数理解析研究所講究録
第 1939 巻 2015 年 71-78

離散的再生定理の高級な証明法と初等的証明法の違いを巡る議論

近畿大学経営学部　林　芳男
Yoshio Hayashi
Faculty of Business Administration, Kinki University

1.始めに

一つの定理の証明をするのに高級な方法と初等的な方法が有ったらどちらで説明すべきであろうか?これはその人のスタイルの問題であり趣味の問題であるから強制されるべきことではない。しかも、何が高級で何が初等的であるかの定義すらないのであるから人それぞれの選択の問題である、というのが私の感想である。「非初等的な方法=高級な方法(?)」ということで、貴方が見栄っ張りでえーかっこしいでこんな難しいことが分かるんだということを他人に誇示したい人だったならば、ことさら高級な方法で説明したかも知れない。しかし、一般的に「初等的な方法=簡単な方法は理解し易い方法」であり「高級な(sophisticated)方法=難しくて理解しにくい方法」であるから、私なんかは、当然、前者を好むが、初等的ではあってもだらだらと長く本質が分かり難いということであれば、高級だが簡潔で短くその本質が伝わる高級な方法を選ぶべきである。つまり、その場合、その高級な方法のその高級さはその長い初等的な方法の本質が適切に概念化され構造化された結果であったのに違いない。そういう高級さはその理論が高度だったということなのだと思う。

さて、本稿で論じるのはErdös, Feller, and Pollard (1949)の中に出てくる定理の証明のことでその「非初等的な(not elementary)」のと「初等的な(elementary)」なものである。その「非初等的な証明」が「高級」であるとはその著者達は書いていないので、本稿の題には私の偏見が入ってしまっている。私は、その二つの証明法の本質的な違いは何であるか、ということに関心があった。またその「非初等的な方法」がその述べられている定理より幾分多くの情報(somewhat more information)を与えていると言われながらもその説明がその論文の中に無かったことがずっと気になっていた。本稿ではそのことについて述べたい。その論文のケチを付けることは目的ではないが誰もその論文の適切な批評をしてこなかったようなので、結果本稿は昔の論文の或る種レフリーレポートのようなものになってしまった。証明する定理は応用確率論分野の**離散的再生定理**である(「離散的」という言葉を付けた理由はその論文の中に「その前年(1948年)にBlackwellがその連続版への拡張をした」と述べられてたからである)。因みにそのBlackwellの定理と鍵再生定理は同等であることが示されている(Liu(2010))(Feller(vol. I (1957;第XIII章(定理3),vol. II,1971;第XI章(再生理論)))とRoss(1970 ; 定理3.8(Elementary Renewal Theorem, 40頁)、定理3.9 (Blackwell's Theorem, 41頁)、定理3.10 (Key Renewal Theorem, 42頁)、Karlin and Taylor (1975,第5章(定理4.2(Elementary Renewal Theorem, 188-189頁)、定理5.1 ; 5.2(Basic Renewal Theorem,191-192頁)、とその説明の経緯を眺めて見るとその理解が混沌としてたことが感じられる。特に、Feller vol. I (1957;第XIII章(定理3)の記述の直前には「その証明は初等的ではあるが、それは確率論の理解(probabilistic understanding)には貢献しないのでその章末の問題1に延ばす」とさえ書いている。Fellerのその思いはその本のvol. II (1971)の時点になっても変わらなかったようである。私達はその初等的証明に誤りが有ると主張する)。

$\{p_k\}$は$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$なる非負の数列で$m \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k p_k \leqq \infty$なるものであるとする。更に

(1.1)　$P(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$

は1より大きい任意の整数 t に対して x^t の冪級数ではないと仮定する①。そのとき② $1-P(x)$

は$|x|<1$で決して0にならない③ので、その逆数の関数$U(x)$は(その範囲全体で)定義される。その冪級数展開は

(1.2) $$U(x)\equiv\frac{1}{1-P(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}u_k x^k$$

であるとする。その係数列$\{u_k\}$は極限で

(1.3) $$\lim_{k\to\infty} u_k=1/m$$

を満足する(この極限はもし$m=\infty$であったら$1/m=0$であるとする)。

先ず、その論文で述べられている証明を論じる前に、その前提に就いて幾つかコメントしておきたい。下線部①の仮定は突拍子もないような気がしたが、これは後のその初等的証明の記述の中に出てくる「$p_k>0$なる添字kの最大公約数が1である、つまり、$GCD(k:p_k>0)=1$」という主張ができることの根本理由である。因みにその論文の題は「正の係数を持つ冪級数の或る性質」なのにいきなり出てくるその再生定理は非負の数を係数とする冪級数に関するものなのでちぐはぐな題の付け方であったと言える。②の「そのとき(Then)」はまるで①の仮定の結果が③であるかのような言い回しに聞こえたのでその表現は良くなかったと思う。冪級数で定義された(1.1)の関数$P(x)$は(実変数xに対し)旨く定義されている(well-defined)。当然、$P(0)=p_0$である。$0\leqq p_0\leqq 1$であるから$1-P(0)=1-p_0\geqq 0$である。$p_0=1$ならば原点$x=0$が$1-P(x)$の零点になってしまうので、③という主張をしたいならば、その場合は排除すべきだったと思う。つまり、$0\leqq p_0<1$と仮定すべきだったのである。そもそもその逆数関数$U(x)$がそのように冪級数展開できる理由は何なのか?そのことだって厳密に述べておくべきだったと思う。私はこれが正項級数であることが示せる。因みにmは確率分布$\{p_k\}$の期待値でその値が非負であることは明らかである。$m=0$となるのは$p_0=1$のときだけであることに注意したい。ところで「零点」という用語は複素関数論のものでそういう用語で展開するのならばそのxが複素変数であることを明記しておくべきだったと思う。慣習的にはそれは実変数であり習慣に従って複素変数はzやsを使って欲しかった。因みに、その高級な証明は、複素関数論によるものであり、微積分学の議論が初等的であるというのは、多分、その著者らの「高級感」なのであろう。実関数論でもルベーグ積分論が入って来ると高級と言われるし、それが線積分で複素関数論で使われた時の議論は未だに未検証なのではなかろうか?その著者らの「高級感」は、(大学初年級までに教育されたことの有る)初等幾何学、初等整数論や微積分学は初等的であり、(研究者レベルで今や常識な?)ルベーグ積分論と複素関数論そしてその二つが融合したものや多変数関数論は高級なんだと思う。だから後出のウィーナーの定理は完全に高級な理論に属することになってしまうのである。高級な理論がブラックボックス化されて使われている時は注意したい。また

(1.4) $$r_n\equiv\sum_{k=n+1}^{\infty}p_k\ \ (n=0,1,\cdots),\ R(x)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}r_k x^k$$

とおく。この数列$\{r_n\}$は$r_0=1-p_0$で単調非増加列で$r_n\to 0\ (n\to\infty)$を満足する。級数$R(x)$はその収束半径$R_1\equiv 1/\overline{\lim}\sqrt[n]{r_n}$の作る収束区間$(-R_1,R_1)$で旨く定義される(このことはその変数を複素変数に拡大しても成立する(つまり、$R(z)$は$|z|<R_1$で旨く定義される)(Titchmarsh(1939;§7.1,213頁)または小松勇作(解析概論II(1956;77頁、定理14.1))。そのような級数で定義される関数に対して$R(-1)$は交代級数であるから収束する。$0\leqq r_n\leqq 1$であるから、$R_1\geqq 1$は確かである。しかし、$x=1$で$R(x)$が収束する保証は無い(、即ち、$R_1=1$で$R(1)$は発散するかも知れない)。

さて、$1-P(1)=0$であるから$x=1$は方程式$1-P(x)=0$の実根である。$|x|\leqq 1$の

とき$|P(x)|\leqq \Sigma p_k \leqq 1$である。つまり、$|x|\leqq 1$では$P(x)\leqq|P(x)|$で、$1-P(x)\geqq 1-|P(x)|\geqq 0$が成り立つ(ここに、等号成立は$x=1$のときだけである)。ということで下線部③の主張が成り立つのである。$P(x)$は$|x|<1$で項別微分可能で

(1.5)　$P'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k p_k x^{k-1} (=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1) p_{k+1} x^k)$

が成り立つ(∵小松勇作著「解析概論 I (169頁；定理35.4)」)。

$P'(1)$は収束するとは限らないが、発散する場合も含めて、$m=P'(1)$である。他方で$R(1)$が発散する場合も含めて

(1.6)　$m=\sum_{k=0}^{\infty} r_k = R(1)$

である(この時点で関数$P(x)$は拡大実数系で捉えられている。その変数を複素変数に拡大した時もルベーグ積分が入ってきても馴染みが良いが、実関数論では$-\infty$と$+\infty$は区別しなければならない)。というのは$|x|<1$のとき$1-P(x)=1-p_0+(-p_1)x+(-p_2)x^2+\cdots$は絶対収束し

$$\frac{1-P(x)}{1-x}=(1-p_0+(-p_1)x+(-p_2)x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)=R(x)$$

が成り立つからである(因みに、これは部分和の級数と元の級数との関係を論じたTitchmarsh(1939;215頁)の第VII章の関係式(1)の応用である)。$x\to 1$のとき、この左辺は不定形であるからロピタルの定理(小松勇作著「解析概論 I (188頁；定理40.2)」により(1.6)の成立が確認できるし、また、

(1.7)　$1-P(x)=(1-x)R(x)$

もまた成り立つ。よって、$R(x)$の根は$1-P(x)$の根である。以上の議論はその変数xを複素変数$z\equiv x+iy$に拡大しても成立する。私達は$R(z)$が複素関数として$|z|<1$で零点を持たないことが示せる。実際、そうでないとすると$R(z)$の零点はすべて円周$|z|=1$上になければならない。というのは(1.6)から$R(1)=m\neq 0$であることが分かっている。よって、どの零点も$z_0=e^{i\theta_0}$, $0<\theta_0<2\pi$の形でなければならず、もし$R(z_0)=0$であったならば(1.7)は$P(e^{i\theta_0})=1$であることを意味する。$p_k\geqq 0$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$であるからこのことが生じるのは$p_k\neq 0$なるすべてのkに対して$\cos k\theta_0=1$であるときだけである。しかし、そのことは$P(z)$が1より大きな整数tに対してz^tの冪級数になるときだけであるから不可能である。よって、$|z|<1$で$R(z)$は特異点を持たず

(1.8)　$\frac{1}{R(z)}=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

という冪級数展開ができることが分かる(このことと複素変数zに拡大された関係式(1.7)とTitchmarsh(1939;215頁の第VII章の関係式(1))とから複素変数zに拡大された(1.2)の展開式が正当化される)。ここに、その係数a_k $(k=0, 1, 2, \cdots)$は複素数であるかも知れず(コーシーの積分公式により)任意の$0<r<1$に対して

(1.9)　$a_k\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{z^{-k-1}}{R(z)}dz$

と求まる。さて、$1/R(z)$は$|z|<1$で有界であることは注意しておかなければならない。したがって、$r\to 1$とすることに対してはルベーグの有界収束定理が応用できて各$k=0, 1, 2, \cdots$に対して

(1.10) $a_k=\dfrac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\dfrac{z^{-k-1}}{R(z)}dz=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{e^{-ik\theta}}{R(e^{i\theta})}d\theta$

を得る(この知見は複素関数論の成果であるからその著者等の観点からは高級である)。このように形成される$\{a_k\}$が実数列であることは明らかである。しかも、私達は

(1.11) $R(e^{i\theta})=\sum_{k=0}^{\infty}r_k e^{ik\theta}$

が絶対収束し、どのθに対しても零にならないことをすでに知っている。ところでウィナー(Wiener)の定理[2]によれば$1/R(e^{i\theta})$は絶対収束する次の形の展開

(1.12) $\dfrac{1}{R(e^{i\theta})}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k e^{ik\theta}$

が出来ることが分かっている。ここに、各$k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$に対して

(1.13) $b_k\equiv\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{e^{-ik\theta}}{R(e^{i\theta})}d\theta$

で(注意：$k\geqq 0$の所ではこのb_kとa_kは一致する)これらは

(1.14) $\sum_{k=-\infty}^{\infty}|b_k|<\infty$

を満足する。(脚注[2]:原著ではこのことをA. Zygmund, Trigonometrical Series, Warsaw, 1935, 140頁を引用して確認しているが私はWienerの本(The Fourier Integral and Its Applications, 1933, Cambridge University Press(§12, 補題6$_{16}$, 91頁)で直接確認した)。このことと(1.9)を比較することで

(1.15) $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|<\infty$

であることが分かる。(1.8)で$z=1$とおいて

(1.16) $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=1/m$

であると結論することができる。ところで

(1.17) $\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k=(1-z)(\sum_{k=0}^{\infty}u_k z^k)$

である。(したがって、)アーベルの定理から$u_k\to 1/m$ $(k\to\infty)$が出る。というのは、上式の右辺は

(1.18) $U_N(x)\equiv\sum_{k=0}^{N}u_k x^k$

とおいてそれを複素変数zに拡大した$U_N(z)$に対して

$$(1-z)U_N(z)=u_0+(u_1-u_0)z+(u_2-u_1)z^2+\cdots+(u_N-u_{N-1})z^N$$

が成り立つから、この式に$z=1$を代入して

(1.19) $\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lim_{N\to\infty}u_N$

であることが分かるからである。「この議論は$m=\infty$のときは、$R(x)$が有界でないから、うまくいかない」から、と言って、その著者達は彼等の初等的方法の優位性を述べて展開している。しかし、私はその初等的方法が誤りであると主張している。ところで、以上の議論の中でその複素関数論で得られた知見が不要であるということにはなっていない。それどころか$m=\infty$であっても$R(x)$の($|x|<1$の範囲での)有界性に反しない。その見解はその著者等の勘違いである。$R(x)$の有界性に反する場合は$m=0$の場合であるがこのことは$p_0<1$のときは生じな

い。

2. その初等的方法の誤りと是正

さて、Erdös, Feller, and Pollard (1949) の初等的展開は次のように進行する。

$\lambda \equiv \overline{\lim_{n\to\infty}}\ u_n$、$\{u_{n_\nu}\}$は$u_{n_\nu}\to\lambda$なる$\{u_n\}$の部分列、$j$を$p_j>0$なる添字とする。そのとき$u_{n_\nu - j}\to\lambda$である。

このことを証明するのに彼等が背理法を使っていることは分かるがその計算の進め方に少し違和感が有る。先ず、実際、$u_{n_\nu - j}\to\lambda' < \lambda$であるとして、十分大きな$\nu$に対して

(2.1) $\lambda-\varepsilon < u_{\nu_n} < \underline{(p_0+p_1+\cdots+p_{j-1}+p_{j+1}+\cdots+p_N)(\lambda+\varepsilon)+p_j\lambda'+\varepsilon}_{④}$
$\leqq (1-p_j)(\lambda+\varepsilon)+p_j\lambda'+\varepsilon < \lambda - p_j(\lambda-\lambda')+2\varepsilon$

となり、こうして得られる$p_j(\lambda-\lambda')<3\varepsilon$という関係から$\lambda'<\lambda$だったという仮定が矛盾するので$\lambda'=\lambda$でならなければならなかったという論理で進めている。しかし、その最初の行の最右辺のpの添字のNが何であるのかの説明がない。下線部④の不等式の意味が不明である。この式の展開は、多分、間違いである。

同じ条件の下、同じ議論を繰り返して任意の自然数sに対してその固定された$j>0$に対して

(2.2) $\lim_{\nu\to\infty} u_{n_\nu - sj}\to\lambda$

であることが分かる。「仮定により、そういう添字jの最大公約数は1である」という主張がこのタイミングで述べられている。この主張こそが①の結果である。したがって、$p_{a_1}, p_{a_2}, \cdots, p_{a_t}$がすべて正である有限個の添字$a_1, a_2, \cdots, a_t$でそれらの最大公約数が$1$であるものを見つけることができる(ここで確率$\{p_j\}$の添字に$a$使ったことは(1.8)の冪級数の係数との混用になるので良くなかったと思う)。そのとき

(2.3) $k=x_1a_1+x_2a_2+\cdots+x_ta_t$ (、但し、$x_1, x_2, \cdots, x_t$は非負で整数)

の形のすべての固定された整数(every fixed integer) kに対して(2.2)により

(2.4) $\lim_{\nu\to\infty} u_{n_\nu - k}=\lambda$

が成り立つ。しかし、(積) $a_1a_2\cdots a_t$より大きいすべての整数kは(2.3)の形に書くことができる。したがって、(2.4)は十分大きく固定されたkに対して成立する。さて、(2.2)で$n=N_\nu \equiv n_\nu - a_1a_2\cdots a_t$とおくとすべての固定された$M$に対して

(2.5) $1\geqq r_0u_{N_\nu}+r_1u_{N_\nu-1}+\cdots+r_Mu_{N_\nu-M}$

が成り立つ。$\nu\to\infty$のとき$u_{N_\nu-k}$ ($k=0,1,2,\cdots,M$)のすべての項は$\to\lambda$であるから

$$1\geqq\lambda(r_0+r_1+\cdots+r_M)$$

が成り立つ(この式は$\Sigma r_k=\infty$のときは$\lambda=0$であることを意味する)。つまり、$\lambda\leqq 1/m$である。

$m<\infty$のときは$\mu\equiv\underline{\lim}_{n\to\infty}\ u_n$とおいて同様な議論を展開して$\mu\geqq 1/m$であることが示せる(ここの議論は最大極限値が最小極限値に置き換えられたから不等号の向きを変えたと思われるがそこではそのようなことはできない)。これでこの定理の証明は完全である、と彼等は議論を締め括っているが、以上の議論は誤りである。以下その修正を行う。その初等的方法は

(2.6) $(1-p_0)u_0=1\ (\Rightarrow p_0\neq 1$、よって、$u_0=\dfrac{1}{1-p_0}>1)$;

そして

(2.7)　$u_n = p_0 u_n + p_1 u_{n-1} + \cdots + p_{n-1} u_1 + p_n u_0$　($n = 1, 2, \cdots$)

という関係式を利用する(その初期項の関係(2.6)の記述はその原著には無かった)。私は最初の数項を代入で求めてみたが

$$u_n = \frac{1}{1-p_0}\{(\frac{p_1}{1-p_0})^n + \frac{n p_1^{n-1} p_2}{(1-p_0)^{n-1}} + (n-1)\frac{p_1^{n-2} p_3 + \cdots}{(1-p_0)^{n-2}}$$

$$+ \cdots + \frac{p_n}{1-p_0}\}$$

という感じで奇麗な関係式には未だ至っていない。しかし、すべてのu_n ($n = 0, 1, 2, \cdots$)が正であることは分かる。よって、**プリンクスハイムの定理**(小松勇作著「解析概論 I (155頁；定理32.13)」)が応用できて

(2.8)　$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{x \to 1-0} \dfrac{1}{1-P(x)} = \infty$

であることが分かる。離散的再生定理でこんな挙動をする数列$\{u_n\}$の極限が求めることができたのであるから凄い！と私は思っている。もう少し細かく考察して見る。

(2.9)　$\alpha \equiv \dfrac{p_1}{1-p_0}$　とおくと　　$u_1 = \alpha u_0$

である。さて、$\alpha > 1$とすると$p_0 + p_1 > 1$となってしまい、このことは$\{p_n\}$が確率分布であることに矛盾する。よって、

(2.10)　$0 \leqq \alpha \leqq 1$

でなければならない。$\alpha = 1$とすると$p_0 + p_1 = 1$であるから、この場合は$p_2 = p_3 = \cdots = p_n = \cdots = 0$ ($n = 2, 3, \cdots$)となって、したがって、

$$u_n = \frac{p_1}{1-p_0} u_{n-1} + \frac{p_2}{1-p_0} u_{n-2} + \cdots + \frac{p_{n-1}}{1-p_0} u_1 + \frac{p_n}{1-p_0} u_0$$

$$= u_{n-1} = \cdots = u_1 = u_0 = \frac{1}{1-p_0} > 1$$

となりu_nはすべて同じで有界である。一般的に$\{u_n\}$が有界な正数列であることが示せる。実際、或る正数Mと添字kに対し$u_n < M$ ($n = 0, 1, \cdots, k$)であるとすると

$$u_{k+1} = \frac{p_1}{1-p_0} u_k + \frac{p_2}{1-p_0} u_{k-1} + \cdots + \frac{p_k}{1-p_0} u_1 + \frac{p_{k+1}}{1-p_0} u_0$$

$$< \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_k + p_{k+1}}{1-p_0} M \leqq M$$

であるからである。したがって、$\{u_n\}$は収束する部分列をもつ。

ところで、$R(x)U(x) = 1/(1-x)$であるから(各$n = 0, 1, 2, \cdots$に対して)

(2.11)　$r_0 u_n + r_1 u_{n-1} + \cdots + r_{n-1} u_1 + r_n u_0 = 1$

という関係式も成り立つ。これは先の関係式と一見異なるように見えるが、$n = 0$に対しては$r_0 u_0 = 1$で$u_0 = 1/r_0 = 1/(1-p_0)$；$n = 1$に対しては$r_0 u_1 + r_1 u_0 = 1 \Rightarrow u_1 = (1 - r_1 u_0)/r_0 = (1 - r_1/(1-p_0))/(1-p_0)$；このようにこれらの式は先の関係式の項の順序を変えたものであるから本質的に(2.6), (2.7)と同じであることが直ぐ分かるし、実際、彼

等はその証明の中でこちらの関係は使っていない。

さて、解析学の基本定理に「収束する数列の部分列はすべて同じ極限値に収束する」というのがあるがここではその逆の「収束する部分列がすべて同じ極限値に収束するならばその数列はその同じ極限値に収束する」というのが有っても良さそうである。この特別な数列に関してはそのことが示せる。

(2.12) $m_n \equiv \sum_{k=0}^{n} r_k$

とおく。そうするとこれは正数列で(発散する場合も含めて)

(2.13) $\lim_{n\to\infty} m_n = m$

が成り立つ。さて、(2.7)の両辺を正数m_nで割って

(2.14) $\dfrac{r_0}{m_n} u_n + \dfrac{r_1}{m_n} u_{n-1} + \cdots + \dfrac{r_{n-1}}{m_n} u_1 + \dfrac{r_n}{m_n} u_0 = \dfrac{1}{m_n}$

を得る。この左辺の$\{u_n\}$の係数の総和が1であることに注目すれば、解析概論 I (小松勇作；*70*頁、定理15.2)により

(2.15) $\lambda \equiv \lim_{n\to\infty} u_n$

が存在するのであるからmが発散する場合も含めて$\lambda = 1/m$であることが分かる。

総括：実関数の範囲で成立する関係式(1.7)を利用して得られる漸化式(2.6),(2.7)で決まる数列u_nの極限がmが発散する場合にも得られた訳であるが、これはその初等的方法が高級な理論(=複素関数論)を凌駕しているという訳ではないことに注意したい。その理論展開の中に現れる関数$P(x)$, $R(x)$, $U(x)$が複素変数に拡大しても成立することから得られる複素関数論からの知見に基づくものであることは留意しておきたい。ところで$m=\infty$であるとき$z=1$は$R(z)$の特異点である。これはTitchmarsh(1939;第Ⅶ章) §7.22(215頁)の中の「a_nがすべてのnに対して実数でΣa_nが適正に発散する(properly divergent)、つまり、$s_n \equiv a_0 + a_1 + \cdots + a_n \to \infty$ (または$-\infty$)ならば、$z=1$はa_nを係数とする冪級数の特異点である」という主張と符合する。ところで与えられた確率分布が負の整数値を取る場合にこの離散再生定理を拡張するならば$m=0$となる可能性が有る訳でその場合こそが$R(x)$が有界でない場合なのである。

最後に①の仮定が成立しない(、つまり、その確率母関数が1より大きい整数tに対するx^tの冪級数である)ときを考える。これはkがtの倍数でないとき$p_k=0$である場合であり、$GCD(k: p_k>0)=t>1$の場合である。ここで論じようとしているのは与えられた確率分布$\{p_k\}$に対して$t \equiv GCD(k: p_k>0)$とするときその再生定理は$t=1$の場合は証明されたのであるが$t>1$の場合はどうなるのかというものである。記号の使い方がややこしいのを少し我慢して頂くとして、$t=1$のときの確率分布の平均、確率母関数、残余確率母関数、再生関数をそれぞれm, $P(x)$, $R(x)$, $U(x)$とすると$t>1$の場合のはそれぞれmt, $P(x^t)$, $R(x^t)$, $U(x^t)$で与えられることに注意しよう。 複素変数にまで拡張して

(1.7)' $1 - P(z^t) = (1 - z^t) R(z^t)$

が成り立つ。平均がmtであることは平均の定義から明らかであるが$P(x^t)$をxについて微分して$x=1$とおくことで$tP'(x^t)|_{t=1} = tP'(1) = tm$と解析的にも得られる。$|z|<1$で$R(z^t)$は特異点を持たず

(1.8)' $\dfrac{1}{R(z^t)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{kt} z^{tk}$

という冪級数展開ができる。同じ議論を繰り返して

$$(1.2)' \quad U(x^t) = \frac{1}{1 - P(x^t)} = \sum_{k=0}^{\infty} u_{kt} x^{tk}$$

であることが分かる。その係数列$\{u_k\}$は極限で

$$(1.3)' \quad \lim_{k\to\infty} u_{kt} = 1/(m\,t)$$

を満足するということで任意の整数$t>1$の場合にもその再生定理は少し変形して成立すると言える。整理して書き下すと以下のようになる。

非負整数値上の確率分布$\{p_k\}$、但し、$p_0 < 1$に対して$t \equiv GCD(k : p_k > 0)$としその平均を$m$、確率母関数を$P(x)$、その逆数の関数を$U(x)$とする。その冪級数展開は

$$(1.2) \quad U(x) \equiv \frac{1}{1 - P(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$$

であるとする。その係数列$\{u_k\}$は極限で

$$(1.3)' \quad \lim_{k\to\infty} u_{kt} = 1/m$$

を満足する(この極限はもし$m=\infty$であったら$1/m=0$であるとする)。

参考文献

P. Erdös, W. Feller, and H. Pollard, A theorem on power series, Bull. Amer. Math. Soc. vol. 55 (1949) pp. 201-204.

Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. I 第2版 (1957), Vol. II (1971), New York, John Wiley & Sons, Inc.

Karlin and Taylor, A first course in stochastic processes, 2nd edition, New York; Academic Press, 1975.

小松勇作著「解析概論 I 」、1962；「解析概論 II 」、1966 廣川書店

Liu N.,"Limit Theorems For Renewal Processes,"in Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science, edited by James J. Cochran, 2010, pp. 1-7.

Ross S. M., Applied Probability Models with Optimization Applications, Holden-Day, San Francisck, 1970.

C. Titchmarsh, The Theory of Functions, Second Edition, 1939, Oxford University Press 第VII章 有限な収束半径を持つ冪級数(Powere Series with a Finite Radius of Convergence)