数理解析研究所講究録
第1909巻 2014年 136-146

CASの利用に基づく正確な図の利用がもたらす教育効果検証について

東邦大学・薬学部　金子　真隆 (Masataka Kaneko)
Faculty of Pharmaceutical Science,
Toho University
長野高専・一般科目　前田　善文 (Yoshifumi Maeda)
Faculty of General Education,
Nagano National College of Technology
長野高専・一般科目　濱口　直樹 (Naoki Hamaguchi)
Faculty of General Education,
Nagano National College of Technology
長岡高専・一般教育科　野澤　武司 (Takeshi Nozawa)
Faculty of General Education,
Nagaoka National College of Technology
下関市立大学・経済学部　大内　俊二 (ShunjiOouchi)
Faculty of Economics,
Shimonoseki City University
東邦大学・理学部　高遠　節夫 (Setsuo Takato)
Faculty of Science,
Toho University

1　はじめに

教材中の図が学習者に及ぼす効果には，いろいろな側面があると考えられる．これまで筆者は，特に3次元描画の「見易さ」に注目し，KETpic(1)) による3次元描画が線形代数などの抽象的な概念を理解するために及ぼし得る効果について考えてきた (2))．結果的に，KETpic の3次元描画が持つシンプルさや透過性によって学習者が大きな効果を享受できる可能性が示唆された．一方で，数式処理ソフト (CAS) の利用を背景としたKETpic による図の「正確さ」が最も力を発揮するのは，関数のグラフを中心とした2次元描画においてであるとも考えられる．しかし描画の正確さがもつ教育的な重要性については，これまで我々が行ってきたアンケート調査の結果などを見る限り，数学教員の間で認識が必ずしも一致していないというのが現状である．そこで本稿では，とりわけ図の正確さが問題になる「三角関数」に関連した教材に焦点をあてて，その教育効果を検証する試みについて紹介する．

なお，本稿の前半に紹介する予備実験の内容は，本年度のICCSAで発表した内容(3))と重なるが，本稿で主に紹介するのは，その後に行われたより多くの人数を対象とした統計的な調査についてである．

2 検証の方法

本稿で効果を検証する教材のテーマとしては,「三角関数の合成」および「極座標によって表された関数のグラフ」を選択した．いずれも

1. 図の正確さが要求され，うかつに描画すると学習者に誤った情報をあたえかねない場合がある
2. できでば印刷媒体として教材を配布し，学習者に作業をさせる中で概念を把握させたい場合がある

という共通性を持っている．比較対象の立て方として,「KETpicによる正確な図」と「それ以外のソフトによる不正確な図」という可能性もあり得るのだが，我々のアンケート調査の結果から見えてきた現状からすると,「KETpicなどによる正確な図を使った場合」と「本質的に図が使えていない場合」の比較にした方が，より実態に即していると判断されたため，後者の形で比較を行うこととした．

より具体的には，これらのテーマに関する導入用の教材として

1. KETpicを用いた正確な図による支援が受けられる教材(実験群)
2. 本質的に図による支援がなく，学習者自身が不足を補わざるを得ない教材(統制群)

の2種類を用意し，同等の母集団に対してこれらの教材を用いた「グラフを描かせる」という課題を課す形の実験授業を別々に行った上で，解答状況の比較を行うというものである．

まず，予備実験として，2013年の1月に長野・長岡の各高専で各群ともテーマに該当する学年(三角関数の合成は1年・極座標は2年)の学生3・4名ずつを対象とした少人数形式の授業を行い，群の間で被験者の解答状況に関する比較を行った．この時期は，被験者がちょうど当該内容を学習する時期であり，ほぼ授業の一環という形で実施することができた．

その結果も踏まえ，2013年7月，より客観的な評価項目を設けた上で，1つのテーマにつき上記2高専の2年生各1クラス(約40名)ずつを対象に，各々を実験群・統制群各20名程度に二分する形で本実験を行った．実験の客観性を確保するため，二分する際，乱数表を用いて学籍番号を振り分ける方法をとった.「極座標」のテーマについては，予備実験と同様に被験者が初習の状況であったのに対し,「三角関数の合成」のテーマについては被験者が既習であるものの，学習してからかなり時間が経過していたことから，基礎知識を確認するための予備授業を全員一律に行った後，クラスを二分して本実験を行った．既習の学習内容をテーマとして導入的な教材を用いた実験を行うことにつき若干の懸念もあったが，過去の経験から当該内容については学生の定着度が悪く，学習し

てから半年近くたった状況であれば，未習の状況と大差がないのではないかという想定のもとに，上記の形で実験を行うこととなった．

3　実験授業に用いた教材とねらい

3.1　極座標で表された関数のグラフ

このテーマについては，上述の通り，通常の導入授業の流れの中で実験した．即ち，被験者が共通に使っている教科書を用いて極座標の定義やそれによって表される関数の意味を説明した後，例題として $r = 2\sin^2\theta$ のグラフを描画させる課題を課した．その際，基本的な角 θ に対する関数の値を計算して表を埋めさせた上で，図1の左の図を統制群に，右の図を実験群に与えて書かせるという形で比較を行うこととした．

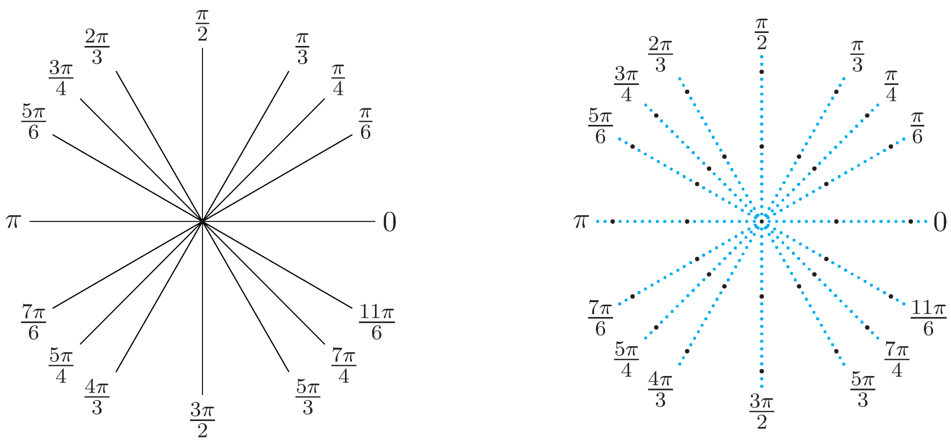

図1 極座標に関する実験用教材

見ての通り，統制群の図はこのテーマで用いられる一般的なものであるのに対し，実験群の図は，KETpic を用いることによって 1mm 単位に正確に点が打たれている上，原点から 1cm, 2cm それぞれ離れた点にだけ大きな点が打たれている．このことによって，被験者のイメージの中に原点を中心とした同心円が浮かび上がり，「極座標で表された関数のグラフ」という概念そのものの理解を助けるのではないか，というのが後者の教材に込められたねらいである．

3.2　三角関数の合成

周知のように，三角関数は物体の振動や電気的な現象を記述するために広く用いられるものであり，その合成は「波の重ね合わせ」という物理的な意味を持っている．フーリエ解析が主題とする「スペクトル分解」は，ある意味でその逆の計算であり，物理的な応用を念頭に置くと，数学的な計算と波の重ね合わせのイメージが表裏一体となって

理解されることが望ましいことは言うまでもない．しかし，数学プロパーでない一般的な学生にとって，三角関数のグラフを描くという作業そのものが必ずしも容易でなく，実際，物理系や電気系の教員から学生の習熟度向上を要請されることが多い．このような学習内容の導入場面で正確な描画が果たす役割については，とりわけ深く追究されてしかるべきである．そこで我々は，三角関数のグラフについて基本事項を一通り学習し終えた学生が「三角関数の合成」の学習に入る段階で，$y = \sin x$ と $y = \sqrt{3}\cos x$ のグラフをもとにして $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ のグラフを描画するという課題を設定し，図 2 に示すような統制群 (左側) 及び実験群 (右側) 用の図を含んだ教材を用意して，解答状況を比較することとした．

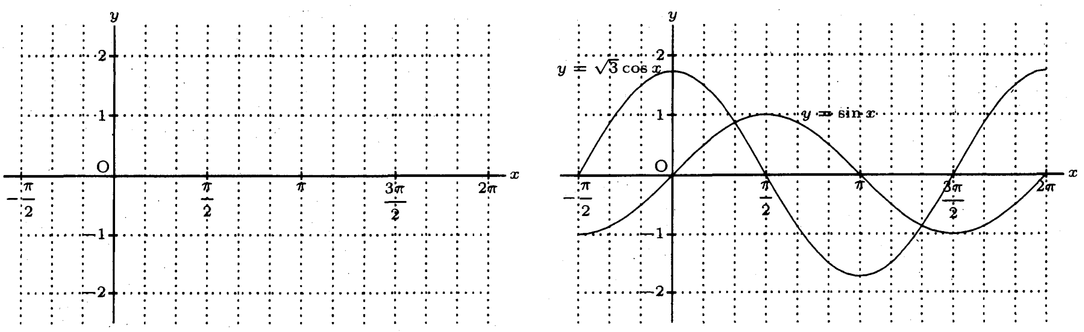

図 2 三角関数の合成に関する実験用教材

極座標の場合と同様，統制群の図はこのテーマで用いられる一般的なものであるのに対し，実験群の図は，KETpic を用いることによって $y = \sin x$ と $y = \sqrt{3}\cos x$ のグラフが既に書き込んであり，それをもとにして重ね合わせの描画ができるようになっている．これら 2 つの関数のグラフは三角関数を学習した学生にとっては基本中の基本であり，両者の効果には差がないという考え方もあり得るが，$\frac{\pi}{6}$ 間隔で縦方向に目盛が打ってあることと相まって，「2 つのグラフの高さを合計すればよい」という重ね合わせの発想に結びつきやすいのではないか，ということが期待される．

本実験における予備授業の教材としては，図 3 に示す通り，基本的な三角関数の値を求める計算と，周期や振幅を含めたグラフの基本形を確認するための選択問題を用意した．被験者の予備知識を揃えることが主目的であったため，終了後に模範解答を示して簡単な解説を行った．

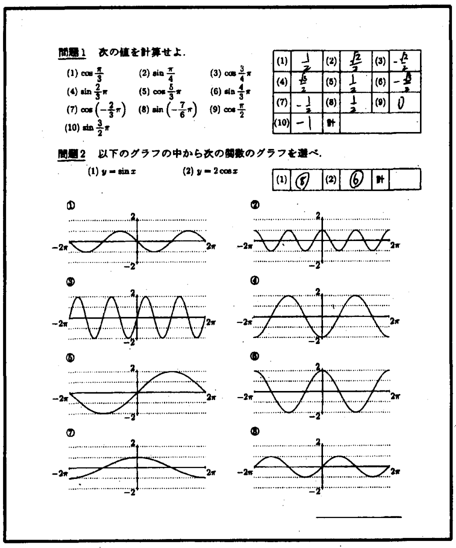

図 3 予備授業の教材

4　予備実験の結果と分析

4.1　極座標で表された関数のグラフ

当該実験は長野高専のみで実施し，被験者は統制群・実験群とも同校2年生3名ずつとした．図4は統制群の学生が課題に取り組んでいる様子であるが，当然のことながら定規を使用せざるを得ず，これが集中力に多少影響している様子がうかがえた．

統制群と実験群の学生がそれぞれ作業した事例の画像を図5, 6に示すが，一見

図4 統制群の作業風景

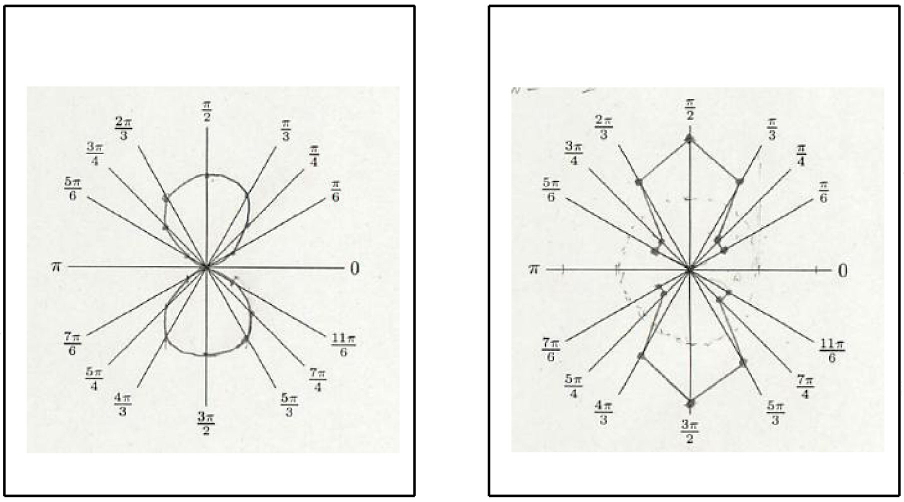

図5 統制群の解答状況

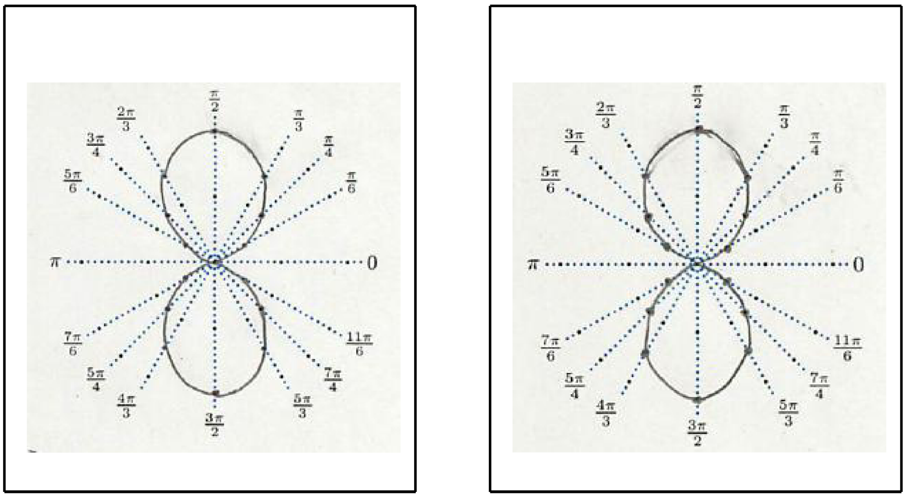

図6 実験群の解答状況

してわかる通り，実験群の学生の方が滑らかで正確な形の曲線を描いており，学習目標である「極座標で表された関数」という概念の把握自体にも差異が生じている可能性が考えられた．

4.2 三角関数の合成

当該実験は長野・長岡2高専で実施し，被験者は統制群・実験群とも1年生7名ずつとした．統制群と実験群の学生がそれぞれ作業した事例の画像を図7, 8に示すが，統制群の被験者はほとんどがいくつかの点をプロットするだけで終わり，最良の事例でも曲線を結びきれていないのに対し，実験群の被験者では，三角関数の合成を未習であるにもかかわらず，関数を重ね合わせた結果が再び三角関数になることを予想できている者が少なくないという形で，顕著な差異が認められた．

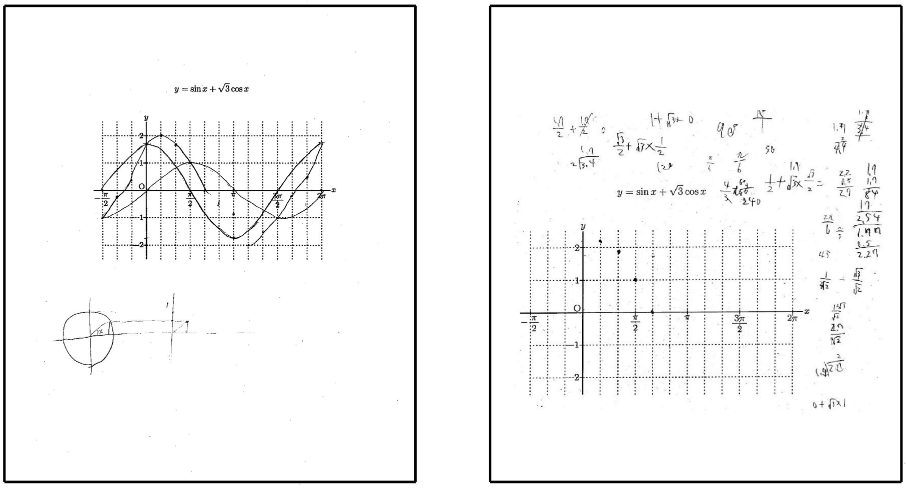

図7 統制群の解答状況

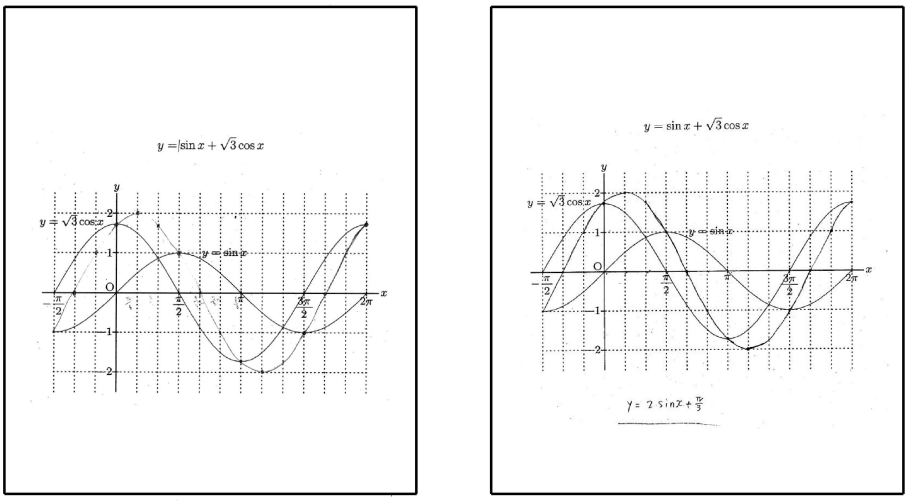

図8 実験群の解答状況

5　本実験の結果と分析

5.1　極座標で表された関数のグラフ

当該実験では，長岡高専の2年生1クラス(統制群・実験群とも20名ずつ)，および長野高専の1クラス(統制群22名・実験群21名)を被験者とし，表1のようなグラフの完成度に関する採点基準を設けた上で各被験者の解答を評価して，群の結果の間で差の検定を行った.

得点	描かれたグラフの完成度
0	プロットした点が結ばれていない
1	プロットした点を線分で結んでいる
2	プロットした点を区分的に曲線で結んでいる
3	プロットした点を滑らかな曲線で結んでいる
4	正解に近いが対称性や線のずれあり
5	ほぼ正確に描けている

表1 採点基準(1)

結果については日本科学教育学会等で既報のため(4)) 詳細は省略するが，全被験者の得点に基づいてウェルチのt検定を行った結果得られたp値が0.02388となり，2群の差が有意に認められる状況であった. 従って，長さと形を正確にとった「方眼」の存在が，初学者の解答の質に寄与する可能性が示唆されたことになる. その一方で，下表2の基準に基づく得点について同様に検定を行ったところでは2群の間に差が見出せておらず，当初想定された,「極座標で表された関数のグラフ」という概念の把握自体に効果を及ぼしているかという点では，明確な示唆が得られなかった.

得点	極座標表示された関数の理解度
0	原点からの距離が正しくとられていない
1	原点からの距離が正しくとられている

表2 採点基準(2)

5.2　三角関数の合成

以上見たように，極座標をテーマとした本実験においては，予備実験から想定された通りの比較的良好な結果が得られたが，三角関数の合成をテーマとした本実験については，統制群と実験群の結果が予想と逆転するという意外な結果となった. この結果についてはこれまで十分に分析できていなかったことに加え，今後同様の実験を行う上で重要な示唆を含む面があると考えられるので，以下でやや詳しく紹介する. なお，統制群と実験群の各被験者数は，長岡高専で19人ずつ，長野高専で21人と20人であった.

まず採点基準は下表3に示す通りであり，加点法によった．

得点	描かれたグラフの完成度
1	極大値・極小値が正しくとらえられている
1	y 軸との交点が正しくとらえられている
1	x 軸との交点が正しくとらえられている
1	正弦曲線の形状が正しく描かれている
1	周期 (性) が正しくとらえられている
1	滑らかに描けている

表 3 採点基準

採点結果を見ると，長岡高専の場合については，平均得点が 1.2 点程度で，2 群の間に得点の有意差は認められなかった．平均点の低さから想像される通り，5 点以上の高い得点を得たのは統制群の 1 人と実験群の 2 人のみであった．統制群のサンプル，および実験群のサンプルのうちの 1 つを下図 9 に示すが，これらはいずれも，三角比の計算に基づく点のプロットを行った形跡がほとんどないことや，最終的な曲線を得るためにはプロットされている点が少なすぎることから判断して，想定された「関数の重ね合わせ」による解法プロセスには従わず，三角関数の合成の計算を先行させた疑いが強い点には注意しておく必要がある．逆にこの 2 例以外では，三角関数の合成の計算を記述したものはなかった．

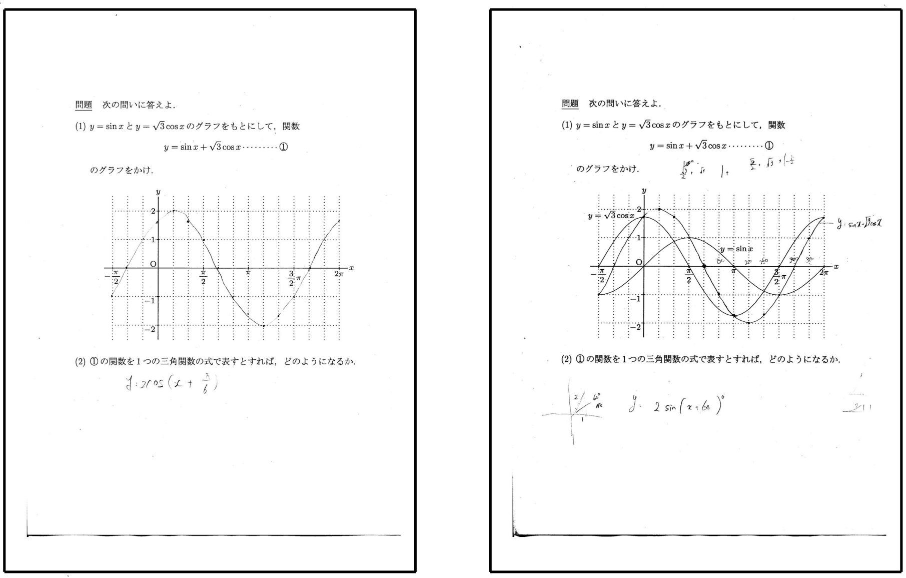

図 9 長岡高専の高得点者の解答状況

これに対し，長野高専の場合については，統制群の平均得点が 3.2 点であったのに対し，実験群の平均得点が 2.6 点となり，予想と逆の結果となった．5 点以上の高得点者

は，統制群で9名，実験群で6名となったが，このうち統制群の6名と実験群の1名が，上図9と同様，三角関数の合成の計算を先行させた疑いが強い事例となっている．

さらに，典型的な誤答例として，下図10に示すように，「関数の重ねあわせ」という意識は持てているにもかかわらず，関数のピークがy軸の位置にあると勘違いしたことが発端となって混乱に陥った可能性を疑わせるものが多かった．

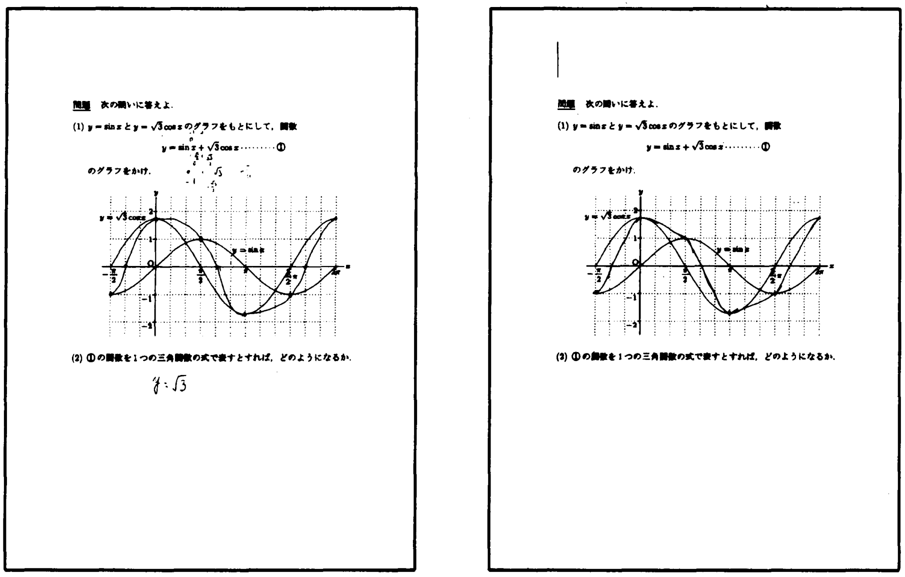

図10 典型的な誤答例

該当する事例を数え上げると，長岡では統制群に6例，実験群に5例と2群で大差がなかったのに対し，長野では統制群に6例，実験群に10例と，実験群にこのような事例がやや多くみられる．表3の採点基準に照らすと，関数のピークの位置について誤解をした場合，重ね合わせという意識を持てていたとしても大きな減点となることは明らかである(実際，このような事例での最高得点は3点で，ほとんどが1点以下であった)．なお，このような誤答例の中に，図9に示したような三角関数の合成の計算を行ったものはなかった．

予備実験と本実験とで結果が大きく食い違ったことは，果たしてどのように解釈されるか．その大きなヒントが上述した解答状況の分析に隠れていると考えられる．学習者の立場になって考えてみると，この実験で統制群の被験者に課した課題は決して負荷の軽いものではない．三角関数の合成の知識に頼らず，純粋に関数の重ね合わせによるアプローチをとった場合，被験者は$y=\sin x$と$y=\sqrt{3}\cos x$のグラフの正確な(少なくともxが$\frac{\pi}{6}$の整数倍であるときにyの比較的正確な近似値を求めなくてはならない)描画をした上で，さらにy座標の足し算を繰り返して正確に点をプロットしていくことが求められる．その上で，プロットした点の間を結んでいく適切な曲線を見出さなくてはならないわけであるから，仮に三角関数の合成の知識を記憶していた被験者があれば，$y=\sin x$，$y=\sqrt{3}\cos x$のグラフの描画をスキップし，直接その合成のグラフを描こうとするインセンティヴが働くことは想像に難くない．統制群の高得点者の半数以上が後

者のアプローチをとっている状況が，上記の推測を裏付けているものと考えられる．これに対し実験群の場合は，$y=\sin x$，$y=\sqrt{3}\cos x$ のグラフが既に正確に描かれており，被験者が求められるのは y 座標の足し算をした上で点をプロットし，その間を曲線で結ぶことだけである．従って，統制群の被験者ほどには三角関数の合成の知識を使おうというインセンティヴが働かないのではないかと想定できる．実際，多くの被験者が重ね合わせによるアプローチをとることとなったが，最後に曲線を描く段階で大きな障害に突き当たったことが見て取れる．上述の通り，多くの被験者が，振幅のピークになる位置を $x=\frac{\pi}{6}$ ではなく $x=0$ と勘違いし（おそらくは $y=\sqrt{3}\cos x$ のグラフにひきづられたのであろう），そのためにプロットした点と整合的な正弦曲線をうまく描画できなかったと考えられるのである．総括すると，三角関数の合成の知識を用いた被験者においては，結果の表示式がグラフの位相差を想起させやすかったのに対し，重ね合わせによるアプローチをとった被験者においてはそうならなかったという差異が生じ，これが本実験における攪乱要因となった可能性が考えられるわけである．三角関数の合成を未習の被験者が対象であれば，合成の表示式はおろか，重ね合わせた結果が再び三角関数になるという予備知識すらない状況になるわけで，このような攪乱要因は生じようがないことになる．

以上の結果が示すのは，同一の教材であっても，それをどのような学習段階の被験者に与えるかによって，発揮される効果がまったく異なるという，当然といえば当然の事実である．今回の教材は，基本的に導入用として用意されたものであるから，本実験における想定が甘かったと言わざるを得ない面がある．逆に，当該内容を学び始める段階の被験者を選んで，同様の試行を行う必要が生じたとも言えるであろう．

6　認知科学的補足と今後の課題

三角関数のグラフの描画は，周期の変更と位相のずれが同時に絡んだ場合，学習者の到達度がとりわけ厳しくなる項目である．グラフ描画の基本はプロットであり，それさえできれば描画できるはずだという考え方もあるが，今回の実験の結果はこのような考え方が妥当性を欠くことを如実に示している．プロットと描画の間には大きなギャップが厳然として存在し，その最大の要因は，そもそも代表点をどこにとったら良いか，周期と位相差から的確に判断しなくてはならない点にある．これはかなりの習熟を要する部分であり，実際，学習者が習熟度を上げていく過程で，点をたくさんプロットしてそれらを結び合わせるというアプローチを次第に離れ，振幅・周期・位相差から定まる極値点や切片だけプロットし，それらを通過するように正弦曲線を均等に「割り振る」というアプローチをとるようになる状況を，多くの数学教員は目にしているはずである．

実は，このようなアプローチの違いが認知科学的にどのように把握され得るかという点について，新たな示唆が得られつつある．近年，長岡技術科学大学中川研究室を中心に，大脳における血流動態をNIRS(近赤外分光法) により計測し，計測されるデータの時系列的な変動をフラクタル解析することによって，脳内の賦活状況を追跡する試みが

進んでいる (5)). この解析方法を援用する形で, 2013年3月, 木更津高専において1年生20名ほどを対象に, より基本的なものを含む三角関数のグラフ描画をタスクとしたNIRS計測を試行した. 詳細は別の機会にまとめて公表するつもりだが, まったく同じグラフの描画タスクでありながら, 多数点のプロットによるアプローチをとった被験者と, 周期・位相差に基づくパターン的な描画のアプローチをとった被験者とで, 脳内の賦活機序に大きな違いがある可能性が示唆されている. このような示唆は, 前段に述べた経験的知見ときわめて整合的だと考えられる.

以上の知見を踏まえると, 今回の実験でテーマとした三角関数のグラフ描画は, 単発的に学習者の理解を支援すれば済む性格のものではないという事実が浮かび上がってくる. そして, そこでの学習成果を向上させるためには, 学習者の脳内に適切な思考回路が「漸次的に」築かれていくように常に意識して, 学習者の習熟段階に応じた教材を継続的に投入していく必要があることが強く示唆されるのである. そうした教材を作成する上で, 長さや形が「正確な」図がいかに寄与しうるか, さらなる検証が求められるところである.

謝辞

本研究は科学研究費補助金・基盤研究 (C) (課題番号 24501075) の補助を受けた.

参考文献

1) 金子真隆, 山下哲, 深澤謙次, 北原清志, 高遠節夫:「KETpic で楽々TEX グラフ」, イーテキスト研究所, 2011
2) 金子真隆, 高遠節夫:「KETpic の利用と教材発掘」, 京都大学数理解析研究所講究録 1735, pp.57-72, 2011
3) Kaneko M., Maeda Y., Hamaguchi N., Nozawa T., Takato S.: “A Scheme for Demonstrating and Improving the Effect of CAS Use in Mathematics Education”, Proc. ICCSA 2013, pp.62–71
4) 金子真隆, 前田善文, 濱口直樹, 野澤武司, 大内俊二, 高遠節夫:「正確な図の利用による教育効果の検証について」, 日本科学教育学会第37回年会論文集, 2013
5) 中川匡弘: 「カオス・フラクタル感性情報工学」, 日刊工業新聞社, 2010