数理解析研究所講究録
第 1925 巻 2014 年 39-46

等質空間がコンパクト商を持つための位相的制約
A topological obstruction for the existence of compact quotients of homogeneous spaces

東京大学大学院数理科学研究科 森田陽介 *
Yosuke Morita
Graduate School of Mathematical Science, The University of Tokyo

1 序

G を線型実簡約 Lie 群, H を G の閉部分群で, G の中で簡約であるようなものとする (このとき G/H を簡約型等質空間と呼ぶ). G, H の連結成分は有限個と仮定する. G の離散部分群 Γ が等質空間 G/H に固有不連続かつ自由に作用するとき, 射影 $G/H \to \Gamma\backslash G/H$ は 被覆写像になり, $\Gamma\backslash G/H$ は G/H を局所モデルとする多様体になる. このとき $\Gamma\backslash G/H$ を G/H の Clifford–Klein 形, Γ を G/H の不連続群と呼ぶ.

問題 1.1. (Kobayashi [5]) 与えられた簡約型等質空間 G/H に対して, G/H の Clifford–Klein 形で, コンパクトなものが存在するかどうかを判定せよ.

A. Borel [2] の結果より, H がコンパクトな場合 (例えば, G/H が Riemann 対称空間の場合) にはコンパクト Clifford–Klein 形が存在する. 一般の簡約型等質空間に対しては, コンパクト Clifford–Klein 形が存在することもあれば, しないこともあり, 1980 年代後半に小林俊行氏が系統的な研究を始めてから, コンパクト Clifford–Klein 形の存在に対する様々な障害がこれまでに発見されている ([7], [9], [10], [4] などに結果の解説・案内がある). 今回の講演では,

- コンパクト Clifford–Klein 形の存在に対する新しい障害
- その障害によってコンパクト Clifford–Klein 形の非存在が分かるような既約対称空間の分類

について報告したい.

* ymorita@ms.u-tokyo.ac.jp

2 主結果

G/H を簡約型等質空間とする. G の極大コンパクト群 K を, $K \cap H$ が H の極大コンパクト群になるように取る. G, H, K の Lie 環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}$ とし, その複素化を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ とする.

定理 2.1. (M-. [11]) もし, 以下の条件が成り立つならば, G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない:

(条件 A): Lie 環の相対コホモロジーの間の自然な準同型 $i : H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; \mathbb{C}) \to H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$ が単射でない.

小林俊行・小野薫両氏によって, コホモロジーと特性類の理論を用いたコンパクト Clifford–Klein 形の存在に対する位相幾何的な障害が発見されている [8]. 定理 2.1 はその発展として得られた.

注意 2.2. $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \simeq H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$, $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} \simeq H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$ であるから, (条件 A) は

(条件 A′): Lie 環の相対コホモロジーの間の自然な準同型 $i : H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbb{R}) \to H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}; \mathbb{R})$ が単射でない.

と書くこともできる. しかし実用上は (条件 A) の形のほうが使いやすい.

3 定理 2.1 の証明

[11] に沿って, 定理 2.1 の証明を与える.

ステップ 1: まず, H は連結であるとしても議論の一般性を失わないことに注意する. というのも, もし $\Gamma \subset G$ が G/H に固有不連続, 自由, かつ余コンパクトに作用するならば, G/H_o (ここで, H_o は H の単位元成分) にも固有不連続, 自由, かつ余コンパクトに作用するからである. 以下, H は連結であると仮定する.

ステップ 2: Kobayashi–Ono [8] によって, Lie 環の相対コホモロジーと Clifford–Klein 形の de Rham コホモロジーを結びつける準同型

$$\eta : H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; \mathbb{C}) \to H^{\bullet}(\Gamma \backslash G/H; \mathbb{C})$$

が構成された. その定義と基本性質をステップ 2 で簡単に纏めておく.

G の G/H への作用は推移的であるから, G/H 上の複素数値 G-不変微分形式全体の集合 $\mathcal{A}(G/H)^G$ は 1 点の値だけで決定され,

$$\mathcal{A}(G/H)^G \simeq (\Lambda(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^*)^{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}}$$

という同型が成り立つ. 外微分 $d : \mathcal{A}(G/H) \to \mathcal{A}(G/H)$ は G-不変な元を G-不変な元にうつすので, $H^{\bullet}(\mathcal{A}(G/H)^G, d)$ が定義される. 上述の同型のもと, $H^{\bullet}(\mathcal{A}(G/H)^G, d)$ は Lie 環の相対コホモロジー $H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$ と同一視できるのであった.

さて $\Gamma\backslash G/H$ を Clifford–Klein 形としよう．このとき自然な包含写像

$$\eta : (\Lambda(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})^*)^{\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \simeq \mathcal{A}(G/H)^G \hookrightarrow \mathcal{A}(G/H)^{\Gamma} \simeq \mathcal{A}(\Gamma\backslash G/H)$$

は外微分 d と交換するから，コホモロジーの間の準同型

$$\eta : H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; \mathbb{C}) \to H^{\bullet}(\Gamma\backslash G/H; \mathbb{C})$$

が誘導される．この準同型に関して次が成り立つ:

補題 3.1. (Kobayashi–Ono [8]) $\Gamma\backslash G/H$ がコンパクトなら，$\eta : H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; \mathbb{C}) \to H^{\bullet}(\Gamma\backslash G/H; \mathbb{C})$ は単射．

証明. $\eta : \mathcal{A}(G/H)^G \to \mathcal{A}(\Gamma\backslash G/H)$ は G/H 上の G-不変な体積形式を $\Gamma\backslash G/H$ 上の体積形式にうつす．コンパクト多様体上の体積形式はゼロでないコホモロジー類を定めるから，最高次では命題が成り立つことが分かる．最高次以外のコホモロジーについては，$H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$ の Poincaré 双対性から従う． □

補題 3.1 は，$H^{\bullet}(\Gamma\backslash G/H; \mathbb{C})$ というコンパクト Clifford–Klein 形の大域的な位相に関する量が，$H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; \mathbb{C})$ という局所的な幾何構造のみから決まる量によって制約を受けていることを主張している．

ステップ 3: 補題 3.1 を活用するために，$\Gamma\backslash G/H$ と同じコホモロジー群を持つが，局所的な幾何構造が異なっているような Clifford–Klein 形を与える．

もし $\Gamma \subset G$ が G/H に固有不連続かつ自由に作用するならば，Γ は $G/(K \cap H)$ にも固有不連続かつ自由に作用し，自然な射影

$$\pi : \Gamma\backslash G/(K \cap H) \to \Gamma\backslash G/H$$

は $H/(K \cap H)$ をファイバーとするファイバー束になる．

補題 3.2. $\pi : \Gamma\backslash G/(K \cap H) \to \Gamma\backslash G/H$ はコホモロジーの間の同型

$$\pi^* : H^{\bullet}(\Gamma\backslash G/H; \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^{\bullet}(\Gamma\backslash G/(K \cap H); \mathbb{C})$$

を誘導する．

証明. ファイバー束 $\pi : \Gamma\backslash G/(K \cap H) \to \Gamma\backslash G/H$ のファイバー $H/(K \cap H)$ が可縮であることから直ちに従う． □

ステップ 4: $\Gamma\backslash G/H$ をコンパクトな Clifford–Klein 形とし．

$$\begin{tikzcd}
H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; \mathbb{C}) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\eta"] & H^{\bullet}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}; \mathbb{C}) \arrow[d, "\eta"] \\
H^{\bullet}(\Gamma\backslash G/H; \mathbb{C}) \arrow[r, "\pi^*"] & H^{\bullet}(\Gamma\backslash G/(K \cap H); \mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

という可換図式を考える. 補題 3.2 より $\pi^* : H^\bullet(\Gamma\backslash G/H;\mathbb{C}) \to H^\bullet(\Gamma\backslash G/(K\cap H);\mathbb{C})$ は同型である. 一方, 補題 3.1 より, 左側の $\eta : H^\bullet(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C};\mathbb{C}) \to H^\bullet(\Gamma\backslash G/H;\mathbb{C})$ は単射でなくてはならない. すると $\pi^*\circ\eta = \eta\circ i$ も単射, したがって $i : H^\bullet(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C};\mathbb{C}) \to H^\bullet(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{k}_\mathbb{C}\cap\mathfrak{h}_\mathbb{C};\mathbb{C})$ が単射でなくてはならない. これで, 定理 2.1 の証明が完成した.

4 (条件 A) を満たす既約対称空間の分類

定理 4.1. (M-., 論文準備中) G/H を既約対称空間とする. このとき, 定理 2.1 の (条件 A) が成り立つことは, 以下と同値である:

(条件 B): $\operatorname{rank} H = \operatorname{rank}(K\cap H)$ かつ, $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ は以下のどれとも同型でない.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	条件
$\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{l}$	$\Delta\mathfrak{l}$	$\mathfrak{l}$: 単純 Lie 環
$\mathfrak{l}_\mathbb{C}$	$\mathfrak{l}$	$\mathfrak{l}$: 単純 Lie 環
$\mathfrak{sl}(2n+1,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$	$n\geqslant 1$
$\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$	$n\geqslant 1$
$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n-1,\mathbb{C})$	$n\geqslant 3$
$\mathfrak{e}_{6,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{f}_{4,\mathbb{C}}$	—

表 1: (条件 B) を満たさない $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$

Berger[1] によって既約対称空間は分類されているので, (条件 B) は次のように書き直すこともできる:

(条件 B′): $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ は以下のどれかと同型である.

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	条件
$\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$	$n\geqslant 1$
$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(p,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(q,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}$	$p,q\geqslant 1$
$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(p,q)$	p,q: 奇数
$\mathfrak{su}(p,q)$	$\mathfrak{so}(p,q)$	p,q: 奇数
$\mathfrak{su}(n,n)$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\oplus\mathbb{R}$	$n\geqslant 2$
$\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(2)$	$n\geqslant 2$
$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(2)$	$n\geqslant 2$
$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(p,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(q,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}$	$p,q\geqslant 1$
$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{H})$	$\mathfrak{sl}(p,\mathbb{H})\oplus\mathfrak{sl}(q,\mathbb{H})\oplus\mathbb{R}$	$p,q\geqslant 1$
$\mathfrak{so}(p+q,\mathbb{C})$	$\mathfrak{so}(p,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(q,\mathbb{C})$	$p,q\geqslant 2$ or p: 偶数, $q=1$

$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}$	$n\geqslant 2$
$\mathfrak{so}(n,n)$	$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$	$n\geqslant 2$
$\mathfrak{so}^*(2n)$	$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$	$n\geqslant 2$
$\mathfrak{so}(p+r,q+s)$	$\mathfrak{so}(p,q)\oplus\mathfrak{so}(r,s)$	p,q: 奇数, $r\geqslant 1$
$\mathfrak{so}(n,n)$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}$	$n\geqslant 2$
$\mathfrak{so}^*(4n)$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})\oplus\mathbb{R}$	$n\geqslant 1$
$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}$	$n\geqslant 1$
$\mathfrak{sp}(p+q,\mathbb{C})$	$\mathfrak{sp}(p,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sp}(q,\mathbb{C})$	$p,q\geqslant 1$
$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$	$n\geqslant 1$
$\mathfrak{sp}(n,n)$	$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$	$n\geqslant 1$
$\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})\oplus\mathbb{R}$	$n\geqslant 1$
$\mathfrak{sp}(n,n)$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{H})\oplus\mathbb{R}$	$n\geqslant 1$
$\mathfrak{e}_{6,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$	—
$\mathfrak{e}_{6,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{sl}(6,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	—
$\mathfrak{e}_{6,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{so}(10,\mathbb{C})\oplus\mathbb{C}$	—
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	$\mathfrak{sl}(6,\mathbb{R})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$	—
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{H})\oplus\mathfrak{su}(2)$	—
$\mathfrak{e}_{6(-26)}$	$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{H})\oplus\mathfrak{su}(2)$	—
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	$\mathfrak{so}(5,5)\oplus\mathbb{R}$	—
$\mathfrak{e}_{6(-26)}$	$\mathfrak{so}(9,1)\oplus\mathbb{R}$	—
$\mathfrak{e}_{7,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{sl}(8,\mathbb{C})$	—
$\mathfrak{e}_{7,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{so}(12,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	—
$\mathfrak{e}_{7,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_{6,\mathbb{C}}\oplus\mathbb{C}$	—
$\mathfrak{e}_{7(7)}$	$\mathfrak{sl}(8,\mathbb{R})$	—
$\mathfrak{e}_{7(7)}$	$\mathfrak{sl}(4,\mathbb{H})$	—
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{sl}(4,\mathbb{H})$	—
$\mathfrak{e}_{7(7)}$	$\mathfrak{e}_{6(6)}\oplus\mathbb{R}$	—
$\mathfrak{e}_{7(-25)}$	$\mathfrak{e}_{6(-26)}\oplus\mathbb{R}$	—
$\mathfrak{e}_{8,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{so}(16,\mathbb{C})$	—
$\mathfrak{e}_{8,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{e}_{7,\mathbb{C}}\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	—
$\mathfrak{f}_{4,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{sp}(3,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	—
$\mathfrak{f}_{4,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{so}(9,\mathbb{C})$	—
$\mathfrak{g}_{2,\mathbb{C}}$	$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$	—

表 2: (条件 B) を満たす $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$

定理 4.1 の (条件 B) $\Rightarrow$ (条件 A) の証明の鍵となる補題を証明しておく.

補題 4.2. (M-. [11]) G/H を簡約型等質空間とする. $J_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C})}$ を,

$$\{P|_{\mathfrak{h}_\mathbb{C}} : P \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})^{\mathfrak{g}_\mathbb{C}},\ P \text{ の定数項は } 0\}$$

が生成する $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^{\mathfrak{h}_\mathbb{C}}$ のイデアルとする ($\mathfrak{h}_\mathbb{C}$ 上の $\mathfrak{h}_\mathbb{C}$-不変多項式環を $\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^{\mathfrak{h}_\mathbb{C}}$ で表す). このとき,

(条件 C): $Q \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^{\mathfrak{h}_\mathbb{C}}$ であって, $Q|_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}\cap\mathfrak{h}_\mathbb{C}} = 0$ かつ $Q \notin J_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C})}$ なるものが存在する

と定めると, (条件 C) $\Rightarrow$ (条件 A) が従う.

補題 4.2 の証明の概略. ここでは G/H に対応するコンパクトな等質空間 G_U/H_U が存在することを仮定する (例えば, $G/H = SL(p+q,\mathbb{R})/SO(p,q)$ なら, $G_U/H_U = SU(p+q)/SO(p+q)$). 前の議論と同様に $\mathcal{A}(G_U/H_U)^{G_U} \simeq (\Lambda(\mathfrak{g}_\mathbb{C}/\mathfrak{h}_\mathbb{C})^*)^{\mathfrak{h}_\mathbb{C}}$ が成り立つ. 今回はさらに, G_U が連結かつコンパクトであるから, $\mathcal{A}(G_U/H_U)^{G_U} \hookrightarrow \mathcal{A}(G_U/H_U)$ はコホモロジーの間の同型

$$H^\bullet(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C};\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(G_U/H_U;\mathbb{C})$$

を誘導することが分かり, (条件 A) は

(条件 A″): 自然な射影が誘導する準同型 $\pi^* : H^\bullet(G_U/H_U;\mathbb{C}) \to H^\bullet(G_U/(K\cap H_U);\mathbb{C})$ が単射でない.

と書き換えられる. さて, $\pi : G \to G/H$ には主 H-束の構造が定まるから, 特性類の Chern–Weil 準同型

$$w : \mathrm{Pol}(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^{\mathfrak{h}_\mathbb{C}} \to H^\bullet(G_U/H_U;\mathbb{C})$$

が定まる. 同様にして

$$w : \mathrm{Pol}(\mathfrak{k}_\mathbb{C}\cap\mathfrak{h}_\mathbb{C})^{\mathfrak{k}_\mathbb{C}\cap\mathfrak{h}_\mathbb{C}} \to H^\bullet(G_U/(K\cap H_U);\mathbb{C})$$

が定義される. さて, 可換図式

$$\begin{CD}
\mathrm{Pol}(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^{\mathfrak{h}_\mathbb{C}} @>{\text{rest.}}>> \mathrm{Pol}(\mathfrak{k}_\mathbb{C}\cap\mathfrak{h}_\mathbb{C})^{\mathfrak{k}_\mathbb{C}\cap\mathfrak{h}_\mathbb{C}} \\
@V{w}VV @VV{w}V \\
H^\bullet(G_U/H_U;\mathbb{C}) @>{\pi^*}>> H^\bullet(G_U/(K\cap H_U);\mathbb{C})
\end{CD}$$

を考えよう. もし, $Q \in \mathrm{Pol}(\mathfrak{h}_\mathbb{C})^{\mathfrak{h}_\mathbb{C}}$ であって $Q|_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}\cap\mathfrak{h}_\mathbb{C}} = 0$ かつ $w(Q) \neq 0 \in H^\bullet(G_U/H_U;\mathbb{C})$ なるものが存在するならば, (条件 A″) が成り立つことになる. H. Cartan の定理 [3] より, $w(Q) \neq 0 \Leftrightarrow Q \notin J_{(\mathfrak{g}_\mathbb{C},\mathfrak{h}_\mathbb{C})}$ であるから, 求める結果を得る. □

この補題より, (条件 B) $\Rightarrow$ (条件 A) を示すには, 表 2 の $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ それぞれに対して (条件 C) が成り立つことを確かめればよい (具体的に与えられた等質空間 G/H に対して (条件 C) が成り立つかどうか判定することは, (条件 B) よりずっと容易である).

注意 4.3.
- 定理 4.1 の証明中の議論から, 既約対称空間に対しては (条件 A) と (条件 C) が同値であることが分かる. 今のところ, 既約対称空間の分類を用いずにこの結果を証明することは出来ていない.
- 対称空間とは限らない一般の簡約型等質空間に対して, (条件 A) と (条件 C) が同値であるかどうかは, 今のところ分かっていない.

5 コンパクト Clifford–Klein 形を持たない等質空間の新しい例

表 2 の中には, 今までコンパクト Clifford–Klein 形を持つかどうか知られていなかったものが存在する:

$\mathfrak{g}$	$\mathfrak{h}$	条件
$\mathfrak{sl}(p+q,\mathbb{R})$	$\mathfrak{so}(p,q)$	p,q: 奇数
$\mathfrak{sl}(2n,\mathbb{R})$	$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})\oplus\mathfrak{so}(2)$	$n\geqslant 2$
$\mathfrak{so}(n,n)$	$\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})$	$n\geqslant 2$
$\mathfrak{so}(p+r,q+s)$	$\mathfrak{so}(p,q)\oplus\mathfrak{so}(r,s)$	p,q: 奇数, $r\geqslant 1$
$\mathfrak{e}_{6(6)}$	$\mathfrak{sl}(3,\mathbb{H})\oplus\mathfrak{su}(2)$	—

表 3: コンパクト Clifford–Klein 形を持ち得ないことが新たに分かった対称空間 G/H

定理 2.1 は対称空間でないような簡約型等質空間に対しても用いることができる. 例えば, 次が分かる:

系 5.1. (M-. [11]) G/H が

- $SL(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{R})/(SL(n_1,\mathbb{R})\times\cdots\times SL(n_k,\mathbb{R}))\quad(n_1,n_2\geqslant 3)$,
- $SL(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{C})/(SL(n_1,\mathbb{C})\times\cdots\times SL(n_k,\mathbb{C}))\quad(n_1,n_2\geqslant 2)$,
- $SL(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{H})/(SL(n_1,\mathbb{H})\times\cdots\times SL(n_k,\mathbb{H}))\quad(n_1,n_2\geqslant 2)$,
- $O(p_1+\cdots+p_k,q_1+\cdots+p_k)/(O(p_1,q_1)\times\cdots\times O(p_k,q_k))\quad(p_1,q_1$: 奇数, $p_2\geqslant 1)$,
- $O(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{C})/(O(n_1,\mathbb{C})\times\cdots\times O(n_k,\mathbb{C}))\quad(n_1,n_2\geqslant 2$ または n_1: 偶数, $n_2=1)$,
- $Sp(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{C})/(Sp(n_1,\mathbb{C})\times\cdots\times Sp(n_k,\mathbb{C}))\quad(n_1,n_2\geqslant 1)$

のいずれかであるとき, G/H はコンパクト Clifford–Klein 形を持たない.

なお, $O(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{C})/(O(n_1,\mathbb{C})\times\cdots\times O(n_k,\mathbb{C}))$ と $Sp(n_1+\cdots+n_k,\mathbb{C})/(Sp(n_1,\mathbb{C})\times\cdots\times Sp(n_k,\mathbb{C}))$ については, Kobayashi [6] の手法によってコンパクト Clifford–Klein 形の非存在が既に分かっていたことを注意しておく. その他, 他の手法を用いて得られる結果との比較については, [11] を参照されたい.

参考文献

[1] M. Berger, Les espaces symétriques noncompacts, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **74** (1957), 85–177.

[2] A. Borel, Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces, *Topology* **2** (1963), 111–122.

[3] H. Cartan, La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal, *Colloque de Topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950*, George Thone, Liège (1951), 57–71.

[4] D. Constantine, Compact Clifford–Klein forms — geometry, topology and dynamics, arXiv:1307.2183 (2013), to appear in *Proceedings of the conference Geometry, Topology and Dynamics in Negative Curvature (Bangalore 2010)*, London Mathematical Society Lecture Notes Series.

[5] T. Kobayashi, Proper action on a homogeneous space of reductive type, *Math. Ann.* **285** (1989), 249–263.

[6] T. Kobayashi, A necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms of homogeneous spaces of reductive type, *Duke Math. J.* **67** (1992), 653–664.

[7] 小林俊行, 非リーマン等質空間の不連続群について, 数学 **57** (2005) 267–281; English translation in: *Sugaku Expositions* **22** (2009), 1–19, translated by M. Reid.

[8] T. Kobayashi and K. Ono, Note on Hirzebruch's proportionality principle, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **37** (1990), 71–87.

[9] T. Kobayashi and T. Yoshino, Compact Clifford–Klein forms of symmetric spaces — revisited, *Pure Appl. Math. Q.* **1** (2005), 591–663.

[10] F. Labourie, Quelques résultats récents sur les espaces localement homogènes compacts, *Manifolds and geometry (Pisa, 1993), Sympos. Math., XXXVI* (1996), 267–283, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[11] Y. Morita, A topological necessary condition for the existence of compact Clifford–Klein forms, arXiv:1310.0796, to appear in *J. Differential Geom.*