

# 正方形ダクト内流れにおける edge state

京都大学大学院 工学研究科 沖野真也 (Shinya Okino)

## 概要

An invariant object on the laminar-turbulent boundary in phase space called the “edge state” is investigated for the pressure-driven flow through a square straight duct. For a long duct with the streamwise period of  $8\pi b_*$  ( $b_*$ : half the duct side), the edge trajectory settles down to a flow with streamwise localized disturbances. The localized edge state is found to be very close to the laminar state.

## 1 緒言

層流から乱流への遷移を力学系の観点から説明付けようとする研究が近年盛んである。円管流れ, 平面 Couette 流, 平面 Poiseuille 流, 矩形ダクト流れに対する線形安定性解析の結果 (Davey & Drazin, 1969; Romanov, 1973; Orszag, 1971; Tatsumi & Yoshimura, 1990) によると, 円管流れ, 平面 Couette 流, アスペクト比の小さな ( $\leq 3.2$ ) 矩形ダクト流れは任意の Reynolds 数に対して線形安定であり, 平面 Poiseuille 流やアスペクト比の大きな矩形ダクト流れの線形臨界 Reynolds 数は乱流への遷移が起こる Reynolds 数に比べ十分に大きい値をとる。こうした系においては, Reynolds 数の増加に伴い saddle-node 分岐を通じて数多くの不安定解が生じることが知られており (Nagata, 1990; Faisst & Eckhardt, 2003; Wedin & Kerswell, 2004; Waleffe, 2001; Wedin *et al.*, 2009), 位相空間においてこれらの不安定解の間を複雑に巡る状態こそが乱流であると考えられる。

また, 乱流の吸引領域境界上の解軌道と境界上に埋め込まれた不変集合はそれぞれ edge trajectory, edge state と呼ばれる。Edge trajectory は Itano & Toh (2001) によって平面 Poiseuille 流れに対して初めて計算され, 定常進行波解が edge state となっていることが示された。これに続いて, 円管流れや正方形ダクト流れに対する edge state が調べられ (Schneider *et al.*, 2007; Biau & Bottaro, 2009), 一對の渦がカオス的に振る舞う様子が観察された。最近, Avila *et al.* (2013) は流れ方向の計算領域を十分に大きくとった円管流れの edge state として, 流れ方向に局在化した周期解を得た。また, Brand & Gibson (2014) は平面 Couette 流に対して, 流れ方向, スパン方向の両方に局在化した定常解を得ている。乱流遷移域では “乱流パフ” や “乱流斑点” と呼ばれる乱れの局在化がしばしば観測されるため (Wygnanski & Champagne, 1973; Tillmark & Alfredsson, 1992), これらの局在解は乱流遷移を力学系の立場から記述するにあたり, 重要な役割を担うことが期待される。本稿では正方形ダクト流れにおける edge state の流れ方向計算領域に対する依存性について述べる。

## 2 解析対象

高さ  $2b_*$ , 幅  $2c_*$  の矩形断面をもつ直管内の非圧縮粘性流体の運動を考える。ダクト断面の中心を原点にとり, 流れ方向  $x_*$ , 高さ方向  $y_*$ , スパン方向  $z_*$  とする直交座標系を定める。流体の動粘性係数  $\nu_*$  と密度  $\rho_*$  を一定とし, 一定の圧力勾配  $-dP_*/dx_* \equiv \rho_*\chi_* = \text{const.}$  によって流れを駆動する。流速  $\mathbf{u}_* = (u_*, v_*, w_*)$  と圧力  $P_*$  は連続の式と Navier-Stokes 方程式に支配される。特に, 層流解  $U_{\text{lam}*}(y_*, z_*)$  は次の Poisson 方程式に従う;

$$\chi_* + \nu_* \left( \frac{\partial^2}{\partial y_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_*^2} \right) U_{\text{lam}*}(y_*, z_*) = 0. \quad (1)$$

長さスケール  $b_*$ , 速さスケール  $U_{c*} \equiv U_{\text{lam}*}(0, 0)$ , 時間スケール  $b_*/U_{c*}$ , 圧力スケール  $\rho_* U_{c*}^2$  を用いて, 支配方程式を無次元化することで以下を得る.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (3)$$

境界条件は

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{at} \quad y = \pm 1 \quad \text{or} \quad z = \pm A \quad (4)$$

である. 系を支配する無次元パラメータは Reynolds 数  $Re = U_{c*} b_*/\nu_*$  とアスペクト比  $A = c_*/b_*$  であり, 本稿を通じて  $Re = 4000$ ,  $A = 1$  と固定する. このときの摩擦 Reynolds 数は 82 となる. 以後, \* を除いた変数は全て無次元量を表すものとする. また, 流れ方向には周期  $L_x (= 2\pi/\alpha)$  の周期境界条件を与える. ここで,  $\alpha$  は流れ方向波数である. さらに,  $x$  軸周りの  $180^\circ$  回転対称性を課し, 自由度を低減する.

各変数を  $x$  方向に Fourier 級数,  $y, z$  方向に境界条件を満たすように組み合わせた Chebyshev 多項式を用いて展開したのち, Galerkin 法によって方程式の離散化を行う. なお, 非線形項については選点上での値を離散 Fourier 変換, 離散 cosine 変換することによって計算し, エイリアス誤差は 3/2 ルールによって除去した. 時間発展スキームとして, 粘性項には Crank-Nicolson 法, それ以外の項には Heun 法を適用し (Chandler & Kerswell, 2013), 時間ステップは  $\Delta t = 0.01$  と固定した. 本研究で用いた流れ方向計算領域とその解像度, 自由度について表 1 にまとめる. 流れ方向の計算領域として,  $L_x = 2\pi, 4\pi, 8\pi$  の三種類を選んだ. ここで,  $L, M, N$  と  $N_x, N_y, N_z$  はそれぞれ流れ方向, 高さ方向, スパン方向モードの最大次数と選点数を表す.

表 1: Streamwise wavelength and the resolution.

$L_x$	$\alpha$	$L \times M \times N$	$N_x \times N_y \times N_z$	d.o.f
$2\pi$	1.00	$21 \times 41 \times 41$	$64 \times 64 \times 64$	33,442
$4\pi$	0.50	$42 \times 41 \times 41$	$128 \times 64 \times 64$	65,362
$8\pi$	0.25	$84 \times 41 \times 41$	$256 \times 64 \times 64$	129,202

### 3 結果

適当な初期値から計算を開始し, 流れの三次元成分からの寄与による単位体積あたりエネルギー  $E_{3D}$  の時間変化を描いたものが図 1 の細線である. ここで 計算領域体積を  $V$  とし, 平均流速からの変動成分  $\hat{u} = u - 1/V \int_V u dV$  などを用いて  $E_{3D} = 1/V \int_V (\hat{u}^2 + \hat{v}^2 + \hat{w}^2)/2 dV$  と定義している. いずれの結果においても  $E_{3D}$  は  $4 \times 10^{-4}$  あたりを中心として不規則に変動する.  $L_x = 4\pi$  では  $t \sim 3500$  からエネルギーの減衰が始まり, 層流化するものの, その他の場合では乱流状態が長時間にわたって維持されている. Edge trajectory を求めるにあたり, まず比較的  $E_{3D}$  の小さい状態を  $\mathbf{u}_1$  として選ぶ. ある初期値を  $\mathbf{u}_\beta = \mathbf{u}_{\text{lam}} + \beta(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{\text{lam}})$  (ただし,  $0 \leq \beta \leq 1$ ) によって決定し, これを時間発展させる.  $E_{3D} > 5 \times 10^{-4}$  となった時点で乱流,  $E_{3D} < 1 \times 10^{-6}$  となった時点で層流と判断し, 計算を停止する.  $\beta$  に対する二分法を適用し, 以上の手続きを繰り返すことで, 長時間にわたって乱流化も層流化もしないような edge trajectory が得られる. 図 1 には, 途中で乱流化あるいは層流化するものを灰色線で, 得られた edge trajectory を太線で示している.

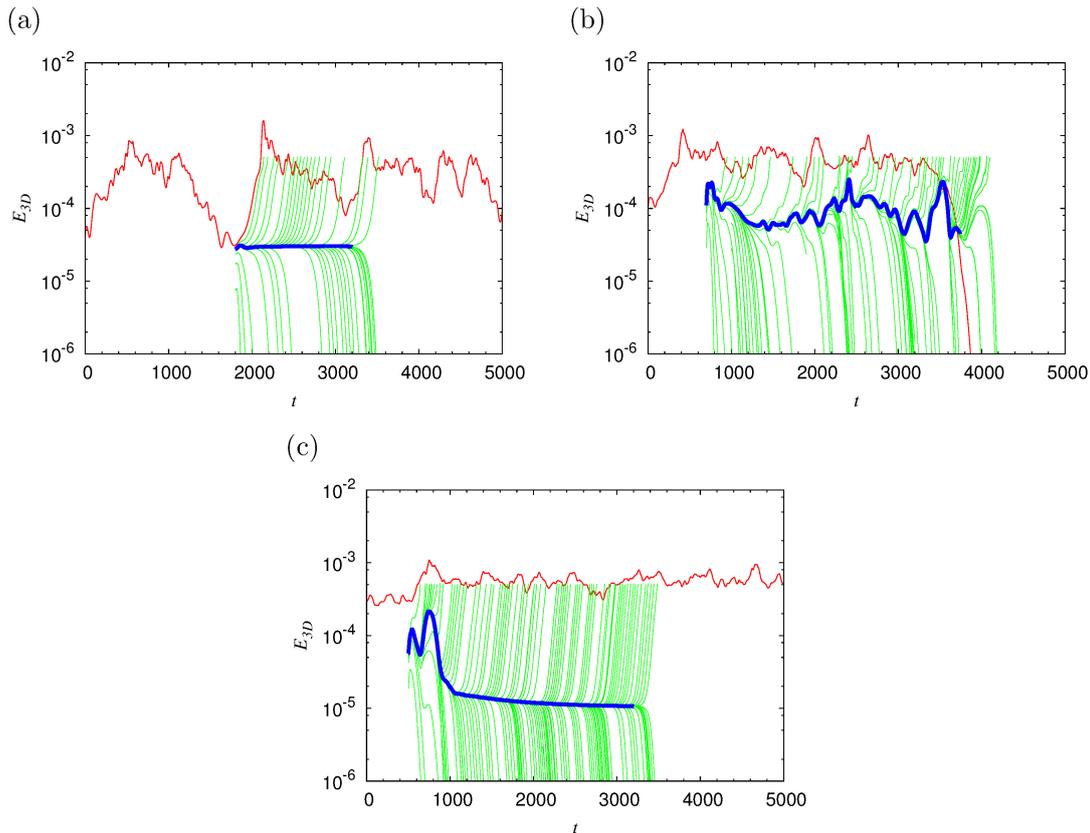


図 1: (Thin) Time evolution of the three-dimensional energy  $E_{3D}$  for (a)  $L_x = 2\pi$ , (b)  $L_x = 4\pi$ , (c)  $L_x = 8\pi$ . (Grey) Trajectories that grow to turbulence or laminarize. (Bold) Edge trajectory.

図 1(a) に示すように,  $L_x = 2\pi$  において edge trajectory の  $E_{3D}$  はすぐさま一定値に収束した. これを初期推定として, Newton-GMRES 法による反復計算 (Viswanath, 2007) を行ったところ edge state として定常進行波解が得られた. この解の bulk Reynolds 数は  $Re_b = U_{b*} b_* / \nu_* = 1744$  ( $U_{b*}$ : 平均流速) であり, 平均流速は  $Re_b / Re = 0.436$  であった. また, 位相速度は  $c = 0.715$  であり, これは平均流速よりも速い. 図 2(a) は得られた edge state の三次元構造を示す. 黒が流れ方向渦度  $|\omega_x| = 0.8 \times \max |\omega_x|$ , 灰色が  $u - U_{lam} = -0.2$  の等値面であり, それぞれ縦渦と低速ストリークに対応する. この解は計算上与えていた  $x$  軸周りの  $180^\circ$  回転対称性に加え, 次の並進反転対称性を有する;  $(u, v, w)(x, y, z) = (u, -v, w)(x + L_x/2, -y, z) = (u, v, -w)(x + L_x/2, y, -z)$ . 得られた定常進行波解は 4 つ渦の平均流をもち, これは遷移域と類似の流れ場である (Uhlmann *et al.*, 2007). またこの解は Okino *et al.* (2012) によって既に得られている定常進行波解と同一のものであると考えられる.

$L_x = 4\pi$  における edge trajectory は図 1(b) に見られるようにカオス的な振舞いを示した. 図 2(b, c) に示されるように, 流れ場は  $E_{3D}$  が比較的大きい時 ( $t = 3500$ ) には領域全体にわたって渦構造が見られるのに対し,  $E_{3D}$  が小さい時 ( $t = 3300$ ) には乱れた領域が局在する傾向にあった. ここで, 黒は流れ方向渦度  $|\omega_x| = 0.1$ , 灰色が  $u - U_{lam} = -0.25$  の等値面である.

$L_x = 8\pi$  における edge trajectory については, 図 1(c) に示すように,  $E_{3D}$  が非常に緩やかに減衰しながら, 一定値に漸近した. 図 2(d) に  $\omega_x = \pm 0.4 \times \max |\omega_x|$ , 緑が  $u - U_{lam} = -0.04$  の等値面を示す. 得られた edge state は  $L_x = 2\pi$  の場合とは対照的に, 乱れが限られた領域に局在していることが見て取れる. またこの状態は鏡像対称性,  $(u, v, w)(x, y, z) = (u, -v, w)(x, -y, z) = (u, v, -w)(x, y, -z)$ ,

を有する。図 2 (e) はダクトの中心軸に沿った流れ方向流速の分布である。この図からも乱れの局在化は明らかである。中心流速は全域にわたって約 0.95 であり、層流との差はわずか 5% である。また、この流れの bulk Reynolds 数は  $Re_b = 1850$  であり、これは層流の値  $Re_{blam} = 1908$  に近い値である。

円管流れに関する Avila *et al.* (2013) の結果によると、edge state は  $L_{x^*}/D_* < 5$  ( $D$ : 円管直径) において定常進行波、 $5 < L_{x^*}/D_* < 10$  においてカオス、 $L_{x^*}/D_* > 10$  において空間局在解となり、この傾向は本研究で得られた結果と一致する。しかしながら本研究では、 $L_x = 8\pi$  における edge state は反復法により収束した定常進行波解あるいは周期解として得られていないので、これについては今後の課題としたい。

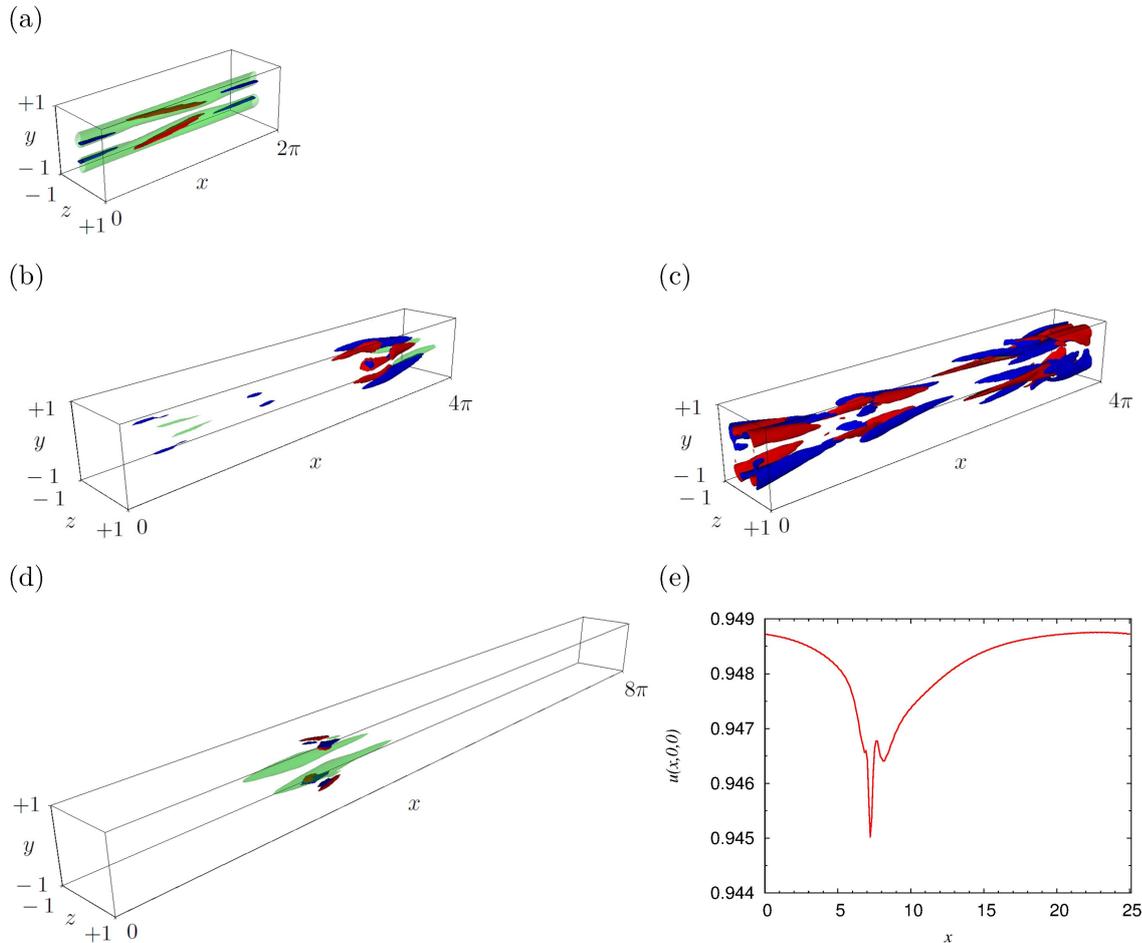


図 2: Three-dimensional structure of the edge state for (a)  $L_x = 2\pi$ , (b)  $L_x = 4\pi, t = 3300$ , (c)  $L_x = 4\pi, t = 3500$  and (d)  $L_x = 8\pi$ . Black and grey show the isosurfaces of the streamwise vorticity and the streamwise velocity disturbance, respectively. (e) Streamwise velocity distribution along the centreline of the duct for the edge state of  $L_x = 8\pi$ .

## 4 結論

正方形ダクト流れに対して、 $Re = 4000$  における edge state の流れ方向計算領域依存性を調べた。Edge state として、 $L_x = 2\pi$  の場合には定常進行波解、 $L_x = 4\pi$  の場合にはカオス的な振舞い

が見られた。  $L_x = 8\pi$  としたところ、流れ方向に乱れが局在した edge state が得られた。この流れは bulk Reynolds 数や中心流速分布が層流に非常に近い状態であった。

本研究は JSPS 科研費 25889034 の助成を受けたものである。

## 参考文献

- AVILA, M., MELLIBOVSKY, F., ROLAND, N. & HOF, B. 2013 Streamwise-localized solutions at the onset of turbulence in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **110**, 224502.
- BIAU, D. & BOTTARO, A. 2009 An optimal path to transition in a duct. *Phi. Trans. Roy. Soc.* **367**, 529-544.
- BRAND, E. & GIBSON, J. F. 2014 A doubly localized equilibrium solution of plane Couette flow. *J. Fluid Mech.* **750**, R3.
- CHANDLER, G. J. & KERSWELL, R. R. 2013 Simple invariant solutions embedded in 2D Kolmogorov turbulence. *J. Fluid Mech.* **722**, 554-595.
- DAVEY, A. & DRAZIN, P. G. 1969 The stability of Poiseuille flow in a pipe. *J. Fluid Mech.* **36**(2), 209-218.
- FAISST, H. & ECKHARDT, B. 2003 Traveling waves in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 224502.
- ITANO, T. & TOH, S. 2001 The dynamics of bursting process in wall turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.* **70**, 703-706.
- NAGATA, M. 1990 Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow: bifurcation from infinity. *J. Fluid Mech.* **217**, 519-527.
- OKINO, S., NAGATA, M., WEDIN, H. & BOTTARO, A. 2012 Travelling wave solutions in square duct flow. *Progress in Turbulence and Wind Energy IV, Proceedings of the iTi Conference in Turbulence 2010*, 135-138.
- ORSZAG, S. A. 1971 Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation *J. Fluid Mech.* **50**(4), 689-703.
- ROMANOV, V. A. 1973 Stability of plane-parallel Couette flow. *Functional Anal. Appl.* **7**, 137-146.
- SCHNEIDER, T. M., ECKHARDT, B. & YORKE, J. A. 2007 Turbulence transition and the edge of chaos in pipe flow. *Phys. Rev. Lett.* **99**, 034502.
- TATSUMI, T. & YOSHIMURA, T. 1990 Stability of the laminar flow in a rectangular duct. *J. Fluid Mech.* **212**, 437-449.
- TILLMARK, N. & ALFREDSSON, P. H. 1992 Experiments on transition in plane Couette flow. *J. Fluid Mech.* **235**, 89-102.

- UHLMANN, M., PINELLI, A., KAWAHARA, G. & SEKIMOTO, A. 2007 Marginally turbulent flow in a square duct. *J. Fluid Mech.* **588**, 153-162.
- VISWANATH, D. 2007 Recurrent motions within plane Couette turbulence. *J. Fluid Mech.* **580**, 339-358.
- WALEFFE, F. 2001 Exact coherent structures in channel flow. *J. Fluid Mech.* **435**, 93-102.
- WEDIN, H., BIAU, D., BOTTARO, A. & NAGATA, M. 2008 Coherent flow states in a square duct. *Phys. Fluids* **20**, 094105.
- WEDIN, H. & KERSWELL, R. R. 2004 Exact coherent structures in pipe flow: travelling wave solutions. *J. Fluid Mech.* **508**, 333-371.
- WYGNANSKI, I. J. & CHAMPAGNE, F. H. 1973 On transition in a pipe. Part 1. The origin of puffs and slugs and the flow in a turbulent slug. *J. Fluid Mech.* **59**(2), 281-335.