数理解析研究所講究録
第1912巻 2014年 218-226

マーサーの定理とその周辺
(Mercer's Theorem and Its Analogies)

近畿大学・経営学部　林　芳男
Yoshio Hayashi/Faculty of Business Administration, Kinki University

(本文)

ペイリーとウィーナーの共著、Payley and Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, American Mathematical Society Colloquium Publications Volume XIX 1934)の第IV章§18(pp. 58-63)にマーサー(Mercer)の定理という大変興味深い定理が有る。そこで引用されている論文は

J. Mercer, *On the limits of real variants,* Proceedings of the London Mathematical Society, (2), vol. 5 (1907), pp. 206-224.

である。この原典に当たるべきではあったが、ここではその著作から分かるその主張の部分を再録した。それは

マーサー(Mercer)の定理：$0<\alpha<1$であるとして(実数列$\{s_n\}$に対して)

(18.01) $\alpha s_n+(1-\alpha)\dfrac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu\to s\ (n\to\infty)$

であるならば

(18.02) $s_n\to s\ (n\to\infty)$

である。

という主張である。私はコーシーの定理(小松勇作「解析概論 I」廣川書店(昭和37年)72頁の(15.5)式、これ以降は参考文献[2]として引用する)を知っているから、この主張の逆命題こそが定発散($s=\pm\infty$)する場合も含めて成立する訳でこのマーサーの定理が成立したならば、(18.01)と(18.02)が同等ということになってしまう。$0<\alpha<1$であるという部分にどんな深い意味が有るのかと訝(いぶか)りつつ私はそういう主張は無理だと感じている。率直に言ってそれは天才ウィーナーの勘違いだと思う。先ずそのコーシーの定理の復習をする。

コーシーの定理：$n\to\infty$のとき$a_n\to\alpha$ならば

$$A_n\equiv\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\to\alpha\quad(n\to\infty)$$

が成り立つ(この主張は$\alpha=\pm\infty$のときにも成立する)。

その証明は初等的であるので省略する。参考文献[2]の中ではテプリッツの定理の応用で示されている。このコーシーの定理の逆が成立しない例は知られている。A_nが収束する数列$\{a_n\}$はその極限αに$(C, 1)$総和可能であると呼ばれている。これは数列の収束概念の拡張である。部分和$S_n\equiv nA_n=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$が収束するとき$a_n\to 0\ (n\to\infty)$(つまり、$a_n=o(1)$)であることは良く知られている。そのときこのコーシーの定理は$\alpha=0$で成立する。コーシーの定理の前提が$\alpha\neq 0$で成立するとき、$\{a_n\}$は$(C, 1)$総和可能で$A_n=O(1)$で$\alpha>0$のときはS_nが∞に発散し、$\alpha<0$のときはS_nが$-\infty$に発散する。このコーシーの定理の観点からすればマーサーの定理は意味が無い。しかし、さすがに天才ウィーナーが引用したのである、冒頭のマーサーの定理は成立しないと断言して良いのかどうかに関しては私は悩んでしまった。私にはこのコーシーの定理が確立された時期が分からないし、そのマーサーの定理のその原典にも当たっていないから何とも無責任と思われるかもしれないが、ウィーナーにはその連続版を論

じる前にそのコーシーの定理の連続版を論じて欲しかった。それをここで与えて考察することにする。

私の連続版のコーシーの定理： $a(x)$は$(0,\infty)$で定義された連続な関数で

$$a(\infty)\equiv\lim_{x\to\infty} a(x)=\alpha$$

であるとする。このとき任意の有限な$x>0$に対して

$$S(x)\equiv\int_0^x a(y)dy\ ;\ A(x)\equiv\frac{1}{x}\int_0^x a(y)dy$$

はどちらも定義することができる(或いは、任意の有限な$x>0$に対して区間$(0,x)$で$a(\cdot)$が可測であればその二つの積分は定義される)。そのとき$\alpha\neq 0$であるならば($S(\infty)$は定発散して)

$$A(\infty)\equiv\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x a(y)dy=\alpha$$

が成り立つ(この主張は$\alpha=\pm\infty$のときにも成立する)。

証明： その無限積分$S(\infty)$が有限な値で存在するには$a(\infty)=0$であることが必要であると思われているかも知れないがそれは実は正しくない。$a(\infty)$が確定しなくても$S(\infty)$が存在する例が知られている([2;218頁の例])。$S(\infty)$が有限なときは$A(\infty)=\alpha=0$である。そういう自明な場合でないとき、例えば、$\alpha>0$のときは$S(\infty)=\infty$のときで、その極限は不定形であるので、ロピタル(l'Hospital)の定理([2;188頁定理40.2])が使えて

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x a(y)dy=\lim_{x\to\infty}\frac{S(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{S'(x)}{1}=\lim_{x\to\infty} a(x)=\alpha$$

であることを示すことができる。$\alpha<0$のときは$S(\infty)=-\infty$のときで同様に証明される。□

$a(\cdot)$がその変数の十分大きな所で単調であるとき無限積分$S(\infty)$が有限な値で存在するならば$a(x)=o(1/x)$ $(x\to\infty)$であることが示されている([2;218頁定理45.10])。一般的に$a(x)$が任意な$X>0$に対して$[0,X]$で可積分であるとき$x\to\infty$のとき或る$\beta>1$に対して$a(x)=O(1/x^{\beta})$ $(x\to\infty)$ならば無限積分$S(\infty)$は存在する([2;217頁、定理45.9])。そういう関数に対しては、したがって、上記の定理は$\alpha=0$で成立し、次のように一般化できる。

与えられた$\beta>1$に対して$\lim_{x\to\infty} x^{-\beta}a(x)=\alpha$であるとする。そうすると

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{1+\beta}}\int_0^x a(y)dy=\frac{\alpha}{1+\beta}$$

である(∵ロピタルの定理)。

以下、ウィーナーのその著作[1]の中の記号と番号をそのまま使って彼等の議論を再現するとそのマーサーの定理の自明でない連続版への一般化が：

> $0<\alpha<1$であるとする。
>
> (18.03) $\alpha s(x)+(1-\alpha)\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x s(y)dy\to s\ (x\to\infty)$
>
> であるならば
>
> (18.04) $s(x)\to s\ (x\to\infty)$
>
> である。

となるというのである。確かに形は似ている。しかし、何故(18.03)の積分区間の下限が1なのか(それは0であるべきではなかったのか)？(そうだとするとその第二項の分母の式は$x-1$な

のではないか)という疑問も沸く。更に、独立変数の変数変換により次の問題に変換されると主張されている。実際、$x=e^{\xi}, S(\xi)\equiv s(e^{\xi})$とおいて独立変数を$\xi$とするとそれは定義域が$(-\infty,\infty)$の関数$S(\xi)$に変換される。そのとき$1\leqq y=e^{\eta}\leqq x$に対してはその従属変数$\eta$の値域は$(0,\infty)$で$dy=e^{\eta}d\eta$で積分範囲が$\boxed{y:1\to x\equiv e^{\xi}}$に対応して$\boxed{\eta:0\to\xi}$に代わるからということで次の問題を得る。

> (18.05) $\alpha S(\xi)+(1-\alpha)\int_0^{\xi} e^{\eta-\xi}S(\eta)d\eta\to s\ \ (\xi\to\infty)$
>
> であるならば
>
> (18.06) $S(\xi)\to s\ \ (\xi\to\infty)$
>
> である。

この命題は成り立つのであろうか?その逆の場合((18.06)⇒(18.05))は$s=\infty$である場合も含めて成り立ちそうな気がする。実際、(18.05)の積分の中で$y=\xi-\eta$とおくと、$dy=-d\eta$で積分範囲が$\boxed{\eta:0\to\xi}$に対応して$\boxed{y:\xi\to 0}$であるから

(18.05)' $\alpha S(\xi)+(1-\alpha)\int_0^{\xi} e^{\eta-\xi}S(\eta)d\eta=\alpha S(\xi)+(1-\alpha)\int_0^{\xi} e^{-y}S(\xi-y)dy$

となるので$\xi\to\infty$のとき形式的に項別積分するならばその極限は

$$\alpha s+(1-\alpha)s\int_0^{\infty} e^{-y}dy=s$$

になる。ということはこの命題が成立するならば(18.06)⇔(18.05)となってしまう。それはやはり無理なのではなかろうか?というのが私の感想である。ところで、これは次の定理の特別な場合であるとウィーナーが主張して掲げた定理は

> **定理XVII**:$F(x)$はすべての有限な範囲$(0,A)$の上で可測で有界であるとする。$K(x)$は$(0,\infty)$の上でLに属する、つまり、
>
> (18.07) $\int_0^{\infty}|K(\xi)|d\xi<\infty$
>
> であるとする。(また更に)
>
> (18.08) $F(x)+\int_0^{x} K(x-\xi)F(\xi)d\xi\to s\ \ (x\to\infty)$
>
> であるとする。そのとき(更に)もし$Re(w)\geqq 0$なる(すべての)複素数wに対して
>
> (18.09) $\int_0^{\infty} K(\xi)e^{-w\xi}d\xi\neq -1$
>
> であるならば
>
> (18.10) $F(x)\to s/(1+\int_0^{\infty} K(\xi)d\xi)\ \ (x\to\infty)$
>
> が成り立つ。逆に、$K(x)\in L(0,\infty)$で$\int_0^{\infty} K(\xi)d\xi\neq -1$であるとする。更にその条件を満足するすべての$F(x)$に対して(18.08)の成立が(18.10)を意味するとする。そうすると(18.09)が成立しなければならない。

である。ここまで来るとαが消えてしまっているし、邪推するならば、(18.10)⇒(18.08)だけなら成り立ちそうではあるが、ウィーナーは表題の定理とは全く無関係にこの定理の証明がしたかったのであろうと私は推測している。何故(18.09)の定積分の値で-1が排除されなければならないのであろうか?しかも、その証明の展開はとても興味深いのであるが、その議論の中には明らかな計算間違いも有ったのでそれに応じた修正を施したものをここで展開した。以下その証明を検証するが、ウィーナーはその離散版も掲げるべきだったと思う。本稿ではこの理

論の解説、修正後にその離散版を論じている。私はこのウィーナーの方法を学んでそれがその後に現れ発展した応用確率論の再生理論の元になったのではないかと思った。

ウィーナーの定理(定理XⅦ)の証明：ウィーナーはその前半部分を証明する前に先ず後半部分を証明した。その後半部分は背理法で証明されている。その前半部分を証明するのに「畳み込み」の式、その式はすでに(18.08)の第二項に現れている、を導入してその分析にボルテラ積分方程式とラプラス変換による方法を使っている。その部分を一部を修正しながら再現する。一般的に$(0, \infty)$を定義域とするすべての有限な範囲で可積分な二つの関数$A(x)$と$B(x)$との畳み込みを表すのに

(18.14) $(A \bigstar B)(x)$

という記号を使う。すなわち、

(18.15) $(A \bigstar B)(x) \equiv \int_0^x A(y)\,B(x-y)\,dy$

である。形式上$B(x)$と$A(x)$との畳み込みは$(B \bigstar A)(x) \equiv \int_0^x A(x-y)\,B(y)\,dy$であるが両者は変数変換により、容易に等しいことが分かる、つまり、$(A \bigstar B)(x) = (B \bigstar A)(x)$である。当然$(A \bigstar B)(\infty) = (B \bigstar A)(\infty)$となって欲しい訳で形式的に項別積分すると

$$\left(\lim_{x\to\infty} A(x)\right)\left(\int_0^\infty B(y)\,dy\right) \text{と} \left(\int_0^\infty A(y)\,dy\right)\left(\lim_{x\to\infty} B(x)\right)$$

のどちらの値が現れるのであろうかと私は気になる。

任意の正数w_0に対して

(18.11) $\qquad F(x) = e^{w_0 x}$

とおくことで帰謬(きびゅう)法(reductio ad absurdum=背理法)で証明することができる(∵このように定義された$F(x)$はすべての有限な範囲$(0, A)$の上で可測で有界であるが、$x \to \infty$のとき$F(x)$は発散する。すなわち、(18.10)は成立しない)。しかして、$w_0 > 0$は

(18.12) $\qquad \int_0^\infty K(\xi)\,e^{-w_0 \xi}\,d\xi = -1$

なる数であるとする、という訳で[1；59頁↑3]に「(18.10)は明らかに成り立たないのでその定理の後半部分は証明された」と主張されたのである。以下その計算を(元のものよりは若干)詳細に進める。(18.11)を(18.08)の左辺に代入して

$$e^{w_0 x} + \int_0^x K(x-\xi)\,e^{w_0 \xi}\,d\xi = e^{w_0 x}\left(1 + \int_0^x K(x-\xi)\,e^{w_0(\xi - x)}\,d\xi\right)$$

$y = x - \xi$とおくと$dy = -d\xi$；

ξ	$0 \to x$
y	$x \to 0$

$$= e^{w_0 x}\left(1 + \int_0^x K(y)\,e^{-w_0 y}\,dy\right) \underset{\because (18.12)}{=} e^{w_0 x}\left(-\int_x^\infty K(y)\,e^{-w_0 y}\,dy\right)$$

よって

(18.13) $\left| F(x) + \int_0^x K(x-\xi)\,F(\xi)\,d\xi \right| = \left| e^{w_0 x} \int_x^\infty K(\xi)\,e^{-w_0 \xi}\,d\xi \right|$

$\qquad \leqq \int_x^\infty |K(\xi)|\,d\xi \to 0 \quad (x \to \infty)$ (∵ $x \leqq \xi < \infty$では$e^{w_0(x-\xi)} \leqq 1$)

となる、ということでその後半部分が先に証明された。この左辺の絶対値を取る記号の中の二番目の式はその関数$F(x)$と$K(x)$の「畳み込み」を表す式である。

先に述べたコーシーの定理の観点からすれば(18.10)⇒(18.08)が成り立つべきである。その主張は「$F(x)$はすべての有限な範囲$(0, A)$の上で可測で有界で$K(x)$は$(0, \infty)$の上でLに属すると仮定する。$F(x) \to t \quad (x \to \infty)$ならば

(18.08)″ $F(x) + \int_0^x K(x-\xi)\,F(\xi)\,d\xi \to t\left(1 + \int_0^\infty K(\xi)\,d\xi\right) \quad (x \to \infty)$

が成り立つ」である。実際、$(A \bigstar B)(x) = (B \bigstar A)(x)$ということから

$$F(x)+\int_0^x K(x-\xi)F(\xi)d\xi=F(x)+\int_0^x F(x-\xi)K(\xi)d\xi$$

が成り立つ。$F(x)$は$(0,\infty)$の全範囲の上で有界である。$K(x)$は$(0,\infty)$の上で可積分であるから$x\to\infty$のときその積分記号下で極限を取ることができるので求める結果(18.08)′を得る。しかし、今回はボルテラ積分方程式の理論の助けを得て必要十分条件にまで高めることができるというのがウィーナーの理論である。それで(18.08)の左辺が定義する関数を$G(x)$とすると

(18.16) $\quad G(x)=F(x)+(K\bigstar F)(x)$

である。これは$G(x)$が既知で、$F(x)$が未知とする**ボルテラ積分方程式**と見ることができる。Volterara, *Leçons sur les Equations Intégrales et les Equations Intégro-Différentielles,* Paris, 1913によれば、その(有界で可測な)解$F(x)$は一意に定まって

(18.17) $\quad F(x)=G(x)+(Q\bigstar G)(x)$

の形に書くことができることは良く知られている。ここに、その**解核**$Q(x)$自身は

(18.18) $\quad Q(x)+K(x)=(K\bigstar Q)(x)=(Q\bigstar K)(x),$

を満足するので、

(18.19) $\quad Q(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{(n)}(x),$

で与えられる。ここに、$K^{(n)}(x)\equiv(\overbrace{K\bigstar K\bigstar\cdots\bigstar K}^{n\text{重の畳み込み}})(x)$, $K^{(1)}(x)\equiv K(x)$である。(18.16)のそういう解(18.17)は**ラプラス変換**の方法(S. Bochner, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale,* Leipzig, 1932, chapter VII参照)を使って容易に得ることができる(そういう古い文献は当然当たっておくべきではあったが私はその言語を理解してないので自己流で以下のように展開して導いてみた)。実際、$F(x)$, $G(x)$, $K(x)$, $Q(x)$のラプラス変換をそれぞれ$\zeta(w)$, $\eta(w)$, $k(w)$, $q(w)$とすると

(18.20) $\quad k(w)\equiv\int_0^{\infty}K(y)e^{-wy}dy\ ;\ \zeta(w)\equiv\int_0^{\infty}F(y)e^{-wy}dy\ ;$

(18.21) $\quad q(w)\equiv\int_0^{\infty}Q(y)e^{-wy}dy\ ;\ \eta(w)\equiv\int_0^{\infty}G(y)e^{-wy}dy$

である。(18.16)は

$$\eta(w)=\zeta(w)+k(w)\zeta(w)$$

と変換される。したがって、形式的には

$$\zeta(w)=\frac{\eta(w)}{1+k(w)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-k(w))^n\eta(w)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n k^n(w)\right)\eta(w)=\eta(w)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n k^n(w)\right)$$

と展開することができる(ここに、その最初の等号が成立する為には$|k(w)|<1$であることが必要十分である)。この式は$k(w)=-1$なる点wでは$\zeta(w)$が未定義であることことを意味する。このことは(18.09)という条件設定に意味があることを教えてくれている。したがって、これを(逆変換できるとして)逆変換して(18.17)と(18.19)を得る。(18.18)の成立は(18.17)を(18.16)に代入することで分かるし、そのことから帰納的に(18.19)も導ける。実際、(18.19)の$Q(x)$に$K(x)$を加えると形式的に

(18.18)′ $\quad Q(x)+K(x)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n K^{(n)}(x)$

$$=(K(x))\bigstar\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{(n)}(x)\right)\underset{\text{或いは}}{=}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n K^{(n)}(x)\right)\bigstar(K(x))\ \text{ということで}$$

$$=(K\bigstar Q)(x)=(Q\bigstar K)(x)$$

となる。(18.18)をラプラス変換するならば

$$q(w)+k(w)=k(w)\,q(w)$$

を得る。これから

(18.22) $$q(w)=\frac{k(w)}{k(w)-1}\ ;\ k(w)=\frac{q(w)}{q(w)-1}$$

を得る(この関係の中のq, kは$q>1\Leftrightarrow k>1$; $q\leqq -1\Rightarrow k<1$; $k\leqq -1\Rightarrow q<1$を満足することに注意)。この段階で元の式(18.22)の導出に計算間違いがあったことが分かったから以下の理論にはそれに合わせた修正が必要になる。最終の目的は$F(x)$を求めることであり、その為に必要な$Q(x)$は**ラプラス積分の逆変換**(inversion of a Laplace integral)で見つけることができるというのがウィーナーの処方である。(18.22)のもう一つの式から

(18.19)' $$K(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}Q^{(n)}(x),$$

であることも分かる。その為にはやはり$|q(w)|<1$であることが必要十分である。

問題の定理は今や次のように述べることができる。

定理XⅧ：ボルテラ積分方程式(18.16)の解核$Q(x)$が$L(0,\infty)$に属す、つまり、

(18.23) $\int_0^{\infty}|Q(y)|dy<\infty$

であるための必要十分条件は

(18.24) $Re(w)\geqq 0$で$|k(w)|<1$

となることである。

ここに、元の理論では(18.24)には(18.09)と同じ式が並べられていたが以上の理論展開に応じてこのように修正した。

もしこの定理が成立するならば定理XⅦの前半部分は直ちに導かれる。実際、そこで立てた仮定の下で

(18.25) $F(x)=G(x)+\int_0^{x}G(x-y)\,Q(y)\,dy$ ((18.17)と同じ式)

が成り立つ。ここに、(仮定により)$G(x)$はすべての有限な範囲の上で有界で$x\to\infty$のとき$G(x)\to s$となる関数である。つまり、$G(x)$は$(0,\infty)$の範囲全体の上で有界になる。$Q(x)$は$(0,\infty)$の上で可積分であるからその積分記号の下で$x\to\infty$の極限を取ることができて

(18.26) $F(\infty)=s+s\int_0^{\infty}Q(y)\,dy=s(1+q(0))=k(0)\,s/(k(0)-1)$

という結果を得る((18.24)という仮定の下では$k(0)\neq 1$であることに注意)。これは正しく求めている公式(18.10)ではないのでその定理の記述の修正が必要になる。(18.10)は

(18.10)' $F(x)\to\left(\int_0^{\infty}K(\xi)\,d\xi\right)s/\left(\int_0^{\infty}K(\xi)\,d\xi-1\right)\quad(x\to\infty)$

であるべきである。もし(18.26)で$q(0)=-1$であったとするとその場合は$s=0$であるか$k(0)=0$であるかのいずれかでなければならないことが分かる。

(18.24)の必要性の証明：(18.23)が成り立つと仮定する(これは(18.19)で定義される式であるから(18.24)が成り立つことが必要になる)。そうすると$k(w)$と$q(w)$は伴に半平面$Re(w)>0$の中で解析的でその境界$Re(w)=0$を含めた領域で連続になることが観て取れる。このことは(18.22)の右辺の分母が$Re(w)\geqq 0$に対して0にならないことを意味する。したがって、(18.24)が成立する。□

(18.24)の十分性の証明：これはもっと難しい。仮定(18.07)の下では$k(w)$は(ラプラス積分で

(18.20)の最初の式で)$Re(w)\geqq 0$に対して定義される。$q(w)$は(18.24)という仮定の下で(18.22)で定義される。フーリェ変換の方法を使って$L(0,\infty)$に属す或る関数$Q(x)$が存在してその$q(w)$が(18.21)の最初の式で表されることを証明する。複素変数$w=x+iu$の各$x\geqq 0$を固定した場合$q(w)$はその虚部の変数u $(-\infty<u<\infty)$の関数と見なすことができる。それを$q_x(u)\equiv q(x+iu)$とおく。ここでは次の補助的な関数

$$\text{(18.27)}\quad \phi_A(u)\equiv\begin{cases} 1 & |u|<A\text{のとき} \\ 2-|u|/A & A\leqq|u|<2A\text{のとき} \\ 0 & 2A<|u|\text{のとき}\end{cases}$$

を導入する。そして(訳者註：(18.28)は(18.22)と同じ式、何故＊の上添字が必要だったのか分からなかったのであるが上記のように$q_x(u)$を定義したので以下のように修正を加えて展開する)。$k_x(u)$も同様に$k_x(u)\equiv k(x+iu)$であると定義される。そうすると(各$x\geqq 0$毎に)

$$\text{(18.28)}\qquad q_x(u)=\frac{k_x(u)}{k_x(u)-1}$$

である。

$$\text{(18.30)}\quad q_1(u)\equiv\phi_A(u)\,q_x(u),\quad q_2(u)\equiv(1-\phi_A(u))\,q_x(u)$$

とおくと

$$\text{(18.29)}\quad q_x(u)=q_1(u)+q_2(u),$$

が成り立つ(原著の式番号を尊重した)。Aが十分大きいとき$q_1(u)$と$q_2(u)$は伴にLの関数のフーリェ変換になることを証明したい。

先ず第一に

$$\text{(18.31)}\quad q_1(u)=\begin{cases} \dfrac{\phi_A(u)\,k_x(u)}{\phi_{2A}(u)\,k_x(u)-\phi_{2A}(u)} & |u|<2A\text{のとき}\quad(\text{この範囲では}\ \phi_{2A}(u)=1) \\ 0 & 2A\leqq|u|\text{のとき}\end{cases}$$

となる。つまり$q_1(u)$はその各々が有限な範囲の外側では0、その分母の関数が分子の関数が0になっている領域の内部の点だけで0になっているLの関数のフーリェ変換になっている二つの関数の商になっている。そうすれば$q_1(u)$がLの関数のフーリェ変換になっていることを証明するのにウィーナーによる理論†に訴えることができる(脚注†：N. Wiener, The Fourier Integral and Certain of its Applications, Cambridge, 1933; Lemmas $6_7, 6_{10}, 6_{18}$,)。(また)

$$\text{(18.32)}\quad q_2(u)=(1-\phi_A(u))\frac{k_x(u)(1-\phi_{A/2}(u))}{k_x(u)(1-\phi_{A/2}(u))-1}$$

である。これがLの関数のフーリェ変換になっていることを示すことは、同じことが

$$\text{(18.33)}\quad k_x(u)(1-\phi_{A/2}(u))\{k_x(u)(1-\phi_{A/2}(u))-1\}^{-1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\{k_x(u)(1-\phi_{A/2}(u))\}^n$$

に関しても成り立つことを示せば簡単である。ところで

$$\text{(18.34)}\quad \{k_x(u)(1-\phi_{A/2}(u))\}^n$$

は或る関数$h_n(x)$のフーリェ変換になっている。それに関しては

$$\text{(18.35)}\quad \int_{-\infty}^{\infty}|h_n(\xi)|d\xi\leqq\left(\int_{-\infty}^{\infty}|h_1(\xi)|d\xi\right)^n$$

$$\leqq\left(\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\left|K(\xi)-\frac{1}{\pi A}\int_0^{\infty}K(\eta)\frac{\cos(A/2)(\xi-\eta)-\cos A(\xi-\eta)}{(\xi-\eta)^2}\right|d\eta\right)^n$$

が成り立つ。よく知られているファイエ型の議論はAが括弧内の積分が $0<\lambda<1$ なる任意に与えられた数λよりも小さくなるように十分大きく選ぶことができることを示している。(そうすると) $q_2(u)$が次の性質を持つ関数$F_2(x)$のフーリエ変換であることが直ちに従う。

(18.36) $\int_{-\infty}^{\infty}|F_2(\xi)|d\xi \leqq \dfrac{\lambda}{1-\lambda}$

このことと $q_1(u)$に対する類似な結果を組み合わせて

(18.37) $q_x(u)=\dfrac{k_x(u)}{k_x(u)-1}=\int_{-\infty}^{\infty}F(\xi)\,e^{-iu\xi}d\xi,\ F(\xi)\in L$

と書くことができることが分かる。(18.37)は

(18.38) $\int_{-\infty}^{0}F(\xi)\,e^{-iu\xi}d\xi=-\int_{0}^{\infty}F(\xi)\,e^{-iu\xi}d\xi+q_x(u)$

と書き換えることができる。

さて、$|w|\to\infty$であるならば半平面$Re(w)\geqq 0$の中で一様に$k(w)\to 0$であることが容易に分かる。仮定(18.24)により$Re(w)\geqq 0$に対して$k(w)-1\neq 0$であるから正の定数cで

(18.39) $|k(w)-1|\geqq c>0$

なるものが存在する。したがって、

(18.40) $-\int_{0}^{\infty}F(\xi)\,e^{-w\xi}d\xi+q(w)$

は右側の半平面の中で解析的で有界で虚軸を含めた領域まで連続なwの関数である。同様に

(18.41) $\int_{-\infty}^{0}F(\xi)\,e^{-w\xi}d\xi$

は左側の半平面の中で解析的で有界で虚軸を含めた領域まで連続なwの関数である。しかも、その二つの関数は虚軸の上で一致する。古典的なリーマン・パンルベ(Riemann-Painlevē)の議論によりそれらは同じ解析関数の部分であることが容易に分かり、だから、それは有界な整関数である。よって、それは定数となり

(18.42) $\int_{-\infty}^{0}F(\xi)\,e^{-w\xi}d\xi\to 0\ \ (w\to-\infty)$

であるからその定数は0しか有り得ない。したがって、

(18.43) $q(w)=\dfrac{k(w)}{k(w)-1}=\int_{0}^{\infty}F(\xi)\,e^{-w\xi}d\xi,$

である。他方、(18.19)から$w_0>0$で

(18.44) $\dfrac{k(w)}{k(w)-1}=\int_{0}^{\infty}Q(\xi)\,e^{-w\xi}d\xi,\ Re(w)>w_0$

でかつ

(18.45) $\int_{0}^{\infty}|Q(\xi)|\,e^{-w_0\xi}d\xi<\infty$

なるものが存在する。ラプラス変換の一意性定理により$F(x)\,e^{-wx}$と$Q(x)\,e^{-wx}$は殆ど到る所一致する。よって、$Q(x)\in L$となる。□

以下は本稿で提案するウィーナーの定理(定理XⅦ)の離散版である。

与えられた数列$a_n,\ b_n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$に対し有限な値sを以って

(*1) $a_n+\sum_{r=0}^{n}a_r\,b_{n-r}\to s\ \ (n\to\infty)$

であるとする。また次の級数は有限な値tに絶対収束して

(*2) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = t \neq -1$
であるとする。そのとき
(*3) $a_n \to s/(1+t)\ (n\to\infty)$
が成り立つ。逆に、任意に与えられた有限な値に収束する数列$\{a_n\}$に対して(*1)の数列が有限な値に収束することが(*3)を意味するならば(*2)が成立することが必要十分である。

ウィーナーの理論がラプラス変換を利用したのに対応して母関数の方法が使える。以下は、与えられた(収束する)数列$\{c_n\}$と$\{b_n\}$に対して

$$c_n = a_n + \sum_{r=0}^{n} a_r b_{n-r}\ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を満足する数列$\{a_n\}$を決定する方法になっている。それぞれの数列の母関数は

$$A(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ ;\ B(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\ ;\ C(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

で与えられる。それらの収束半径をそれぞれR_A, R_B, R_Cとする。そうすると$|z| < R \equiv min\{R_A, R_B, R_C\}$において
(*5) $C(z) = A(z) + A(z)B(z)$
が成り立つ。これを$A(z)$について解いて

$$A(z) = \frac{C(z)}{1+B(z)} = C(z)\sum_{k=0}^{\infty}(-B(z))^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C(z) B^k(z)$$

を得る。この二番目の等号が成立するための必要十分条件は$|B(z)| < 1$である。それでこの関係から数列$\{a_n\}$は$\{b_n\}$と$\{c_n\}$から決めることができる。そうして定まる数列a_nが収束するかどうかの判定は簡単ではない。□ところで次の定理はよく知られている。

チェザロの定理：有限な極限値を以って$a_n \to \alpha$, $b_n \to \beta$ならば

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu} \to \alpha\beta\ (n\to\infty)$$

が成り立つ([2；72頁])。この定理の証明を丁寧に読むと次の命題が成立することが分かる。

級数$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$は有限な値$t$に絶対収束し、数列$\{a_n\}$は$n\to\infty$のとき$\alpha$に収束する。そのとき$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b_{n-\nu} \to \alpha t\ (n\to\infty)$が成り立つ(この命題は数列$\{a_n\}$が定発散する場合も成立する)。

この結果の観点からするとそのウィーナーの定理の離散版も益々その逆こそが成立すると私には感じられる。それにしても$t = -1$の場合は何故排除しなければいけないのであろうか？その逆の部分は今主張したことにより$\alpha + \alpha t$に収束する訳でその値が有限なsであるというのであるから、$\alpha(1+t) = s$が成立しなければならずその極限値は

$$\alpha = s/(1+t)$$

であったということになる。そこで、$s \neq 0$でかつ$t = -1$であったら形式的にαは発散してしまいその有限性に反するということでtのその取る値-1を排除することが正当化できそうである。しかし、$t = -1$と$s = 0$の組合せは可能であるし、sが発散する場合も考慮するならば$t = -1$を排除する必要は無いと思われる。

参考文献

[1]Payley and Wiener, Fourier Transforms in the Complex Domain, American Mathematical Society Colloquium Publications Volume XIX 1934)の第IV章§18(pp. 58-63)
[2]小松勇作、「解析概論I」廣川書店(昭和37年=1962年)