHIBUTA
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
INSTITUTE OF MATHEMATICS FOR INDUSTRY, KYUSHU UNIVERSITY*

田島 慎一
SHINICHI TAJIMA
筑波大学大学院数理物質科学系・数学域
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA†

$\mathbb{C}^n$ の座標を $x=(x_1,\ldots,x_n)$ とし, 原点 O の近傍 X 上正則で, 原点 O を孤立特異点として持つ関数 $f=f(x_1,\ldots,x_n)\in\mathcal{O}_{X,O}$ を取る. $\mathcal{D}_{X,O}=\mathcal{O}_{X,O}\langle\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\rangle$ を X 上の線形偏微分作用素全体のなす層 $\mathcal{D}_X$ の原点における茎とする. イデアル $\mathcal{J}_f=\langle\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle\subset\mathcal{O}_{X,O}$ を f のヤコビイデアルと呼ぶ. 原点に台を持つ n 次代数的局所コホモロジー類であり, $\mathcal{J}_f$ で annihilate されるようなもの全体のなす集合を

$$\Omega_f=\{\psi\in\mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)\mid \psi g=0,\forall g\in\mathcal{J}_f\}$$

とおく. ここで,

$$\mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)\cong\mathbb{C}[x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1}]\frac{dx}{x_1\cdots x_n},$$

$dx=dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ であり, 右 $\mathcal{D}_{X,O}$ 加群としての構造が $gdx\in\mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)$, $P\in\mathcal{D}_{X,O}$ に対し,

$$(gdx)P=(P^*g)dx$$

で定まっていることに注意する (ただし, P^* は P の形式的随伴作用素). f は孤立特異を持つので, Ω_f は長さ有限の $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群であり, $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群としては一つの元で生成される. 以下では, Ω_f の $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群としての生成元を一つ固定し, ω_f で表すこと

*e-mail: shibuta@imi.kyushu-u.ac.jp
†e-mail: tajima@math.tsukuba.ac.jp

にする. $\mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)$ は右 $\mathcal{D}_{X,O}$ 加群であるので, ω_f の $\mathcal{D}_{X,O}$ 加群としての annihilator ideal を考えることができる;

$$\mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f) = \{P \in \mathcal{D}_{X,O} \mid \omega_f P = 0\}.$$

$\mathcal{D}_{X,O}$ には階数に関するフィルトレーションが入っており, $\mathcal{D}^{(k)}_{X,O} \subset \mathcal{D}_{X,O}$ を 階数 k 以下の偏微分作用素の集合とする. 各自然数 k に対し, $\mathcal{D}^{(k)}_{X,O} \cap \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ で生成される右イデアルを $\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ と表すことにする. 任意の k に対し, $\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f) \subset \mathcal{A}nn^{(k+1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ であり, 十分大きい k に対して $\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f) = \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ である. $\mathcal{A}nn^{(0)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ は $\mathcal{J}_f$ で生成されるイデアルであり, 任意の k に対して $\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ はホロノミックである. ホロノミック系 $\frac{\mathcal{D}_{X,O}}{\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)}$ の重複度を $\mu_f^{(k)}$ で表すことにする. $\mu_f^{(0)} \geq \mu_f^{(1)} \geq \mu_f^{(2)} \geq \cdots$, が成り立ち, $\mu_f^{(0)}$ は f のミルナー数であり, $\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f) = \mathcal{A}nn_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ となる k に対して $\mu_f^{(k)} = 1$ である. $\mu_f^{(k)}$ と f の特異点との関係は, [4, 5, 6, 8, 11] で議論されている.

ヤコビイデアル $\mathcal{J}_f$ の標準基底を計算する手法として, Ω_f の $\mathbb{C}$-基底を計算し, 多変数留数に関するグロタンディーク双対性を用いる手法が与えられている ([1, 2, 10, 9]). 本稿ではこの手法を拡張し, 双対性定理を用いて $\mathcal{A}nn^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ を逐次的に計算する方法を与える. 他の手法としては, 問題をサイズの小さい問題に分割し, 線形代数を用いて計算する方法が [3] で与えられている.

1 準備

1.1 Matlis dual

R をネター局所環, E を R の剰余体の入射閉包とする. R 加群 M に対し, $M^\vee := \mathrm{Hom}_R(M, E)$ を M の Matlis dual と呼ぶ. $\ell_R(M) = \ell(M)$ を M の長さとする. $R = \mathcal{O}_{X,O}$ のとき, $E \cong \mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)$ で, $\ell(M) = \dim_{\mathbb{C}} M$ である. 自由 R 加群 $F = R^{\oplus r}$ の部分加群 $M \subset F$ を取ると, $(F/M)^\vee \subset F^\vee = E^{\oplus r}$ より, $(F/M)^\vee$ は $E^{\oplus r}$ の部分加群とみなせる. 一方, $E^{\oplus r}$ の部分 R 加群 $V \subset E^{\oplus r}$ で長さ有限のものを取ると, ある $M \subset F$ により $V^\vee \cong F/M$ となる.

命題 1. $M \subset F$, $V \subset E^{\oplus r}$ で, $\ell(F/M) < \infty$, $\ell(V) < \infty$ を満たすものを取る. このとき, $(F/M)^{\vee\vee} \cong F/M$, $V^{\vee\vee} \cong V$ が成り立つ.

命題1は Matlis 双対性定理の特別な場合である. 命題1により, $M \subset F$ を知るには, $(F/M)^\vee$ が分かればよいことが分かる. 自然なペアリング $\langle \cdot, \cdot \rangle : F \times F^\vee \to E$ 存在するが, $f \in F$ に対し, $f \in M$ であることと, $\langle f, \eta \rangle = 0$ が任意の $\eta \in (F/M)^\vee$ に対して成り立つことが同値である. $R = \mathcal{O}_{X,O}$ のとき, このペアリングは

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}^{\oplus r}_{X,O} \times \mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)^{\oplus r} & \to & \mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X) \\ ((g_1, \ldots, g_r), (\eta_1, \ldots, \eta_r)) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^r g_i \eta_i \end{array}$$

となる. 自由 R 加群 F と長さ有限の R 加群 N, および R 準同型写像 $\varphi : F \to N$ が与えられたとき,

$$0 \to F/\operatorname{Ker}\varphi \xrightarrow{\varphi} N \to N/\varphi(F) \to 0$$

という短完全列を得る.

$$0 \leftarrow (F/\operatorname{Ker}\varphi)^\vee \xleftarrow{\varphi^\vee} N^\vee \leftarrow (N/\varphi(F))^\vee \leftarrow 0$$

も完全なので, $(F/\operatorname{Ker}\varphi)^\vee \cong \operatorname{Image}(\varphi^\vee)$ である. よって, 写像の核の計算を, Matlis dual により写像の像の計算に置き換えることができる.

1.2 標準基底

単項式の集合 $\{x^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$ 上の全順序 $\prec$ が $\mathcal{O}_{X,O}$ の局所順序であるとは, 次の 2 つの条件を満たすときである.

- 任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対し, $x^\alpha \prec 1$.
- 任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対し, $x^\alpha \prec x^\beta$ ならば, $x^{\alpha+\gamma} \prec x^{\beta+\gamma}$.

任意の単項式全体の集合 Λ と局所順序 $\prec$ に対し, Λ の $\prec$ に関する最大限が存在する. $g(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}} c_\alpha x^\alpha \in \mathcal{O}_{X,O}$ $(c_\alpha \in \mathbb{C})$ に対し, $\mathrm{LT}_\prec(g) := \max_\prec\{x^\alpha \mid c_\alpha \neq 0\}$ を g の $\prec$ に関する先頭項と呼ぶ.

$F = \mathcal{O}^{\oplus r}_{X,O}$ を階数 r の自由 $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群, F の基底を $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r$ とする. $\mathcal{O}_{X,O}$ の局所順序 $\prec$ を一つ固定する. F の単項式全体の集合 $\{x^\alpha \mathbf{e}_i \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, 1 \leq i \leq r\}$ 上の全順序 $\prec_F$ が局所順序とは, 次の 2 つの条件を満たすときである:

- 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $1 \leq i \leq r$ に対して, $x^\alpha \prec x^\beta$ ならば $x^\alpha \mathbf{e}_i \prec_F x^\beta \mathbf{e}_i$
- 任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $1 \leq i, j \leq r$ に対し, $x^\alpha \mathbf{e}_i \prec_F x^\beta \mathbf{e}_j$ ならば, $x^{\alpha+\gamma} \mathbf{e}_i \prec_F x^{\beta+\gamma} \mathbf{e}_j$.

任意の F の単項式の集合に対し, $\prec_F$ に関する最大限が存在し, $m \in F$ に対し, 先頭項 $\mathrm{LT}_{\prec_F}(m)$ を同様に定義できる. 部分 $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群 $M \subset F$ に対し, $\mathbb{C}[x]$ 加群

$$\mathrm{LT}_{\prec_F}(M) := \langle \mathrm{LT}_{\prec_F}(m) \mid m \in M \rangle_{\mathbb{C}[x]} \subset \mathbb{C}[x]^{\oplus r}$$

を M の $\prec_F$ に関するイニシャル加群と呼ぶ. $\mathrm{LT}_{\prec_F}(M)$ に含まれない単項式を, M の $\prec_F$ に関する標準単項式と呼ぶ. M の部分集合 $\{m_1, \ldots, m_s\}$ が M の $\prec_F$ に関する標準基底とは, $\mathrm{LT}_{\prec_F}(m_1), \ldots, \mathrm{LT}_{\prec_F}(m_s)$ が $\mathrm{LT}_{\prec_F}(M)$ を生成するときを言う.

さて, $M \subset F$ を, $\ell(F/M) < \infty$ なる部分 $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群とする. イデアルの場合 ([2]) と同様に, $(F/M)^\vee$ の $\mathbb{C}$ 基底を用いて, M の標準基底を以下の様にして計算することができる.

$F^\vee = E^{\oplus r} = \mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)^{\oplus r}$ の単項式の集合 $\{\frac{dx}{x^{\alpha+1}}\mathbf{e}^\vee_i \mid \alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}\}$ 上の全順序 $\prec^\vee_F$ を,

$$\frac{dx}{x^{\alpha+1}}\mathbf{e}^\vee_i \prec^\vee_F \frac{dx}{x^{\beta+1}}\mathbf{e}^\vee_j \overset{def}{\Longleftrightarrow} x^\alpha \mathbf{e}_i \succ_F x^\beta \mathbf{e}_j$$

で定義する. この順序を, ここでは $\prec_F$ から定まる $\mathcal{H}^n_{[O]}(\Omega^n_X)^{\oplus r}$ の項順序と呼ぶことにする. $\eta = \displaystyle\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}, 1\leq i\leq r} c_{\alpha,i}\frac{dx}{x^{\alpha+1}}\mathbf{e}^\vee_i$, $c_{\alpha,i} \in \mathbb{C}$, に対し,

$$\mathrm{LT}_{\prec^\vee_F}(\eta) = \max_{\prec^\vee_F}\left\{\frac{dx}{x^{\alpha+1}}\mathbf{e}^\vee_i \mid c_{\alpha,i} \neq 0\right\}$$

とする. $(F/M)^\vee$ の $\prec^\vee_F$ に関して階段状の $\mathbb{C}$ ベクトル空間としての基底を $\eta_1, \ldots, \eta_\ell$,

$$\eta_j = \frac{dx}{x^{\beta_j+1}}\mathbf{e}^\vee_{i_j} + \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, 1\leq i\leq r} c^{(j)}_{\alpha,i}\frac{dx}{x^{\alpha+1}}\mathbf{e}^\vee_i,$$

$\mathrm{LT}_{\prec^\vee_F}(\eta) = \frac{dx}{x^{\beta_j+1}}\mathbf{e}^\vee_{i_j}$, とすると, 次が成り立つ.

(1) $\{x^{\beta_j}\mathbf{e}_{i_j} \mid j = 1, \ldots, \ell\}$ が M の $\prec_F$ に関する標準単項式の集合,

(2) $x^\alpha \mathbf{e}_i \in \mathrm{LT}_{\prec_F}(M)$ ならば, $x^\alpha\mathbf{e}_i - \sum_{j=1}^{\ell} c^{(j)}_{\alpha,i} x^{\beta_j}\mathbf{e}_{i_j} \in M$.

(1) より $\mathrm{LT}_{\prec_F}(M)$ を計算することができ, $\mathrm{LT}_{\prec_F}(M)$ の各生成元に対して (2) の計算を行うことにより, M の $\prec$ に関する標準基底を求めることができる.

2 計算アルゴリズムの構成

2.1 Annihilator の計算法

非負整数 k に対し, 自由 $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群 $F_k = \mathcal{O}_{X,O}^{\oplus\binom{n+k}{k}}$ の部分 $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群

$$\mathcal{N}^{(k)}(\omega_f) := \left\{(g_\alpha(x))_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}, |\alpha|\leq k} \;\middle|\; \sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}, |\alpha|\leq k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \cdot g_\alpha(x) \in Ann^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)\right\}$$

を定める. $Ann^{(k)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ の生成系を得るには, $\mathcal{N}^{(k)}(\omega_f)$ の $\mathcal{O}_{X,O}$ 加群としての生成系が計算できればよい. $\mathcal{J}_f^{\oplus r} \subset \mathcal{N}^{(k)}(\omega_f)$ なので, $\ell(F_k/\mathcal{N}^{(k)}(\omega_f)) < \infty$ である. $\mathcal{O}_{X,O}$ の局所順序 $\prec$ と, F_k の局所順序 $\prec_{F_k}$ を固定する. 本節では, Matlis dual を用いて $\mathcal{N}^{(k)}(\omega_f)$ の標準基底を求める方法を与える. 次の定理が中心的役割を果たす.

定理 2 ([7]). P を k 階線形偏微分作用素とする. 次の二つの条件は同値である.

(i) 任意の $g \in \mathcal{J}_f$ に対して $[P, g] \in Ann^{(k-1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ が成り立つ.

(ii) 任意の $1 \leq i \leq n$ に対して $[P, \frac{\partial f}{\partial x_i}] \in Ann^{(k-1)}_{\mathcal{D}_{X,O}}(\omega_f)$ が成り立つ.

(iii) 関数 $h \in \mathcal{O}_{X,O}$ であって $\omega_f(P+h) = 0$ を満たすものが存在する.

$\mathcal{N}^{(0)}(\omega_f) = \mathcal{J}_f$ であり, $(\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_f)^\vee = \Omega_f$ の $\mathbb{C}$ 基底を計算し, それを用いて $\mathcal{J}_f$ の標準基底を計算するアルゴリズムは [1, 2, 10, 9] で与えられている.

2.2 $\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)$ の計算法

ここでは, $(\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_f)^\vee = \Omega_f$ の $\mathbb{C}$ 基底はすでに計算されているものとして, $\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)$ の生成系の計算法を与える.

$$pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)) = \{(a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathcal{O}_{X,O}^{\oplus n} \mid \exists h \in \mathcal{O}_{X,O}, \frac{\partial}{\partial x_1}a_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_1}a_n + h\}$$

とする. これは, 0 階項に対応する要素を消す射影 $pr : F_1 = \mathcal{O}_{X,O}^{n+1} \to \mathcal{O}_{X,O}^n$ による $\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)$ の像である. 定理 2 により, $(a_1, \ldots, a_n)^T \in pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f))$ は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in (\mathcal{N}^{(0)}(\omega_f))^{\oplus n} = \mathcal{J}_f^{\oplus n} \qquad (2.1)$$

と同値である. ここで現れた行列は f のヘッセ行列であり, 以降 H_f で表す. よって,

$$pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)) = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{X,O}^{\oplus n} \xrightarrow{H_f} (\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_f)^{\oplus n})$$

である. ここで, $(\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_f)^\vee = \Omega_f$ であったので, Matlis duality により,

$$(\mathcal{O}_{X,O}^{\oplus n}/pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)))^\vee = \mathrm{Image}(H_f^\vee) = \{(\eta_1, \ldots, \eta_n) \cdot H_f \mid (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \Omega_f^{\oplus n}\}$$

を得る. Ω_f の $\mathbb{C}$ 基底はすでに求まっているので, $(\mathcal{O}_{X,O}^{\oplus n}/pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)))^\vee$ の $\mathbb{C}$ 基底を計算することができる. さらに, 局所順序から定まる順序に関して, 階段状の $\mathbb{C}$ 基底を求めることにより, $pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f))$ の標準基底を計算することができる. $pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f))$ の標準基底の各元 $(a_1, \cdots, a_n)^T$ に対し, $\omega_f(\frac{\partial}{\partial x_1}a_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}a_n) = h\omega_f$ なる h が定理 2 により存在する. この h は, [3] で与えられた方法で計算することができる. これら $(a_1, \ldots, a_n, h)^T$ の形の元と, $(0, \ldots, 0, \frac{\partial f}{\partial x_i})^T$ $(1 \leq i \leq n)$ で $\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)$ は生成される. $(\mathcal{O}_{X,O}^{\oplus n}/pr(\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f)))^\vee$ の $\mathbb{C}$ 基底を $\eta_1, \ldots, \eta_t$, Ω_f の $\mathbb{C}$ 基底を $h_1\omega_f, \ldots, h_\mu\omega_f$ $(h_i \in \mathcal{O}_{X,O})$ とすると,

$$\{(\eta_i, 0) \mid 1 \leq i \leq t\} \cup \left\{\left((\omega_f \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha h_i)_{|\alpha| \leq k}\right) \mid 1 \leq i \leq \mu\right\}$$

が $(\mathcal{O}_{X,O}^{n+1}/\mathcal{N}^{(1)}(\omega_f))^\vee$ の $\mathbb{C}$ 基底となる. $k \geq 2$ の場合も, 定理 2 (ii) の条件を (2.1) の様に行列で表現することにより, $k = 1$ のときと同様に $\mathcal{N}^{(k)}(\omega_f)$ の生成系を構成することができる. この方法は, 関数 f の係数にパラメタを含む場合にも適用可能である.

謝辞

本研究において第一著者は, 科研費 (若手研究 (B): 25800029) の助成を受けています.

参考文献

[1] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について, 数理解析研究所講究録 **1456**, (2005), 126–132.

[2] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II, 数理解析研究所講究録 **1568**, (2007), 74–80.

[3] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジー類に対する偏微分方程式系のスタンダード基底, 数理解析研究所講究録, **1785** (2012), 99–110.

[4] S. Tajima, Y. Nakamura, Algebraic local cohomology classes attached to quasi-homogeneous isolated hypersurface singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), 1–10.

[5] 中村弥生, 田島慎一, Inner modality 4 以下の半擬斉次孤立特異点に付随したホロノミック系について, 数理解析研究所講究録, **1431** (2005), 55–67.

[6] Y.Nakamura, S.Tajima, Unimodal singularities and differential operators, Séminaires et Congrès **10**, Sociétés Mathématiques de France, (2005), 191–208.

[7] 田島慎一, 中村弥生, 孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーとホロノミック系, 数理解析研究所講究録 **1501** (2006), 168–180.

[8] S. Tajima, Y. Nakamura, On holonomic D-modules associated with isolated singularities of a Reiffen surface (Russian), Sovrem. Mat. Prilozh. **54** No. 2 (2008), 124–132; translation in J. Math. Sci. **158** (2009), No. 2 288–296.

[9] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals, Advanced Studies in Pure Mathematics **56**, (2009), 341–361.

[10] S. Tajima, Y. Nakamura, Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class, Journal of Symbolic Computation **44** (2009), 435–448.

[11] S. Tajima, Y. Nakamura, Algebraic local cohomology classes attached to unimodal singularities, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **48** (2012), No. 2, 21–43.