数理解析研究所講究録
第 1907 巻 2014 年 116-121

ブーリアン・グレブナー基底を用いたグラフ 3 彩色問題への アプローチについて

鍋島克輔*
NABESHIMA, KATSUSUKE
徳島大学大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部
INSTITUTE OF SOCIO-ARTS AND SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKUSHIMA

杉原彩
SUGIHARA, AYA
徳島大学大学院総合科学教育部
GRADUATE SCHOOL OF INTEGRATED ARTS AND SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKUSHIMA

1 はじめに

本稿では，平面グラフ 3 彩色問題をブーリアン・グレブナー基底を用いて解く方法を考察する．

平面上に n 個の国からなる地図が与えられたとし，この地図を，隣接する国が異なる色になるように塗ることを考える．平面上の任意の地図は，4 色あれば，隣接する国が異なる色になるように塗ることができる（4 彩色可能）ことが Appel と Haken によって 1976 年に証明されている．3 色のみを用いる場合は，3 彩色可能な地図と不可能な地図が存在する．この地図の色分け問題は，グラフの頂点色分け問題と同一視できる．与えられた n 個の国を持つ地図に対し，n 個の頂点 $x_1,\ldots,x_n$ を用意する．2 つの国 x_i と x_j が隣接するとき，2 頂点 x_i と x_j を 1 つの辺で結び，その地図の（双対）グラフ $\mathcal{G}$ を構成する．こうすることで地図の彩色問題は，グラフの頂点色分け問題と見ることが出来る．本稿では，グラフの 3 彩色問題を考える．(3 彩色問題は NP 完全問題であることが知られている.)

この 3 彩色問題は，多項式環 $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 上でのグレブナー基底の理論を用いて，解くことが可能であることが [1, 2] により知られている．この方法は，[1, 2] に述べられているので，本稿では，詳しくは触れない．本稿では，ブーリアン・グレブナー基底 [9] を用いて 3 彩色問題を解く方法を考える．特に，V-三角グラフという特別な平面グラフについて述べる．

集合制約問題を解く方法として，ブーリアン・グレブナー基底を用いる方法がある．ブーリアン・グレブナー基底を用いることにより，集合制約問題を多変数多項式の連立方程式と同様に扱うことが出来，変数消去により解を得ることが可能となる．グラフ 3 彩色問題も集合の要素を 3 つとし（3 色より），制約条件として "塗り分けのルール" と "グラフの形" を考えると，集合制約問題そのものと考えることが出来る．よって，ブーリアン・グレブナー基底を用いて解くことが可能である．また，$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 上でのグレブナー基底計算と，ブーリアン・グレブナー基底計算のスピードを比較すると，一般的にブーリアン・グレブナー基底計算の方が格段に速いことが知られている．もし，ブーリアン・グレブナー基底を用いてグラフ 3 彩色問題を解くことが可能であれば，$\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ 上でのグレブナー基底を用いるより効率がよい．

*nabesima@ias.tokushima-u.ac.jp

2 ブーリアン・グレブナー基底

ここでは，ブーリアン多項式環におけるイデアルのブーリアン・グレブナー基底について簡単に述べる．ブーリアン・グレブナー基底について詳しくは論文，[3, 4, 5, 7, 9, 10] に書いてある．

定義 1 (ブール環) 全ての要素が幕等であるような，単位元を持つ可換環 $\mathbb{B}$ をブール環とよぶ．(すなわち，$\forall a \in \mathbb{B}$ において $a^2 = a$ となる可換環である．)

$\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とし m を自然数とする．このとき，加法と乗法を $(\mathbb{F}_2)^m$ 上で自然に定義することにより $(\mathbb{F}_2)^m$ は有限なブール環上となることが知られている [9]．また，逆に，Stone の表現定理より，任意の有限なブール環は，ある $(\mathbb{F}_2)^m$ と同型になることが知られている．ここで，ブール環 $\mathbb{B}$ は整域ではないことに注意する．例えば，$(\mathbb{F}_2)^3$ を考えると，$(1,0,0),(0,1,1),(1,1,0),(0,0,1) \in \mathbb{F}_2^3$ であり，$(1,0,0)\cdot(0,1,1) = (0,0,0)$ であり，また $(1,1,0)\cdot(0,0,1) = (0,0,0)$ でもあるので零元は唯一ではない．(乗法は同じ位置の成分同士を掛ける．)

本稿では，$\mathbb{B}[x_1,\ldots,x_n]$ を $\mathbb{B}$ 上の n 変数多項式環とし，項順序の指定なく次の記号を使うときは，ある項順序が固定されているものとする．ある多項式 $f \in \mathbb{B}[x_1,\ldots,x_n]$ において，$\mathrm{lm}(f)$ (同様に $\mathrm{lt}(f)$，$\mathrm{lc}(f)$) を f の先頭単項 (同様に先頭項，先頭係数) と呼び $\mathrm{lm}(f) = \mathrm{lc}(f)\cdot\mathrm{lt}(f)$ である． また，f から先頭単項を除いた $f - \mathrm{lm}(f)$ を $\mathrm{Rd}(f)$ と定義する． 集合 $F \subset \mathbb{B}[x_1,\ldots,x_n]$ においても同様に $\mathrm{lt}(F) := \{\mathrm{lt}(f) | f \in F\}$ と $\mathrm{lm}(F) := \{\mathrm{lm}(f) | f \in F\}$ とする．

定義 2 イデアル $I \subset \mathbb{B}[x_1,\ldots,x_n]$ に対して，I の有限集合 G が I のグレブナー基底であるとは，$\langle \mathrm{lm}(I) \rangle = \langle \mathrm{lm}(G) \rangle$ を満たすことである．

定義 3 (リダクション) 多項式 $f \in \mathbb{B}[x_1,\ldots,x_n]$ に対して，$a = \mathrm{lc}(f)$，$t = \mathrm{lt}(f)$，$h = \mathrm{Rd}(f)$ とする． ここで，s を $\mathbb{B}[x_1,\ldots,x_n]$ の項，b を $ab \neq 0$ を満たす $\mathbb{B}$ の元，p を $\mathbb{B}[x_1,\ldots,x_n]$ の多項式とする． このとき，f によるリダクション $\longrightarrow_f$ は次により定義される: $bts + p \longrightarrow_f (1-a)bts + absh + p$.

体上の多項式環と同様に，リダクションを行うことで簡約グレブナー基底を定義することが可能である．定義 2 での G の各元が，他のどの元のリダクションによっても簡約化されないとき，G を簡約グレブナー基底と呼ぶ．

定義 4 簡約グレブナー基底 G の任意の異なる元 f, g が $\mathrm{lt}(f) \neq \mathrm{lt}(g)$ のとき，stratified と呼ぶ．

多項式環 $\mathbb{B}[x_1,\ldots,x_n]$ では，簡約グレブナー基底は唯一ではない．しかしながら，stratified グレブナー基底については次の定理が知られている．

定理 5 もし集合 G と G' があるイデアルの stratified グレブナー基底 G であれば，$G = G'$ である．

この定義より，イデアル $I \subset \mathbb{B}[x_1,\ldots,x_n]$ の stratified グレブナー基底は唯一であることが分かる．$\mathbb{B}[x_1,\ldots,x_n]$ 上での stratified グレブナー基底を計算するアルゴリズムは存在し [5, 7, 10]，数式処理ソフト Risa/Asir [6] 上での実装も存在する [5, 7, 8].

定義 6 (ブール多項式環) 剰余環 $\mathbb{B}[x_1,\ldots,x_n]/\langle x_1^2 - x_1,\ldots,x_n^2 - x_n \rangle$ はブール環になる．この剰余環をブール多項式環と呼び，$\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ で定義する．$\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ の元をブール多項式と呼ぶ．

重要なことは $\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ 自身がブール環であることである．したがって，$\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ において集合制約問題を取り扱うことが出来る．

定義 7 (ブーリアン・グレブナー基底) ブール多項式環 $\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ のイデアル I の有限集合 G がもし，$\langle \mathrm{lm}(I)\rangle = \langle \mathrm{lm}(G)\rangle$ を満たすならば G をブーリアン・グレブナー基底と呼ぶ.

ブーリアン・グレブナー基底を計算するアルゴリズムと実装は存在する [5, 9].
本章の最後として，ブール多項式環上でのヒルベルトの零点定理を紹介する． 本稿では，イデアル $I \subset \mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ に対して，I の $\mathbb{B}^n$ におけるアフィン多様体を $\mathbb{V}_b(I) = \{(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{B}^n | f(a_1,\ldots,a_n) = 0, \forall f \in I\}$ と表わす.

定理 8 (ヒルベルトの零点定理) I を $\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ のイデアルとする．このとき，次が成り立つ.

(i) $\mathbb{V}_b(I) = \emptyset \iff I$ はゼロでない定数を含む.

(ii) $\mathbb{V}_b(I) \neq \emptyset$ とする．このとき，$f(x_1,\ldots,x_n) \in I \iff$ 任意の $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{V}_b(I)$ において，$f(a_1,\ldots,a_n) = 0$.

3 グラフ三彩色問題とブーリアン・グレブナー基底

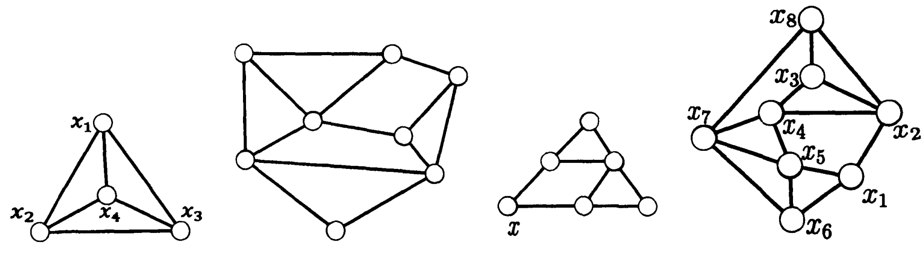
ここでは，ブーリアン・グレブナー基底を用いてどのように V-三角グラフの 3 彩色問題を解くかを考察する．本稿で取り扱うグラフはすべて単純グラフであり平面グラフである.

第 1 章でも述べた通り, グラフ 3 彩色問題とはグラフの頂点を同色が隣接しないように 3 色で塗り分けられるかどうかを判定する問題である．本稿では，特別なグラフ V-三角グラフの 3 彩色問題を主に考察する.

定義 9 (三角) 3 頂点を持つ完全グラフのことを三角と呼ぶ．もし，グラフ $\mathcal{G}$ が頂点 x_i, x_j, x_k と辺 (x_i, x_j), $(x_j, x_k), (x_k, x_i)$ を持つとき，グラフ $\mathcal{G}$ は三角 $x_ix_jx_k$ を持つという．三角 $x_ix_jx_k$ を $\triangle x_ix_jx_k$ と書く.

定義 10 (V-三角グラフ) グラフ $\mathcal{G}$ の任意の頂点（Vertex）が，必ずグラフ $\mathcal{G}$ のある三角の 1 つの頂点となるとき $\mathcal{G}$ を V-三角グラフという.

例として次の 4 つのグラフを考える．グラフ $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_4$ は V-三角グラフであり，グラフ $\mathcal{G}_3$ は V-三角グラフでない．なぜなら，グラフ $\mathcal{G}_3$ の頂点 x は三角の一部ではないからである.



$\mathcal{G}_1$ $\mathcal{G}_2$ $\mathcal{G}_3$ $\mathcal{G}_4$

今後，3 色 red, green, blue を集合の要素とする．すなわち，{red, green, blue} であり，この冪集合を $\mathcal{P}$({red, green, blue}) と表わす．$\mathcal{P}$({red, green, blue}) はブール環となる.

ブーリアン・グレブナー基底を用いて 3 彩色問題を解くためには，グラフを多項式へとモデル化する必要がある．グラフ $\mathcal{G}$ の異なる頂点に変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ を設定する．頂点 x_i と x_j が辺により結ばれているとすると，3 彩色問題のルールより x_i と x_j には同じ色を塗ることが出来ない．したがって，各変数を集合と考えれば，$x_i \cap x_j = \emptyset$ となる．この制約条件をブール多項式環 $\mathcal{P}(\{\mathrm{red}, \mathrm{green}, \mathrm{blue}\})(x_1,\ldots,x_n)$ 上の方程式へと変換すると，$x_ix_j = 0$ となる．ここでは，0 は空集合を意味し 1 は全体集合 {red, green, blue} を表わす.

定義 10 の例として図示したグラフ $\mathcal{G}_1$ を考える．グラフ $\mathcal{G}_1$ は 6 本の辺 (x_1, x_2)，(x_1, x_3)，(x_1, x_4)，(x_2, x_3)，(x_2, x_4)，(x_3, x_4) を持つ．これを，ブール多項式環 $\mathcal{P}(\{\mathrm{red}, \mathrm{green}, \mathrm{blue}\})(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 上の方程式に変換すると $x_1x_2 = 0$，$x_1x_3 = 0$，$x_1x_4 = 0$，$x_2x_3 = 0$，$x_2x_4 = 0$，$x_3x_4 = 0$ となる．ここで，$F_1 = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4\}$ とすると，F_1 により生成させるイデアルの stratified ブーリアン・グレブナー基底を辞書式項順序 $x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec x_4$ で計算すると，F_1 そのものがブーリアン・グレブナー基底となる．辺のみのモデル化では，ブーリアン・グレブナー基底を用いて，グラフ 3 彩色問題を解くことはできない．これには，理由がある．我々は，3 彩色問題を考えているが，実際は，このモデル化では各頂点は 3 色で制約されてない．すなわち，3 色 red, green, blue を考慮していない．また，方程式の解として 0 と 1 も有り得ることも一つの理由である．

さて，グラフ 3 彩色問題は，ブーリアン・グレブナー基底を使って解くことができないのか？

グラフ $\mathcal{G}_1$ に関しては，実はまだ情報が存在する．$\mathcal{G}_1$ は V-三角グラフなので三角の情報を追加することが出来る．グラフ $\mathcal{G}_1$ は 4 個の三角 $\triangle x_1x_2x_3$，$\triangle x_1x_2x_4$，$\triangle x_1x_4x_3$，$\triangle x_2x_3x_4$ が存在する．三角は完全グラフより，3 彩色問題のルールから三角のすべての頂点の色は異ならなくてはならない．すなわち，$\triangle x_1x_4x_3$ において，$x_1 \cup x_4 \cup x_3 = \{\mathrm{red}, \mathrm{green}, \mathrm{blue}\}$ となる．これを，ブール多項式環 $\mathcal{P}(\{\mathrm{red}, \mathrm{green}, \mathrm{blue}\})(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 上の方程式に変換すると $x_1 + x_3 + x_4 = 1$ となる．すべての三角にこのモデル化を行い，F_1 と合わせると多項式の集合 $F_2 = F_1 \cup \{x_1 + x_2 + x_3 + 1, x_1 + x_2 + x_4 + 1, x_1 + x_4 + x_3 + 1, x_2 + x_3 + x_4 + 1\}$ を得ることが出来る．ここで, F_2 から生成されるイデアルの stratified ブーリアン・グレブナー基底 G_2 を辞書式項順序 $x_1 \prec x_2 \prec x_3 \prec x_4$ で計算すると，$G_2 = \{1\}$ となる．これは明らかに $\mathbb{V}_b(G_2) = \emptyset$ より，グラフ $\mathcal{G}_1$ は 3 彩色不可能である．これは，三角の条件を加えることによって判定が可能となった．なぜならば，三角を加えることにより 3 色の制約条件が加えられたからである．

もう一度，グラフと三角の条件を考える．三角を加えることにより三角が持つ頂点の 3 色制約がされることより，すべての三角を加える必要は無いと考察するのは自然な流れである．三角の頂点がグラフのすべての頂点を覆うような三角の集合であれば，V-三角グラフの 3 彩色問題をブーリアン・グレブナー基底を用いて解くことが可能ではないかと推察出来る．

グラフ $\mathcal{G}_1$ を再び考える．まず，すべての頂点 x_1, x_2, x_3, x_4 を持つように，三角を選ぶ．ここでは 2 個の三角 $\triangle x_1x_2x_3$ と $\triangle x_2x_3x_4$ を選べば十分である．この三角をモデル化し，F_1 に加えた集合を F_3 とする．すなわち，$F_3 = F_1 \cup \{x_1 + x_2 + x_3 + 1, x_2 + x_3 + x_4 + 1\}$ である．イデアル $\langle F_3 \rangle$ の 辞書式項順序 $x_1 \succ x_2 \succ x_3 \succ x_4$ に関するブーリアン・グレブナー基底は $G_3 = \{x_2 + x_1 + 1, x_3, x_4\}$ となる．ここで，G_3 の元 x_3 と x_4 に着目する．これは，$x_3 = \emptyset$ と $x_4 = \emptyset$ となることを意味している．我々は x_3 と x_4 を塗り分けたいが，この結果は塗り分けられないことを意味している．

以上を踏まえて V-三角グラフを多項式にモデル化するアルゴリズムは次である．

アルゴリズム V-Triangle($\mathcal{G}$)

Specification: V-Triangle($\mathcal{G}$)
Input: $\mathcal{G}$: n 個の頂点を持つ V-三角グラフ (頂点：$x_1, \ldots, x_n$)，
Output: $\mathcal{P}(\{\mathrm{red}, \mathrm{green}, \mathrm{blue}\})(x_1, \ldots, x_n)$ 上の多項式の集合.
BEGIN
$V \leftarrow \{x_1, \ldots, x_n\}$
$E \leftarrow \{x_ix_j | (x_i, x_j) \text{ is an efge of } \mathcal{G}\}$
while $V \neq \emptyset$ **do**
  select x_i from V

$V \leftarrow V \backslash \{x_i\}$
$(x_j, x_j) \leftarrow$ search a pair (x_j, x_k) s.t. $\mathcal{G}$ contains $\triangle x_i x_j x_k$
$V \leftarrow V \backslash \{x_j, x_k\}$
$E \leftarrow E \cup \{x_i + x_j + x_k + 1\}$
end-while
return E
END

前述の考察の結果から次の定理を得ることが出来る.

定理 11 V-三角グラフを $\mathcal{G}$ とし, **V-Triangle**($\mathcal{G}$) の出力を F とする. イデアル $\langle F \rangle$ のある項順序に関する stratified ブーリアン・グレブナー基底を G とする. このとき, 次の (i), (ii), (iii) のどれかの場合, グラフ $\mathcal{G}$ は 3 彩色不可能である.

(i) ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ において, $x_i \in G$,

(ii) ある $i \in \{1, \ldots, n\}$ において, $x_i + 1 \in G$,

(iii) G はゼロでない定数を含む.

この定理の逆は, 研究集会時の発表では, 成り立つと発表したが, その時の証明に不備があったことより, 現在まだ証明されていない. 多分, 成り立つであろう. 定理 11 を満たすグラフは, すぐに 3 彩色不可能だと分かる.

V-三角グラフとは限らない, "一般のグラフ" についてもブーリアン・グラブナー基底を使って同様にすることが出来る. その場合, 三角で覆われてない頂点が多数存在するが, 他の三角に覆われている頂点とは被らないように新たな頂点を設定し, 新たな三角を作ることで同様の方法が使用可能である. 例えば, 定義 10 の例として図示したグラフ $\mathcal{G}_3$ を考える. この場合, $\mathcal{G}_3$ は V-三角グラフではない. 頂点 x 以外は三角で覆われている. 覆われてないのは頂点 x のみなので, 新たに 2 つ頂点 y と z を設定し, $\triangle xyz$ を構成する. これにより, x は 3 色で制約される. 新たな頂点 y と z は他の頂点に影響を及ぼさないので $\triangle xyz$ を加えたグラフの 3 彩色問題と, 元のグラフ $\mathcal{G}_3$ の 3 彩色問題の答えは同じとなる.

参 考 文 献

[1] William W. Adams and Philippe Loustaunau *An Introduction to Gröbner Bases*, American Mathematical Society, 1994

[2] Dave Bayer, *The division algorithm and the Hilbert scheme, Ph.D. Thesis*, Harvard University, 1982

[3] 井上秀太郎, 佐藤洋祐, グレブナ基底を使った数独の難易度判定と問題作成, 数理解析研究所講究録, 第 1785 巻, pp. 51–56, 2012

[4] 井上秀太郎, 佐藤洋祐, 鈴木晃, 鍋島克輔, ブーリアングレブナ基底を使った数独の解法, 数理解析研究所講究録, 第 1666 巻, pp. 1–5, 2009

[5] Shutaro Inoue, Efficient singleton set constraint solving by Boolean Gröbner bases, *Communication of JSSAC*, Vol. 1, pp. 27–38, 2012
`http://www.mi.kagu.tus.ac.jp/~inoue/BGSet/`

[6] Noro Masayuki and Taku Takeshima, Risa/Asir- A Computer Algebra System, *Proc. ISSAC 1992*, pp. 387 – 396, ACM-Press, 1992
`http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html`

[7] Yosuke Sato, A new type of canonical Gröbner bases in polynomial rings over von Neumann regular rings, *Proc. ISSAC 98*, pp.317–321, ACM press, 1998

[8] Sato Yosuke, Suzuki Akira and Katsusuke Nabeshima : Discrete Comprehensive Gröbner Bases II, *Computer Mathematics III, Lecture Notes Series on Computing*, pp.240–247, World Scientific, 2003

[9] Yosuke Sato, Shutaro Inoue, Akira Suzuki, Katsusuke Nabeshima and Ko Sakai, Boolean Gröbner bases, *Journal of Symbolic Computation*, Vol.46, No.5, pp.622–632, 2011

[10] Volker Weispfenning Gröbner bases for polynomial ideals over commutative regular rings, *Proc. EUROCAL 87*, LNCS Vol.378, pp.336–347, Springer , 1987