数理解析研究所講究録
第 1907 巻 2014 年 90-96

アソシエーションスキームを利用した可移置換群の構成

宮本泉 *

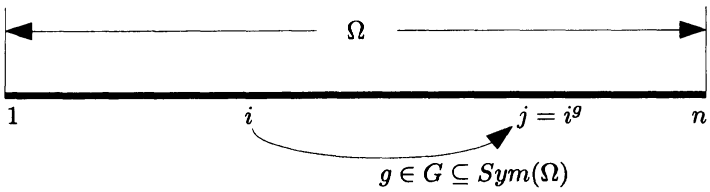
IZUMI MIYAMOTO

山梨大学

UNIVERSITY OF YAMANASHI

1 置換群

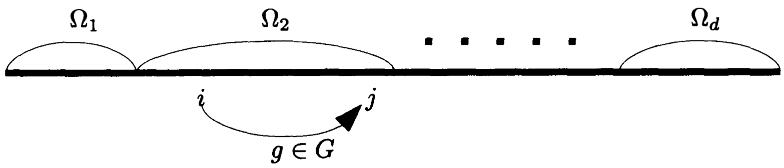
置換群 G : 対称群 $\mathrm{Sym}(\Omega)$ の部分群、$\Omega=\{1.2.\cdots,n\}$



G : 可移 (transitive) $\Longleftrightarrow$

　Ω の任意の点 i,j に対して、$i^g=j$ とする $g\in G$ が存在

orbit



1.1 同型と共役

n 次の置換群 G を含む同型類 $\Longleftrightarrow$ 対称群 $\mathrm{Sym}(n)$ による G の共役類 G の $h\in\mathrm{Sym}(n)$ による共役 G^h

$$G^h=\{\,h^{-1}gh\mid g\in G\,\}$$

G の H における正規化群 (Normalizer)

$$\mathrm{Norm}(H,G)=\{\,h\in H\mid G^h=G\,\}$$

正規化群計算、2つの部分群の共役判定 : 次数 n が小さくても計算が非常に困難な場合がある。
〈〈ここでの群の計算は、数式処理ソフトウェアパッケージ GAP を使用〉〉

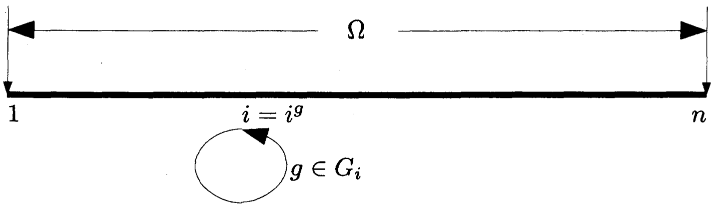
*imiyamoto1@gmail.com

1.2 置換群のデータ (*は Magma による)

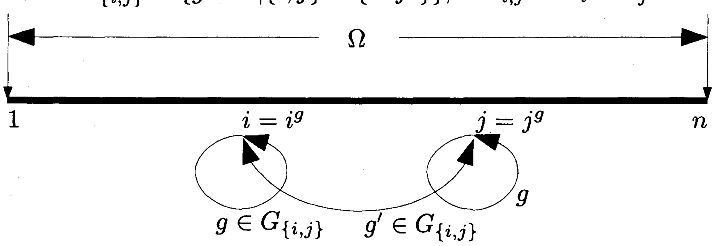
n	NrTransitiveGroups(n)	NrPrimitiveGroups(n)
20	1117	4
21	164	9
22	59	4
23	(7)	7
24	25000	5
25	211	28
26	96	7
27	2392	15
28	1854	14
29	(8)	8
30	5712	4
31	(12)	12
32	*2801324	7

1.3 固定部分群 (Stabilizer)

1 点固定部分群 $G_i = \{g \in G | i = i^g\}$



2 点固定部分群 $G_{\{i,j\}} = \{g \in G | \{i,j\} = \{i^g.j^g\}\}$, $\quad G_{i,j} = G_i \cap G_j$

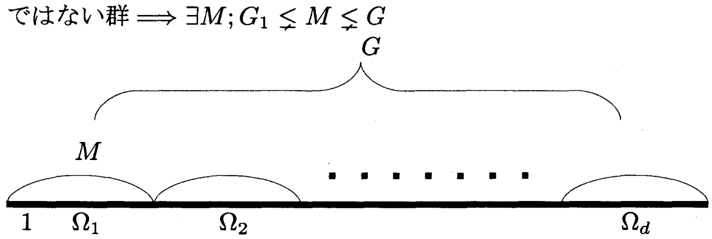


部分集合 Δ の固定部分群 G_Δ $\cdots$ (集合として、または、各点ごと)

原始的な群 (Primitive) $\Longleftrightarrow$ 可移な群で、1 点固定部分群 G_1 が G の極大部分群

【注】可移な群では、すべての G_i は、互いに G の中で共役

Primitive ではない群 $\Longrightarrow \exists M; G_1 \lneq M \lneq G$



$g \in G \Longrightarrow \Omega_i^g = \Omega_j$

$\{\Omega_1, \Omega_2, \cdots \Omega_d\}$:G のブロックシステム $\Longrightarrow G \subseteq W = Sym(\Omega_1) \wr Sym(d)$ (WreathProduct)
$M = G$ における集合 Ω_1 の固定部分群
【注】素数次数の可移置換群は primitive

1.4 可移な群の分類の現状

Primitive な群の分類
GAP のデータ 2499 次まで ver4.7.2
Magma のデータ 4095 次まで ver2 19-2
可移な群の分類の現状
30 次以下：１０年以上前、確認に時間をかけている。Hulpke
32 次：Cannon-Holt 2008 年 12 月、確認 2011 年 (Magma のデータ)
32 次の個数が多すぎて、Magma の通常の組込みデータにはできない。
それで、分類はここで止まっている。(前の表の通り)

33、34、35 次は、これまでの方法で簡単であろう。36 次は、それなりに、､､。(→ 33, 34 次は "一応" 昨年、35 次は今回)

分類に必要とされる関数は、GAP システムに組込まれている。これらを使って、分かり易く分類したい。30 次以下の場合の確認も含めて。
→いろいろ場合わけした計算が必要となって、分かり易いとは言い難い。

2 計算方法：昨年と同様

アソシエーションスキーム
可移な群 G から構成されるアソシエーションスキーム A
$\Longrightarrow G$ の $\Omega^2 = \{(i,j)|i,j \in \Omega\}$ への作用の orbit 全体

このときは、
A の自己同型群 $Aut(A)$ =TwoClosure(G) が成立
TwoClosure(G)$\Longleftrightarrow$
The largest group $\subseteq Sym(n)$ which has the same orbits on Ω^2 as G has.
アソシエーションスキームの分類
次数 30 までと、32、33、34 は分類済　$Aut(A)$ の計算は簡単
35 次：２つの場合、固定部分群 G_1 の orbit のサイズが、1, 4, 12, 18 と　1, 6, 12, 16 となる場合以外は分類可　←　これらの場合のみ、プログラムを修正して可移群を計算
計算方法：同じアソシエーションスキームを作る G =TwoClosure(G) ごとに分類
G の可移な部分群 H で、G =TwoClosure(H) となるものをすべて生成
異なるアソシエーションスキームを作る群は、互いに同型にはならない。
今回の計算の主な改良点

- Complement

  基本可換正規部分群 $E \lhd G$ に対して、Complement H の計算

$$G = EH, \quad E \cap H = \{1\} \text{ 単位元のみの群}$$

この H のなかから、上の条件を満たすものを求める。

- 部分群の同型判定

  構成された群のなかから同型類の代表を選び出す。

3　計算方法の改良点

計算方法：改良点　Complement の計算

昨年：Complementclasses(G, E) を使用

G が一般の群、とくに、非可解 (solvable でない) 群でも使用可

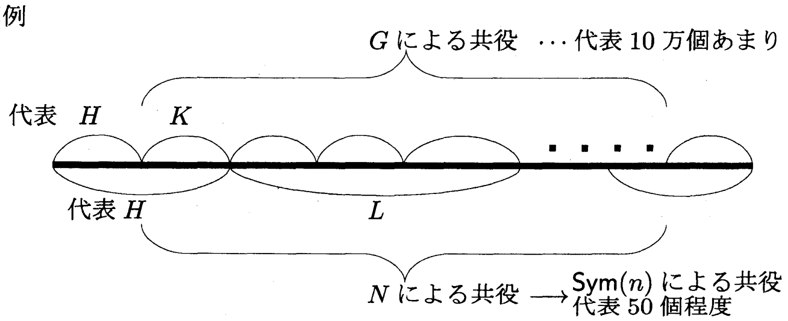
Comlement$H$ の G による G の中での共役類を計算

今回：ComplementClasses(N, G, E) も使用

G は可解、$G \trianglelefteq N$(G は N の正規部分群)、N も可解のとき

Comlement$H$ の N による G の中での共役類を計算

計算例



計算方法：改良点　Complement の計算

ComplementClasses の使用法

置換群 N を PcpGroup に、IsomorphismPcpGroup を使って変換

G、E は、その部分群として設定

【注】GAP のマニュアルには、PcpGroup の説明はほとんど無い？

群計算　最も簡単　PcGroup(Poly Cyclic Group、特に、可解群)、

次が、置換群

IsomorphismPcGroup：可解群を PcGroup に変換

GAP の置換群：群を、部分群と設定して構成しなくても、部分群かどうかの判定が可能

（普通の考え方：いくつかの置換群を取扱うとき、適当な次数の対称群の中に、部分群として構成する。→群の相互の関係が計算可能になる。）

計算方法：昨年　部分群の共役計算

群の適当な属性を調べて、得られた部分群全体を分割

→同型判定の対象となる群を制限元の個数（位数）$|G|$ や、G の Ω^3 への作用のパターンなどで分割を作成

TransitiveGroup(次数, 番号) GAP の置換群のデータ

TransitiveIdentification(G)　→　番号

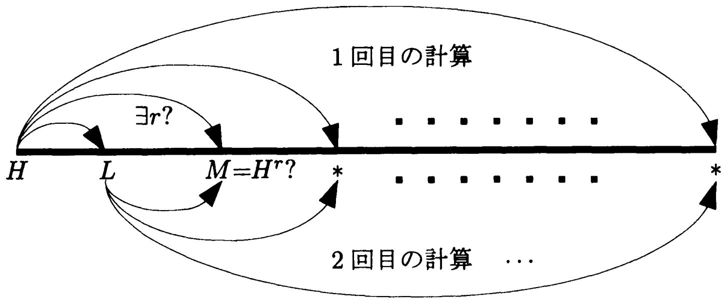
$\Longleftrightarrow$ G は TransitiveGroup(n, 番号) と同型（共役）

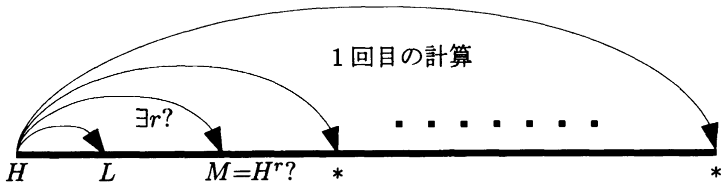
GAP が G のなんらかの属性をしらべて、同型判定をしていると考えられる。

→それなりの時間がかかる。

27 次の可移群は全部で、２３９２個

本プログラムで 27 次の可移群生成 100 分　TransitiveIdentification もすると 170 分
アソシエーションスキームの自己同型群の利用→
得られた群 H は、すべて同じアソシエーションスキームを作る。
共役は、アソシエーションスキームを構成する Ω^2 上の orbit を、全体として固定する自己同型群のなかで計算（↔TwoClosure は各 orbit ごとに固定）
正規化群 $N = \mathrm{Norm}(K,H)$ が、K の大きな部分群になるとき
（↔ K の N による coset の個数が多くないとき）$\leq 5000 \sim 50000?$)
→ coset の代表 r のすべてを使って、H の G のなかでの共役 H^r のすべてを列挙。部分群 L が、この H^r のなかに存在しなければ共役にはならない。
計算方法：改良点　部分群の共役計算
coset の代表 r のすべてを使って、H の G のなかでの共役 H^r のすべてを列挙。ソートしておく。
構成された部分群全体もソートしておく。
この 2 つの部分群の列をマージして、一致する群を求める。→ H と共役となる群が得られる。
互いに共役かどうかの計算





すべてが互いに共役のときはこれで計算完了

部分群の属性：交換子群の系列（DerivedSeries）

$$H \geq H' \geq H'' \geq \cdots$$

（この系列の長さ、現れる群の位数を使って、分割を細分する。）
この系列の真ん中くらいの群 D を使う。
得られたすべての部分群 H にたいして、この群 D をリストアップして、その共役計算を行う。
利点

- D は H に比べて小さい。このことからは、互いに共役となる D の個数が増えることも期待できる。（→ D の共役計算は、すべてが共役の場合に近くなり計算が楽。）
- 共役でない D をもつ H 達は、互いに共役にならない。
$\Longleftrightarrow$ 共役な H 達は、共役な D をもつ。

coset を利用した共役計算の改良

共役な D 達を、1つの D に共役をとって移す。

アソシエーションスキームの自己同型群を K、N =Norm(K,H) とする。

→この D をもつ H 達の共役は、Norm$(K,D) \leq K$ のなかで決まる。

【注】N =Norm(K,H) $\leq$Norm$(K,D) \leq K$

$$\left.\begin{array}{l} c = K \text{ の } N \text{ による coset の個数} \\ c_1 = K \text{ の Norm}(K,D) \text{ による coset の個数} \\ c_2 = \text{Norm}(K,D) \text{ の } N \text{ による coset の個数} \end{array}\right\} \Longrightarrow c = c_1 \times c_2$$

$c > 50000$ で、H の共役計算に coset を使えない場合でも、$c_1, c_2 \leq 5000$ となって、D の共役を coset を使って計算してから、H の共役も coset を使って計算することが期待できる。

4 計算結果

昨年

33 次　157 個　計算時間 12〜3 分　最長計算時間 11 分

(報告集では修正済)

34 次　102 個　計算時間 3 分　最長計算時間 1.6 分

同じプログラムを、27、28、30 次で動かしているが、、、。

今回

33 次　162 個　計算時間 4 分余、最長計算時間 2 分

34 次　115 個　計算時間 10 分余、最長計算時間 4 分 (2 個)

35 次　405 個　計算時間 5 分

30 次以下の場合、本プログラムで可移置換群の分類を再確認

32 次の再確認では、、、。

32 次の可移群の確認

32 次のアソシエーションスキームの1つから構成される可移群の個数

スキーム	可移群	計算時間 (単位：時間)	
as32[5471]	278,578 個	278.6	3つの部分に分けて計算 (個数最大)
as32[4505]	274,618 個	64.0	2つの部分に分けて計算
as32[6062]	223,344 個	56.9	
as32[3945]	212,891 個	73.9	
as32[4525]	158,755 個	46.4	
as32[7782]	151,879 個	37.6	
as32[8596]	124,093 個	30.7	
as32[4205]	105,319 個	20.3	
as32[6472]	91,298 個	21.9	
as32[5607]	68,822 個	16.5	

残り：アソシエーションスキーム　16 個　可移群　216,412 個

可移な群の計算結果 $n = 33, 34, 35$

n	NrTransitiveGroups(n)	NrPrimitiveGroups(n)
20	1117	4
21	164	9
22	59	4
23	7	7
24	25000	5
25	211	28
26	96	7
27	2392	15
28	1854	14
29	8	8
30	5712	4
31	12	12
32	2801324	7
33	162	4
34	115	2
35	405	6