数理解析研究所講究録
第 1945 巻 2015 年 38-53

An extension of Wilson's Gram determinants*

琉球大学・教育学部　石川 雅雄 (Masao Ishikawa)†
Faculty of Education, University of the Ryukyus
和歌山大学・教育学部　田川 裕之 (Hiroyuki Tagawa)‡
Faculty of Education, Wakayama University

1 序

2000 年に, Mehta-Wang は Gaussian symplectic ensemble に関連したある行列式の計算を行った (cf. [8]). この行列式は Meixner-Pollaczek polynomial であり, 拡張することにより, 特別な Askey-Wilson polynomial が得られることが最近の我々の研究で分かった (cf. [2],[4]). さらに FPSAC'13 の reviewer の指摘により, この行列式は 1991 年の Wilson [9] の Gram determinant と深い関係があることも分かった. この Wilson の Gram determinant は Askey-Wilson polynomial を含む biorthogonal polynomial を与えている.

本稿では, Wilson の Gram determinant から任意の行（または任意の列）を選んだ場合に得られる等式, 及び証明に関連して得られた q-超幾何級数の quadratic formula の紹介を目的とする. 尚, この等式は Mehta-Wang の行列式や Krattenthaler の Catalan determinant 等のこれまでに発見された等式の拡張となっている (cf. [1],[6]). .

まず, Wilson の結果の紹介から始めよう. 尚, Wilson [9] では $q=1$ の場合についての結果は厳密に記載されているが, q の場合についての厳密な記載がほとんどないので, 一部には我々が実際に計算して得られた結果も含まれる.

以下, 本稿では, $a,b,c,d,e,f,q,z \in \mathbb{C}$ とする. また, $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $(a;q)_n$ を q-shifted factorial, i.e.

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$$

とする. ただし, $(a;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i)$ とする. さらに, $a_1,a_2,\dots,a_r \in \mathbb{C}$ に対して

$$(a_1,a_2,\dots,a_r;q)_n = \prod_{i=1}^{r}(a;q)_n$$

とする. 尚, 文中での, $a/b_1b_2\dots b_r$ といった表記は $\frac{a}{b_1b_2\dots b_r}$ を表すものとする.

Definition 1.1 (Wilson's Gram determinant). $i,j,k,N \geq 0$ は, $abcdef=q$, $ab=q^{-N}$ を

*Joint work with Victor J. W. Guo (East China Normal Universit) and Jiang Zeng (Université Claude Bernard Lyon 1).
†Partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No.25400018.
‡Partially supported by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No.23540017.

満たすものとする.

$$\phi_j(z;c,e)=\frac{(c/z,cz;q)_j}{(qz/e,q/ez;q)_j},\quad \psi_i(z;d,f)=\frac{(d/z,dz;q)_i}{(qz/f,q/fz;q)_i}(=\phi_i(z;d,f)),$$
$$w_k(a,b,c,d,e,f)=\frac{(1-a^2q^{2k})(a^2,ab,ac,ad,ae,af;q)_k}{(1-a^2)(q,aq/b,aq/c,aq/d,aq/e,aq/f;q)_k}q^k,$$
$$\mu_{i,j}=\sum_{k=0}^{N}w_k(a,b,c,d,e,f)\phi_j(aq^k)\psi_i(aq^k)$$

とおき, $0\le n\le N$ に対して

$$R_n(z;a,b,c,d,e,f)=\det\begin{pmatrix}\mu_{0,0} & \mu_{0,1} & \cdots & \mu_{0,n}\\ \mu_{1,0} & \mu_{1,1} & \cdots & \mu_{1,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu_{n-1,0} & \mu_{n-1,1} & \cdots & \mu_{n-1,n}\\ \phi_0(z) & \phi_1(z) & \dots & \phi_n(z)\end{pmatrix},$$

$$S_n(z;a,b,c,d,e,f)=\det\begin{pmatrix}\mu_{0,0} & \mu_{1,0} & \cdots & \mu_{n,0}\\ \mu_{0,1} & \mu_{1,1} & \cdots & \mu_{n,1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu_{0,n-1} & \mu_{1,n-1} & \cdots & \mu_{n,n-1}\\ \psi_0(z) & \psi_1(z) & \dots & \psi_n(z)\end{pmatrix}$$

と定義する. ただし, $\phi_j(z)=\phi_j(z;c,e)$, $\psi_j(z)=\psi_j(z;d;f)$ とする.

まず, $\phi_j(z)$, $\psi_j(z)$, $R_n(z;a,b,c,d,e,f)$, $S_n(z;a,b,c,d,e,f)$ の定義式と行列式の基本的性質から次が容易にわかる.

Lemma 1.2. (i) $n\ge 0$ に対して

$$R_n(z;a,b,c,d,e,f)=S_n(z;a,b,d,c,f,e).\tag{1}$$

(ii) $0\le m\le n$ に対して

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{N}w_k(a,b,c,d,e,f)R_n(aq^k;a,b,c,d,e,f)\psi_m(aq^k;d,f)\\ &=\sum_{k=0}^{N}w_k(a,b,c,d,e,f)S_n(aq^k;a,b,c,d,e,f)\phi_m(aq^k;c,e)\\ &=\delta_{m,n}\det(\mu_{i,j})_{0\le i,j\le n}.\end{aligned}\tag{2}$$

(iii) $m,n\ge 0$ に対して

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{N}w_k(a,b,c,d,e,f)R_m(aq^k;a,b,c,d,e,f)S_n(aq^k;a,b,c,d,e,f)\\ &=\delta_{m,n}\det(\mu_{i,j})_{0\le i,j\le n-1}\det(\mu_{i,j})_{0\le i,j\le n}.\end{aligned}\tag{3}$$

ただし,$\delta_{m,n}$ はクロネッカーのデルタ, i.e. $\delta_{m,n}=1$ if $m=n$, $\delta_{m,n}=0$ if $m\ne n$, とし, $\det(\mu_{i,j})_{0\le i,j\le -1}=1$ とする.

Remark 1.3. Lemma 1.2 での等式の成立には, 仮定 $abcdef = q$, $ab = q^{-N}$ はいずれも必要としない.

さらに, R_n, S_n を解析するための鍵となる q-超幾何級数 $r_n(z; a, b, c, d, e, f)$ を

$$r_n(z; a, b, c, d, e, f)$$
$$= \frac{(ab, ac, ad, 1/af; q)_n}{(aq/e; q)_n} {}_{10}\phi_9 \left[\begin{matrix} a/e, q\sqrt{a/e}, -q\sqrt{a/e}, az, a/z, q/be, q/ce, q/de, q^n/ef, q^{-n} \\ \sqrt{a/e}, -\sqrt{a/e}, q/ez, qz/e, ab, ac, ad, afq^{1-n}, aq^{n+1}/e \end{matrix}; q, q\right]$$

で定義する. ただし

$${}_{r+1}\phi_r \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_{r+1} \\ b_1, b_2, \ldots, b_r \end{matrix}; q, z\right] = \sum_{k\geq 0} \frac{(a_1, a_2, \ldots, a_{r+1}; q)_k z^k}{(q, b_1, b_2, \ldots, b_r; q)_k}$$

とする. このとき, 次が Wilson により示されている.

Theorem 1.4 (Wilson [9]). $abcdef = q$ とする.

(i) $r_n(z; a, b, c, d, e, f)$ は a, b, c, d に関して対称である. i.e. $a_1a_2a_3a_4ef = q$ のとき, $\sigma \in S_4$ (4 次対称群) に対して

$$r_n(z; a_1, a_2, a_3, a_4, e, f) = r_n(z; a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)}, a_{\sigma(4)}, e, f). \tag{4}$$

(ii) $ab = q^{-N}$ のとき, $0 \leq m, n \leq N$ に対して

$$\sum_{k=0}^{N} w_k(a, b, c, d, e, f) r_n(aq^k; a, b, c, d, e, f) r_m(aq^k; a, b, c, d, f, e)$$
$$= \delta_{m,n} M_n(a, b, c, d, e, f). \tag{5}$$

ただし

$$M_n(a, b, c, d, e, f) = \frac{(a^2q, q/cd, q/ce, q/de; q)_N (q, q^n/ef, ab, ac, ad, bc, bd, cd; q)_n}{q^n(aq/c, aq/d, aq/e, bf; q)_N (q/ef; q)_{2n}}$$

とする.

(5) において $f = q/abcde$ と置き換え, $e \to \infty$ とすることにより次が容易に得られる.

Corollary 1.5 (Wilson [9]). $ab = q^{-N}$, $0 \leq m, n \leq N$ のとき次が成立する.

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(1 - a^2q^{2k})(a^2, ab, ac, ad; q)_k q^k}{a^kb^kc^kd^k(1 - a^2)(q, aq/b, aq/c, aq/d; q)_k} P_n(aq^k; a, b, c, d; q) P_m(aq^k; a, b, c, d; q)$$
$$= \delta_{m,n} \frac{(a^2q, q/cd; q)_N (ab, ac, ad, bc, bd, cd, q, abcdq^{n-1}; q)_n}{(aq/c, aq/d; q)_N (abcd; q)_{2n}}. \tag{6}$$

ただし, $P_n(z; a, b, c, d; q)$ は Askey-Wilson polynomial, i.e.

$$P_n(z; a, b, c, d; q) = \frac{(ab, ac, ad; q)_n}{a^n} {}_4\phi_3 \left[\begin{matrix} q^{-n}, abcdq^{n-1}, az, az^{-1} \\ ab, ac, ad \end{matrix}; q, q\right]$$

とする.

次に, R_n, S_n と r_n の関係を調べるために, Wilson の計算した行列式について述べよう. まず, Jackson's formula, i.e. $a^2q^{n+1}=bcde$ のとき

$$ {}_8\phi_7\left[\begin{matrix} a, qa^{1/2}, -qa^{1/2}, b, c, d, e, q^{-n} \\ a^{1/2}, -a^{1/2}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{n+1} \end{matrix}; q, q\right] = \frac{(aq, aq/bc, aq/bd, aq/cd; q)_n}{(aq/b, aq/c, aq/d, aq/bcd; q)_n}, $$

を用いることにより, $ab=q^{-N}$, $abcdef=q$ のとき

$$ \begin{aligned} \mu_{i,j} =& \frac{(ad, cd, de, bd; q)_i (ac, bc; q)_j (a^2q, q/cd, q/ce, q/de; q)_N}{(q/af, abcd, abde, acde; q)_i (q/ae, q/be; q)_j (aq/c, aq/d, aq/e, q/acde; q)_N} \\ & \times \frac{(cdq^i; q)_j (q^{N-i+1}/de; q)_j}{(cdq^{i-N}; q)_j (q^{1-i}/de; q)_j} \end{aligned} \tag{7} $$

と書けることが分かる. $\mu_{i,j}$ を成分とする行列式に関連して, Wilson は次の結果を得ている.

Theorem 1.6 (Wilson [9]). $ad=bc$ とする. $n\ge 2$, $0\le k\le n-1$ に対して

$$ \Delta_{n,k} = \det\left(\frac{(aq^i; q)_j (bq^{-i}; q)_j}{(cq^i; q)_j (dq^{-i}; q)_j}\right)_{\substack{0\le i\le n-1 \\ 0\le j\le n, j\ne k}}, $$

$$ \pi_{n,k} = \frac{(1-adq^{2k-1})(adq^{-1}, cq^{n-1}, d, q^{-n}; q)_k (-q)^k}{(1-adq^{-1})(a, bq^{-n+1}, adq^n, q; q)_k} $$

とおく. このとき

$$ \Delta_{n,n} = \prod_{r=1}^{n-1} \frac{q^{-r(r+1)/2}(-b)^r (q, ca^{-1}; q)_r (ab^{-1}q^{n-r}, adq^{n-1-r}; q^2)_r}{(cq^{n-1-r}, dq^{-r}; q)_{2r}}, \tag{8} $$

$$ \Delta_{n,k} = \Delta_{n,n}\pi_{n,k}/\pi_{n,n} \tag{9} $$

である.

行列式の 0 行についての展開と, Theorem 1.6 を用いることにより, 次が容易に得られる.

Corollary 1.7. $n\ge 1$, $r\ge 0$, $ad=bc$ とする. $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ に対して

$$ \begin{aligned} &\det\left(\begin{cases} z_j & \text{if } i=0, \\ \frac{(aq^i;q)_j(bq^{-i};q)_j}{(cq^i;q)_j(dq^{-i};q)_j} & \text{if } 1\le i\le n \end{cases}\right)_{0\le i,j\le n} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{6}} (aq, bq^{-n}; q)_n \prod_{i=1}^{n} \frac{(a^{-1}c, q; q)_{i-1} (ab^{-1}q^{2i+1}, bcq^{2i}; q)_{n-i}}{(dq^{-i}; q)_{2i-1} (cq^i; q)_n} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-bcq^{2k-1})(q^{-n}, dq^{-1}, bcq^{-1}, cq^n; q)_k z_k q^k}{(1-bcq^{-1})(q, aq, bq^{-n}, bcq^n; q)_k}. \end{aligned} \tag{10} $$

特に, $E_r=(e_1, e_2, \ldots, e_r)$, $F_r=(f_1, f_2, \ldots, f_r)\in\mathbb{C}^r$ とおき, $z_j=\frac{z^j(E_r;q)_j}{q^j(F_r;q)_j}$ とすると

$$ \begin{aligned} &\det\left(\begin{cases} \frac{z^j(E_r;q)_j}{q^j(F_r;q)_j} & \text{if } i=0, \\ \frac{(aq^i;q)_j(bq^{-i};q)_j}{(cq^i;q)_j(dq^{-i};q)_j} & \text{if } 1\le i\le n \end{cases}\right)_{0\le i,j\le n} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{6}} (aq, bq^{-n}; q)_n \prod_{i=1}^{n} \frac{(a^{-1}c, q; q)_{i-1} (ab^{-1}q^{2i+1}, bcq^{2i}; q)_{n-i}}{(dq^{-i}; q)_{2i-1} (cq^i; q)_n} \\ &\quad \times {}_{r+6}\phi_{r+5}\left[\begin{matrix} q^{-n}, b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac12}, -b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac12}, dq^{-1}, bcq^{-1}, cq^n, E_r \\ b^{\frac12}c^{\frac12}q^{-\frac12}, -b^{\frac12}c^{\frac12}q^{-\frac12}, aq, bq^{-n}, bcq^n, F_r \end{matrix}; q, z\right]. \end{aligned} \tag{11} $$

ただし, $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \ldots, x_r)\in\mathbb{C}^r$ に対して, $(\mathbf{x};q)_j=\prod_{i=1}^{r}(x_i;q)_j$ とする.

(11) に Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem, i.e.

$$
\begin{aligned}
&\det(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\det(a_{i,j})_{2\le i,j\le n-1}\\
&=\det(a_{i,j})_{1\le i,j\le n-1}\det(a_{i,j})_{2\le i,j\le n}-\det(a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n-1\\ 2\le j\le n}}\det(a_{i,j})_{\substack{2\le i\le n\\ 1\le j\le n-1}},
\end{aligned}
$$

を適用して, Theorem 1.6 を用いれば, 次の等式が得られる. 尚, この等式 (12) は Krattenthaler [7] の (4.5) の系として得られる.

Corollary 1.8. $r,n\ge 0$, $E_r=(e_1,e_2,\dots,e_r)$, $F_r=(f_1,f_2,\dots,f_r)\in\mathbb{C}^r$ に対して

$$
\begin{aligned}
&{}_{r+6}\phi_{r+5}\left[\begin{matrix}q^{-n},b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac12},-b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac12},a^{-1}bcq^{-1},bcq^{-1},cq^{n},E_r\\ b^{\frac12}c^{\frac12}q^{-\frac12},-b^{\frac12}c^{\frac12}q^{-\frac12},aq,bq^{-n},bcq^{n},F_r\end{matrix};q,z\right]\\
&={}_{r+6}\phi_{r+5}\left[\begin{matrix}q^{-n+1},b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac12},-b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac12},a^{-1}bcq^{-1},bcq^{-1},cq^{n-1},E_r\\ b^{\frac12}c^{\frac12}q^{-\frac12},-b^{\frac12}c^{\frac12}q^{-\frac12},aq,bq^{-n+1},bcq^{n-1},F_r\end{matrix};q,z\right]\\
&\quad-\frac{zq^{-n}(1-b)(1-bc)(1-bcq)(1-cq^{2n-1})(1-a^{-1}bcq^{-1})(E_r;q)_1}{(1-aq)(1-bq^{-n})(1-bq^{-n+1})(1-bcq^{n-1})(1-bcq^{n})(F_r;q)_1}\\
&\quad\times{}_{r+6}\phi_{r+5}\left[\begin{matrix}q^{-n+1},b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac32},-b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac32},a^{-1}bc,bcq,cq^{n},E_rq\\ b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac12},-b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac12},aq^2,bq^{-n+2},bcq^{n+1},F_rq\end{matrix};q,z\right].
\end{aligned}
\tag{12}
$$

また, R_n, S_n を最終行で展開して, (4), (9) を用いれば, 次が得られる.

Corollary 1.9. $n\ge 0$ に対して, $abcdef=q$, $ab=q^{-N}$ のとき

$$R_n(z;a,b,c,d,e,f)=u_n(a,b,c,d,e,f)v_n(a,b,c,d,e,f)r_n(z;a,b,c,d,e,f), \tag{13}$$

$$S_n(z;a,b,c,d,e,f)=u_n(a,b,c,d,e,f)v_n(a,b,d,c,f,e)r_n(z;a,b,c,d,f,e). \tag{14}$$

ただし

$$
\begin{aligned}
u_n(a,b,c,d,e,f)&=\frac{q^{\frac{n(n-1)N}{2}}(q/cd,q/ce,q/de,a^2q;q)_N^n}{(aq/c,aq/d,aq/e,bf;q)_N^n}\prod_{i=1}^{n}\frac{(ab,ac,ad,bc,bd,cd,q;q)_{i-1}}{(abcf,abde;q)_{i-1}(abcd;q)_{i+n-1}},\\
v_n(a,b,c,d,e,f)&=\frac{c^nf^n(cq/e;q)_n}{(abcf;q)_n}\prod_{i=1}^{n}\frac{(cq^{2i+1}/e,dq^{2i-1}/f;q)_{n-i}}{(acde,bcde;q)_{i-1}(acdf,bcdf;q)_i}
\end{aligned}
$$

とする.

r_n の直交性 (5), R_n, S_n と r_n との関係式 (13), (14) から, R_n, S_n については, 次の双直交性 (biorthogonality) が得られる.

Proposition 1.10 (Wilson [9]). $0\le m,n\le N$ に対して, $abcdef=q$, $ab=q^{-N}$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N}w_k(a,b,c,d,e,f)R_m(aq^k;a,b,c,d,e,f)S_n(aq^k;a,b,c,d,e,f)\\
&=\delta_{m,n}u_n(a,b,c,d,e,f)^2v_n(a,b,c,d,e,f)\\
&\quad\times v_n(a,b,d,c,f,e)M_n(a,b,c,d,e,f),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{N}w_k(a,b,c,d,e,f)R_m(aq^k;a,b,c,d,e,f)R_n(aq^k;a,b,c,d,f,e)\\
&=\delta_{m,n}u_n(a,b,c,d,e,f)u_n(a,b,c,d,f,e)\\
&\quad\times v_n(a,b,c,d,e,f)v_n(a,b,c,d,f,e)M_n(a,b,c,d,e,f),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

$$\sum_{k=0}^{N} w_k(a,b,c,d,e,f)S_m(aq^k;a,b,c,d,e,f)S_n(aq^k;a,b,c,d,f,e)$$
$$= \delta_{m,n}u_n(a,b,c,d,e,f)u_n(a,b,c,d,f,e)$$
$$\times v_n(a,b,d,c,f,e)v_n(a,b,d,c,e,f)M_n(a,b,c,d,e,f). \tag{17}$$

Remark 1.11. (3) と (9) を用いて (15) を直接示すことも可能である. 尚, (3) では, $m,n \le N$ を仮定していないので, 結果的に, (5), (6), (15), (16), (17) において, 仮定 $m,n \le N$ は必要ない.

2 Main theorem

本節では, 行列式についての Wilson の結果を Krattenthaler 型の行列式, i.e. 任意行と任意列に拡張することを目的とする.

まず, Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem を用いることにより, 次の成立が比較的容易に帰納的に示せる.

Proposition 2.1. $n \ge 1$, $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ に対して, $ad = bc$ のとき, 次が成立する.

(i)

$$\det\left(\frac{(aq^{k_i};q)_j(bq^{-k_i};q)_j}{(cq^{k_i};q)_j(dq^{-k_i};q)_j}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n^2-1)}{6}-(n-1)\sum_{i=1}^n k_i} \prod_{1\le i<j\le n}(q^{k_i}-q^{k_j})(b-aq^{k_i+k_j})$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} \frac{(1-aq^{k_i})(1-bq^{-k_i})(a^{-1}c, bcq^i;q)_{i-1}}{(dq^{-k_i}, cq^{k_i};q)_n}. \tag{18}$$

(ii)

$$\det\left(\frac{(aq^i;q)_{k_j}(bq^{-i};q)_{k_j}}{(cq^i;q)_{k_j}(dq^{-i};q)_{k_j}}\right)_{1\le i,j\le n}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{3}} \prod_{1\le i<j\le n}(q^{k_i}-q^{k_j})(1-bcq^{k_i+k_j-1})$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} \frac{(aq^i, bq^{-n+i-1};q)_{k_i-i+1}(ab^{-1}q^{2i+1};q)_{n-i}(a^{-1}c;q)_{i-1}}{(dq^{-i};q)_{k_i+i-1}(cq^i;q)_{k_i+n-i}}. \tag{19}$$

Proof. (i) まず

$$M_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d) := \left(\frac{(aq^{k_i};q)_j(bq^{-k_i};q)_j}{(cq^{k_i};q)_j(dq^{-k_i};q)_j}\right)_{1\le i,j\le n}$$

とおくと, Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem から, $n \ge 2$ に対して

$$\det M_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d)\det M_{(k_2,k_3,\ldots,k_{n-1})}^{(n-2)}(aq,bq,cq,dq)$$
$$= \frac{(1-aq^{k_n})(1-bq^{-k_n})}{(1-cq^{k_n})(1-dq^{-k_n})}\det M_{(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1})}^{(n-1)}(a,b,c,d)\det M_{(k_2,k_3,\ldots,k_n)}^{(n-1)}(aq,bq,cq,dq)$$
$$- \frac{(1-aq^{k_1})(1-bq^{-k_1})}{(1-cq^{k_1})(1-dq^{-k_1})}\det M_{(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1})}^{(n-1)}(aq,bq,cq,dq)\det M_{(k_2,k_3,\ldots,k_n)}^{(n-1)}(a,b,c,d) \tag{20}$$

が成り立っている. ただし, $\det M_{\boldsymbol{k}}^{(0)}(a,b,c,d)=1$ とする. ここで, $n=1$ のときには, (18) の両辺共に

$$\frac{(aq^{k_1},bq^{-k_1};q)_1}{(cq^{k_1},dq^{-k_1};q)_1}$$

となることが容易に分かるので, (18) を帰納的に示すためには

$$N_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}q^{\frac{n(n^2-1)}{6}-(n-1)\sum_{i=1}^n k_i}\prod_{1\le i<j\le n}(q^{k_i}-q^{k_j})(b-aq^{k_i+k_j})$$
$$\times\prod_{i=1}^n\frac{(1-aq^{k_i})(1-bq^{-k_i})(a^{-1}c,bcq^i;q)_{i-1}}{(dq^{-k_i},cq^{k_i};q)_n}$$

とおき, $N_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d)$ が (20) と同じ関係式を満たすことを示せばよい. 実際, $ad=bc$ のときには

$$\begin{aligned}&(1-aq^{k_n+1})(1-bq^{-k_n+1})(1-cq^{k_1+n-1})(1-dq^{-k_1+n-1})\\&\quad-(1-aq^{k_1+1})(1-bq^{-k_1+1})(1-cq^{k_n+n-1})(1-dq^{-k_n+n-1})\\&=-q^{1-k_1-k_n}(q^{k_1}-q^{k_n})(b-aq^{k_1+k_n})(1-bcq^n)(1-a^{-1}cq^{n-2})\end{aligned}$$

となることと

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-2)(n-3)}{2}}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-2)(n-3)}{2}}=(-1)^{2n-3}=-1$$

に注意すれば, $N_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d)$ が (20) と同じ関係式を満たすことは容易に示せる. (ii) は (i) とほぼ同様の手段により証明できるので略とする. □

Remark 2.2. $i,n\in\mathbb{Z}$ に対して

$$(aq^i;q)_n=\frac{(a;q)_n(aq^n;q)_i}{(a;q)_i},\quad (bq^{-i};q)_n=\frac{q^{-in}(b;q)_n(b^{-1}q;q)_i}{(b^{-1}q^{-n+1};q)_i}$$

であることを利用すると

$$\det\left(\frac{(aq^i;q)_{k_j}(bq^{-i};q)_{k_j}}{(cq^i;q)_{k_j}(dq^{-i};q)_{k_j}}\right)_{1\le i,j\le n}=\det\left(\frac{(aq^{k_i};q)_j(d^{-1}q^{-k_i+1};q)_j}{(cq^{k_i};q)_j(b^{-1}q^{-k_i+1};q)_j}\right)_{1\le i,j\le n}\prod_{i=1}^n\frac{(a,b;q)_{k_i}(c,b^{-1}q;q)_i}{(c,d;q)_{k_i}(a,d^{-1}q;q)_i}$$

である.

Proposition 2.1 を利用すると, (10) の拡張となる Krattenthaler 型の行列式が得られる. まず, 任意列についての結果は次である.

Theorem 2.3. $n\ge 1$, $r\ge 0$, $ad=bc$ とする. $\boldsymbol{k}=(k_0,k_1,\ldots,k_n)\in\mathbb{Z}^{n+1}$, $\mathbf{z}=(z_0,z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ に対して

$$\tilde{X}_{i,j}^{(n)}(\boldsymbol{k},\mathbf{z})=\begin{cases}z_j & \text{if } i=0,\\ \frac{(aq^i;q)_{k_j}(bq^{-i};q)_{k_j}}{(cq^i;q)_{k_j}(dq^{-i};q)_{k_j}} & \text{if } 1\le i\le n,\end{cases}$$
$$\tilde{X}_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d,\mathbf{z};q):=\left(\tilde{X}_{i,j}^{(n)}(\boldsymbol{k},\mathbf{z})\right)_{0\le i,j\le n}$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
&\det \tilde{X}_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d,\mathbf{z};q)\\
&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{3}} \prod_{0\le i<j\le n} (q^{k_i}-q^{k_j})(1-bcq^{k_i+k_j-1})\\
&\times \prod_{i=1}^{n} \frac{(a^{-1}c,cq;q)_{i-1}(ab^{-1}q^{2i+1};q)_{n-i}}{(aq,bq^{-n},dq^{-i};q)_{i-1}} \prod_{i=0}^{n} \frac{(aq,bq^{-n};q)_{k_i}}{(dq^{-1};q)_{k_i}(cq;q)_{k_i+n-1}}\\
&\times \sum_{s=0}^{n} \frac{z_s(dq^{-1};q)_{k_s}(cq;q)_{k_s+n-1}}{(aq,bq^{-n};q)_{k_s}\prod_{\substack{0\le i\le n\\ i\ne s}}(q^{k_s}-q^{k_i})(1-bcq^{k_s+k_i-1})}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Proof. まず, 0 行で展開すると

$$
\det \tilde{X}_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d,\mathbf{z};q)=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s z_s \det\left(\frac{(aq^i;q)_{k_j}(bq^{-i};q)_{k_j}}{(cq^i;q)_{k_j}(dq^{-i};q)_{k_j}}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le n(j\ne s)}}.
\tag{22}
$$

ここで, (19) から

$$
\begin{aligned}
&\det\left(\frac{(aq^i;q)_{k_j}(bq^{-i};q)_{k_j}}{(cq^i;q)_{k_j}(dq^{-i};q)_{k_j}}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le n(j\ne s)}}\\
&=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{3}} \prod_{0\le i<j\le n} (q^{k_i}-q^{k_j})(1-bcq^{k_i+k_j-1})\\
&\times \prod_{i=1}^{n} \frac{(a^{-1}c,cq;q)_{i-1}(ab^{-1}q^{2i+1};q)_{n-i}}{(aq,bq^{-n},dq^{-i};q)_{i-1}} \prod_{i=0}^{n} \frac{(aq,bq^{-n};q)_{k_i}}{(dq^{-1};q)_{k_i}(cq;q)_{k_i+n-1}}\\
&\times \frac{(-1)^s(dq^{-1};q)_{k_s}(cq;q)_{k_s+n-1}}{(aq,bq^{-n};q)_{k_s}\prod_{\substack{0\le i\le n\\ i\ne s}}(q^{k_s}-q^{k_i})(1-bcq^{k_s+k_i-1})}
\end{aligned}
\tag{23}
$$

であるので, (22), (23) から (21) が得られる. □

(10) の任意行についての結果は次である.

Theorem 2.4. $n\ge 1$ とする. $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n$, $\mathbf{z}=(z_0,z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$ に対して

$$
X_{i,j}^{(n)}(\boldsymbol{k},\mathbf{z})=\begin{cases} z_j & \text{if } i=0,\\ \frac{(aq^{k_i};q)_j(bq^{-k_i};q)_j}{(cq^{k_i};q)_j(dq^{-k_i};q)_j} & \text{if } 1\le i\le n,\end{cases}
$$
$$
X_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d,\mathbf{z};q):=\left(X_{i,j}^{(n)}(\boldsymbol{k},\mathbf{z})\right)_{0\le i,j\le n}
$$

とおく. $ad=bc$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\det X_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d,\mathbf{z};q)\\
&=a^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \prod_{1\le i<j\le n} (q^{k_i}-q^{k_j})(1-a^{-1}bq^{-k_i-k_j})\\
&\times \prod_{i=1}^{n} \frac{(a^{-1}c;q)_{i-1}}{(cq^{k_i},dq^{-k_i};q)_n} \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu} z_\nu R_{n,\nu}(\boldsymbol{k},a,b,c,d;q).
\end{aligned}
\tag{24}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
&R_{n,\nu}(\boldsymbol{k},a,b,c,d;q)\\
&=\sum_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})} q^{\sum_{l=1}^{n-\nu} i_l-n+\nu}\prod_{l=1}^{n-\nu}(1-aq^{k_{i_l}-i_l+l+\nu})(1-bq^{-k_{i_l}-i_l+l+\nu})\prod_{l=1}^{\nu+1}\prod_{s=1}^{j_l-j_{l-1}-1}(bcq^{j_l-s+2(\nu-l+1)};q)_{j_l-s-1}\\
&\quad\times\prod_{l=1}^{\nu}(1-cq^{k_{j_l}+j_l-l+\nu-1})(1-dq^{-k_{j_l}+j_l-l+\nu-1})(bcq^{2(\nu-l)};q)_{j_l-1}
\end{aligned}
$$

とし, 和は $\boldsymbol{i}\cup\boldsymbol{j}=[n]$, $|\boldsymbol{i}|=n-\nu$, $|\boldsymbol{j}|=\nu$ を満たす全ての $\boldsymbol{i}=\{i_1,i_2,\ldots,i_{n-\nu}\}$ $(i_1<i_2<\cdots<i_{n-\nu})$, $\boldsymbol{j}=\{j_1,j_2,\ldots,j_\nu\}$ $(j_1<j_2<\cdots<j_\nu)$ を動くものとし, $j_{\nu+1}=n+1$, $j_0=0$ とおく.

以下, $n\geq 1$, $0\leq\nu\leq n$, $\boldsymbol{j}=\{j_1,j_2,\ldots,j_\nu\}$ $(1\leq j_1<j_2<\cdots<j_\nu\leq n)$ に対して

$$
g_{\boldsymbol{j}}^{(n,\nu)}(x;q)=\prod_{k=1}^{\nu}(xq^{2(\nu-k)};q)_{j_k-1}\prod_{k=1}^{\nu+1}\prod_{i=1}^{j_k-j_{k-1}-1}(xq^{j_k-i+2(\nu-k+1)};q)_{j_k-i-1}
$$

とおく. i.e.

$$
\begin{aligned}
R_{n,\nu}(\boldsymbol{k},a,b,c,d;q)=\sum_{(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j})} q^{\sum_{l=1}^{n-\nu} i_l-n+\nu} g_{\boldsymbol{j}}^{(n,\nu)}(bc;q)\prod_{l=1}^{n-\nu}(1-aq^{k_{i_l}-i_l+l+\nu})(1-bq^{-k_{i_l}-i_l+l+\nu})\\
\times\prod_{l=1}^{\nu}(1-cq^{k_{j_l}+j_l-l+\nu-1})(1-dq^{-k_{j_l}+j_l-l+\nu-1}).
\end{aligned}
$$

さらに, 議論を簡単にするために, $0\leq\nu\leq n$ でないときには, $R_{n,\nu}(\boldsymbol{k},a,b,c,d;q)=0$ とする.

証明の前に, 補題を 2 つ準備しよう. まず, $g_{\boldsymbol{j}}^{(n,\nu)}(x;q)$ についての関係式が, 定義に従った直接の計算で容易に示せる.

Lemma 2.5. (i) $n\geq 1$ に対して

$$
g_{\emptyset}^{(n,0)}(x;q)=\prod_{i=1}^{n}(xq^{n-i+1};q)_{n-i}, \tag{25}
$$

$$
g_{[n]}^{(n,n)}(x;q)=\prod_{k=1}^{n}(xq^{2(n-k)};q)_{k-1}. \tag{26}
$$

(ii) $\nu=0,1$ に対して

$$
g_{\boldsymbol{j}}^{(1,\nu)}(x;q)=1. \tag{27}
$$

(iii) $n\geq 2$, $0\leq\nu\leq n$, $\boldsymbol{j}=\{j_1,j_2,\ldots,j_\nu\}$ $(1\leq j_1<j_2<\cdots<j_\nu\leq n)$ に対して

$$
g_{\boldsymbol{j}}^{(n,\nu)}(x;q)=\begin{cases}(xq^n;q)_{n-1}g_{\boldsymbol{j}}^{(n-1,\nu)}(x;q) & \text{if } n\notin\boldsymbol{j},\\ (x;q)_{n-1}g_{\boldsymbol{j}'}^{(n-1,\nu-1)}(xq^2;q) & \text{if } n\in\boldsymbol{j}.\end{cases} \tag{28}
$$

ただし, $\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j}-\{n\}$ とする.

以下, $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ に対して, $\boldsymbol{k}'=(k_1,k_2,\ldots,k_{n-1})$ とおく. Lemma 2.5 を用いると, $R_{n,\nu}(\boldsymbol{k},a,b,c,d;q)$ についての次の関係式が容易に導ける.

Lemma 2.6. $n \geq 2$, $0 \leq \nu \leq n$ に対して

$$
\begin{aligned}
&R_{n,\nu}(\boldsymbol{k}, a, b, c, d; q) \\
&= q^{n-1}(1 - aq^{k_n})(1 - bq^{-k_n})(bcq^n; q)_{n-1} R_{n-1,\nu}(\boldsymbol{k}', a, b, c, d; q) \\
&\quad + (1 - cq^{k_n+n-1})(1 - dq^{-k_n+n-1})(bc; q)_{n-1} R_{n-1,\nu-1}(\boldsymbol{k}', aq, bq, cq, dq; q).
\end{aligned} \tag{29}
$$

Proof. (25) から

$$
R_{n,0}(\boldsymbol{k}, a, b, c, d; q) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} (bcq^{n-i+1}; q)_{n-i}(1 - aq^{k_i})(1 - bq^{-k_i})
$$

であるので, $\nu = 0$ のときには, $R_{n-1,-1}(\boldsymbol{k}', aq, bq, cq, dq; q) = 0$ と定義していたことに注意すると (29) の成立が示せる. $\nu \geq 1$ のときには, (28) に注意すれば, (29) の成立は容易に分かる. □

Proof of Theorem 2.4. 以下, $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ に対して

$$
\mathbf{z}' = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}), \ {}'\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)
$$

とする. まず, Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem を $\det X_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q)$ に適用し, (18) を利用して整理すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{(-1)^{n-1} q^{\sum_{i=1}^{n-1} k_i + (n-1)k_n} (cq^{k_n}, dq^{-k_n}; q)_{n-1} \det X_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q)}{(a^{-1}c, bcq^n; q)_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1}(q^{k_i} - q^{k_n})(b - aq^{k_i+k_n})} \\
&= \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}(1 - aq^{k_n})(1 - bq^{-k_n}) \det X_{\boldsymbol{k}'}^{(n-1)}(a, b, c, d, \mathbf{z}'; q)}{\prod_{i=1}^{n}(1 - cq^{k_i+n-1})(1 - dq^{-k_i+n-1})} \\
&\quad - \frac{(bc; q)_n \det X_{\boldsymbol{k}'}^{(n-1)}(aq, bq, cq, dq, {}'\mathbf{z}; q)}{(bcq^{n-1}; q)_n \prod_{i=1}^{n-1}(1 - cq^{k_i})(1 - dq^{-k_i})}
\end{aligned} \tag{30}
$$

である. 従って

$$
\begin{aligned}
&W_{i,j}^{(n)}(\boldsymbol{k}) = \begin{cases} z_j & \text{if } i = 0, \\ (aq^{k_i}; q)_j (bq^{-k_i}; q)_j (cq^{k_i+j}; q)_{n-j} (dq^{-k_i+j}; q)_{n-j} & \text{if } 1 \leq i \leq n, \end{cases} \\
&W_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) := \left(W_{i,j}^{(n)}(\boldsymbol{k})\right)_{0 \leq i,j \leq n}
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
\det X_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q) = \frac{\det W_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q)}{\prod_{i=1}^{n}(cq^{k_i}, dq^{-k_i}; q)_n} \tag{31}
$$

であることと (30) から

$$
\begin{aligned}
&\frac{\det W_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a, b, c, d, \mathbf{z}; q)}{a^{n-1}(a^{-1}c; q)_{n-1} \prod_{i=1}^{n-1}(q^{k_i} - q^{k_n})(1 - a^{-1}bq^{-k_i-k_n})} \\
&= q^{\frac{n(n-1)}{2}}(1 - aq^{k_n})(1 - bq^{-k_n})(bcq^n; q)_{n-1} \det W_{\boldsymbol{k}'}^{(n-1)}(a, b, c, d, \mathbf{z}'; q) \\
&\quad - (1 - cq^{k_n+n-1})(1 - dq^{-k_n+n-1})(bc; q)_{n-1} \det W_{\boldsymbol{k}'}^{(n-1)}(aq, bq, cq, dq, {}'\mathbf{z}; q)
\end{aligned} \tag{32}
$$

も成り立つ. さらに

$$
\begin{aligned}
&V_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d,\mathbf{z};q)\\
&=\frac{\det W_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d,\mathbf{z};q)}{a^{\frac{n(n-1)}{2}}q^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}\prod_{i=1}^{n}(a^{-1}c;q)_{i-1}\prod_{1\le i<j\le n}(q^{k_i}-q^{k_j})(1-a^{-1}bq^{-k_i-k_j})}
\end{aligned}
$$

とおくと, (32) から

$$
\begin{aligned}
&V_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d,\mathbf{z};q)\\
&=q^{n-1}(1-aq^{k_n})(1-bq^{-k_n})(bcq^n;q)_{n-1}V_{\boldsymbol{k}'}^{(n-1)}(a,b,c,d,\mathbf{z}';q)\\
&\quad-(1-cq^{k_n+n-1})(1-dq^{-k_n+n-1})(bc;q)_{n-1}V_{\boldsymbol{k}'}^{(n-1)}(aq,bq,cq,dq,{}'\mathbf{z};q) \qquad (33)
\end{aligned}
$$

である. 以上のことから, (24) を示すためには

$$
V_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d,\mathbf{z};q)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}z_{\nu}R_{n,\nu}(\boldsymbol{k},a,b,c,d;q) \qquad (34)
$$

となることを, (33) を用いて, n についての帰納法で示せばよい. $n=1$ のときには, (27) に注意して直接計算すれば (34) の両辺共に

$$
z_0(1-aq^{k_1})(1-bq^{-k_1})-z_1(1-cq^{k_1})(1-dq^{-k_1})
$$

となることが容易に分かる. 従って, $n-1$ まで (34) が成立したと仮定すると ($n\ge 2$), (33) と帰納法の仮定から

$$
\begin{aligned}
&V_{\boldsymbol{k}}^{(n)}(a,b,c,d,\mathbf{z};q)\\
&=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}z_{\nu}\Big(q^{n-1}(1-aq^{k_n})(1-bq^{-k_n})(bcq^n;q)_{n-1}R_{n-1,\nu}(\boldsymbol{k}',a,b,c,d;q)\\
&\qquad+(1-cq^{k_n+n-1})(1-dq^{-k_n+n-1})(bc;q)_{n-1}R_{n-1,\nu-1}(\boldsymbol{k}',aq,bq,cq,dq;q)\Big)
\end{aligned}
$$

となるので, (29) から (34) が得られる. 従って, 数学的帰納法により, 全ての自然数 n に対して (34) が成立する. □

3 quadratic formula

ここでは, (10) を変形して得られた結果に, Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem を利用して得られる quadratic formula の一般化となる等式について述べる.

まず, 一般に次が成立する.

Lemma 3.1. $n\ge 1$, $z_0,z_1,\dots,z_{n-1}\in\mathbb{C}-\{0\}$, $z_n\in\mathbb{C}$, $a_{i,j}\in\mathbb{C}$ ($1\le i\le n$, $0\le j\le n$) に対して, $n+1$ 次正方行列 $X_n=(x_{i,j})_{0\le i,j\le n}$ を

$$
x_{i,j}=\begin{cases} z_j & \text{if } i=0,\\ a_{i,j} & \text{if } 1\le i\le n\end{cases}
$$

と定義すると

$$\det X_n = \frac{\det\left(a_{i,j}z_{j-1} - a_{i,j-1}z_j\right)_{1\le i,j\le n}}{\prod_{i=1}^{n-1} z_j}.$$

Proof. $n+1$ 次正方行列 $G_n = (g_{i,j})_{0\le i,j\le n}$ を

$$g_{i,j} = \begin{cases} -z_j z_{j-1}^{-1} & \text{if } i = j-1, \\ 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義する. このとき, $i, j > 0$ に対して

$$[X_n G_n]_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} a_{i,k} g_{k,j} = a_{i,j} + a_{i,j-1} g_{j-1,j} = \frac{a_{i,j}z_{j-1} - a_{i,j-1}z_j}{z_{j-1}}$$

であり

$$([X_n G_n]_{0,j})_{0\le j\le n} = (z_0, 0, 0, \ldots, 0), \quad \det G_n = 1$$

でもあるので

$$\begin{aligned} \det X_n &= z_0 \cdot \det\left(\frac{a_{i,j}z_{j-1} - a_{i,j-1}z_j}{z_{j-1}}\right)_{1\le i,j\le n} \\ &= \frac{\det\left(a_{i,j}z_{j-1} - a_{i,j-1}z_j\right)_{1\le i,j\le n}}{\prod_{i=1}^{n-1} z_i} \end{aligned}$$

となり成立する. □

(10) に Lemma 3.1 を適用して整理すると次が容易に得られる.

Lemma 3.2. $n \ge 1$, $r \ge 0$, $ad = bc$ とする. $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z_n \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} &\det\left(\frac{\left((1-aq^{i+j-1})(1-bq^{-i+j-1})z_{j-1} - (1-cq^{i+j-1})(1-dq^{-i+j-1})z_j\right)(aq^i;q)_{j-1}(bq^{-i};q)_{j-1}}{(cq^i;q)_j(dq^{-i};q)_j}\right)_{1\le i,j\le n} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{6}} (aq, bq^{-n};q)_n \prod_{i=1}^{n-1} z_i \prod_{i=1}^{n} \frac{(a^{-1}c, q;q)_{i-1}(ab^{-1}q^{2i+1}, bcq^{2i};q)_{n-i}}{(dq^{-i};q)_{2i-1}(cq^i;q)_n} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-bcq^{2k-1})(q^{-n}, bcq^{-1}, cq^n, dq^{-1};q)_k z_k q^k}{(1-bcq^{-1})(q, aq, bq^{-n}, bcq^n;q)_k}. \end{aligned} \tag{35}$$

特に, $E_r = (e_1, e_2, \ldots, e_r), F_r = (f_1, f_2, \ldots, f_r) \in \mathbb{C}^r$ とおき, $z_j = \frac{z^j (E_r;q)_j}{q^j (F_r;q)_j}$ とすると

$$\begin{aligned} &\det\left(\frac{\left((1-aq^{i+j-1})(1-bq^{-i+j-1})\prod_{k=1}^{r}(1-f_k q^{j-1}) - zq^{-1}(1-cq^{i+j-1})(1-dq^{-i+j-1})\prod_{k=1}^{r}(1-e_k q^{j-1})\right)(aq^i;q)_{j-1}(bq^{-i};q)_{j-1}}{(cq^i;q)_j(dq^{-i};q)_j}\right)_{1\le i,j\le n} \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{-\frac{n(n^2-1)}{6}} (aq, bq^{-n};q)_n (F_r;q)_n \prod_{i=1}^{n} \frac{(a^{-1}c, q;q)_{i-1}(ab^{-1}q^{2i+1}, bcq^{2i};q)_{n-i}}{(cq^i;q)_n(dq^{-i};q)_{2i-1}} \\ &\quad \times {}_{r+6}\phi_{r+5}\left[\begin{matrix} q^{-n}, b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac12}, -b^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac12}, bcq^{-1}, cq^n, dq^{-1}, E_r \\ b^{\frac12}c^{\frac12}q^{-\frac12}, -b^{\frac12}c^{\frac12}q^{-\frac12}, aq, bq^{-n}, bcq^n, F_r \end{matrix}; q, z\right]. \end{aligned} \tag{36}$$

(36) に Desnanot-Jacobi adjoint matrix theorem を適用して, q-超幾何級数の関係式に直し, 変数を置き換えて整理すると, 次が得られる.

Corollary 3.3. $n \geq 2$, $r \geq 0$, $E_r = (e_1, e_2, \ldots, e_r), F_r = (f_1, f_2, \ldots, f_r) \in \mathbb{C}^r$ に対して

$$\begin{aligned}
&(a-b)(a-c)(bc-q^{1-n})(1-q^{1-n}) \\
&\times {}_{r+4}\phi_{r+3}\left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bcq^{-2}, c, q^{-n}, E_r \\ aq^{-1}, bq^{-1}, bcq^{n-1}, F_r \end{matrix}; q, z\right] {}_{r+4}\phi_{r+3}\left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bc, c, q^{2-n}, E_r q \\ aq, bq, bcq^{n-1}, F_r q \end{matrix}; q, z\right] \\
&= (a-q^{1-n})(1-b)(1-c)(bc-aq^{1-n}) \\
&\quad \times {}_{r+4}\phi_{r+3}\left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bcq^{-2}, cq^{-1}, q^{1-n}, E_r \\ aq^{-1}, b, bcq^{n-2}, F_r \end{matrix}; q, z\right] {}_{r+4}\phi_{r+3}\left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bc, cq, q^{1-n}, E_r q \\ aq, b, bcq^{n}, F_r q \end{matrix}; q, z\right] \\
&\quad - (1-a)(b-q^{1-n})(c-q^{1-n})(a-bc) \\
&\quad \times {}_{r+4}\phi_{r+3}\left[\begin{matrix} a^{-1}bcq^{-1}, bcq^{-2}, c, q^{1-n}, E_r \\ a, bq^{-1}, bcq^{n-2}, F_r \end{matrix}; q, z\right] {}_{r+4}\phi_{r+3}\left[\begin{matrix} a^{-1}bcq, bc, c, q^{1-n}, E_r q \\ a, bq, bcq^{n}, F_r q \end{matrix}; q, z\right]. \qquad (37)
\end{aligned}$$

(37) の一般化として次が成立する.

Theorem 3.4. $r, s \geq 0$, $E_r = (e_1, e_2, \ldots, e_r) \in \mathbb{C}^r$, $F_s = (f_1, f_2, \ldots, f_s) \in \mathbb{C}^s$ に対して

$$\begin{aligned}
&(a-b)(a-c)(bc-d)(1-d) \\
&\times {}_{r+4}\phi_{s+3}\left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bcq^{-2}, c, dq^{-1}, E_r \\ aq^{-1}, bq^{-1}, bcd^{-1}, F_s \end{matrix}; q, z\right] {}_{r+4}\phi_{s+3}\left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bc, c, dq, E_r q \\ aq, bq, bcd^{-1}, F_s q \end{matrix}; q, q^{s-r}z\right] \\
&= (a-d)(1-b)(1-c)(bc-ad) \\
&\quad \times {}_{r+4}\phi_{s+3}\left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bcq^{-2}, cq^{-1}, d, E_r \\ aq^{-1}, b, bcd^{-1}q^{-1}, F_s \end{matrix}; q, z\right] {}_{r+4}\phi_{s+3}\left[\begin{matrix} a^{-1}bc, bc, cq, d, E_r q \\ aq, b, bcd^{-1}q, F_s q \end{matrix}; q, q^{s-r}z\right] \\
&\quad - (1-a)(b-d)(c-d)(a-bc) \\
&\quad \times {}_{r+4}\phi_{s+3}\left[\begin{matrix} a^{-1}bcq^{-1}, bcq^{-2}, c, d, E_r \\ a, bq^{-1}, bcd^{-1}q^{-1}, F_s \end{matrix}; q, z\right] {}_{r+4}\phi_{s+3}\left[\begin{matrix} a^{-1}bcq, bc, c, d, E_r q \\ a, bq, bcd^{-1}q, F_s q \end{matrix}; q, q^{s-r}z\right]. \qquad (38)
\end{aligned}$$

ただし, ここでの ${}_r\phi_s$ は一般の q-超幾何級数

$${}_r\phi_s\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix}; q, z\right] = \sum_{k \geq 0} \frac{(a_1, a_2, \ldots, a_r; q)_k ((-1)^k q^{\binom{k}{2}})^{1+s-r} z^k}{(q, b_1, b_2, \ldots, b_s; q)_k}$$

である.

Theorem 3.4 の証明の前に, さらに一般化された次の等式を示そう.

Proposition 3.5. $\alpha = \{\alpha_k\}_{k \geq 0}$ に対して

$${}_r\varphi_s\left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix}; q, z, \alpha\right] = \sum_{k \geq 0} \frac{(a_1, a_2, \ldots, a_r; q)_k \alpha_k z^k}{(q, b_1, b_2, \ldots, b_s; q)_k}$$

とおき, $\beta=\{\beta_k\}_{k\geq 0}$, $\beta_k=\alpha_{k+1}$ と定義すると次が成立する[1].

$$
\begin{aligned}
&(a-b)(a-c)(bc-d)(1-d)\\
&\quad\times {}_{r+4}\varphi_{s+3}\left[\begin{matrix}a^{-1}bc, bcq^{-2}, c, dq^{-1}, E_r\\ aq^{-1}, bq^{-1}, bcd^{-1}, F_s\end{matrix};q,z,\alpha\right]{}_{r+4}\varphi_{s+3}\left[\begin{matrix}a^{-1}bc, bc, c, dq, E_rq\\ aq, bq, bcd^{-1}, F_sq\end{matrix};q,z,\beta\right]\\
&=(a-d)(1-b)(1-c)(bc-ad)\\
&\quad\times {}_{r+4}\varphi_{s+3}\left[\begin{matrix}a^{-1}bc, bcq^{-2}, cq^{-1}, d, E_r\\ aq^{-1}, b, bcd^{-1}q^{-1}, F_s\end{matrix};q,z,\alpha\right]{}_{r+4}\varphi_{s+3}\left[\begin{matrix}a^{-1}bc, bc, cq, d, E_rq\\ aq, b, bcd^{-1}q, F_sq\end{matrix};q,z,\beta\right]\\
&\quad-(1-a)(b-d)(c-d)(a-bc)\\
&\quad\times {}_{r+4}\varphi_{s+3}\left[\begin{matrix}a^{-1}bcq^{-1}, bcq^{-2}, c, d, E_r\\ a, bq^{-1}, bcd^{-1}q^{-1}, F_s\end{matrix};q,z,\alpha\right]{}_{r+4}\varphi_{s+3}\left[\begin{matrix}a^{-1}bcq, bc, c, d, E_rq\\ a, bq, bcd^{-1}q, F_sq\end{matrix};q,z,\beta\right].
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Proof of Proposition 3.5. $n\geq 0$ に対して, (39) の両辺の z^n の係数が一致することを示そう. そのためには, $0\leq k\leq n$ に対して

$$
\begin{aligned}
A_k &:= (a-b)(a-c)(bc-d)(1-d)\frac{(a^{-1}bc, bcq^{-2}, c, dq^{-1}, E_r;q)_k(a^{-1}bc, bc, c, dq, E_rq;q)_{n-k}\alpha_k\beta_{n-k}}{(q, aq^{-1}, bq^{-1}, bcd^{-1}, F_s;q)_k(q, aq, bq, bcd^{-1}, F_sq;q)_{n-k}},\\
B_k &:= (a-d)(1-b)(1-c)(bc-ad)\frac{(a^{-1}bc, bcq^{-2}, cq^{-1}, d, E_r;q)_k(a^{-1}bc, bc, cq, d, E_rq;q)_{n-k}\alpha_k\beta_{n-k}}{(q, aq^{-1}, b, bcd^{-1}q^{-1}, F_s;q)_k(q, aq, b, bcd^{-1}q, F_sq;q)_{n-k}},\\
C_k &:= (1-a)(b-d)(c-d)(a-bc)\frac{(a^{-1}bcq^{-1}, bcq^{-2}, c, d, E_r;q)_k(a^{-1}bcq, bc, c, d, E_rq;q)_{n-k}\alpha_k\beta_{n-k}}{(q, a, bq^{-1}, bcd^{-1}q^{-1}, F_s;q)_k(q, a, bq, bcd^{-1}q, F_sq;q)_{n-k}}
\end{aligned}
$$

とおき

$$\sum_{k=0}^{n}A_k=\sum_{k=0}^{n}B_k-\sum_{k=0}^{n}C_k \tag{40}$$

が成り立つことを示せばよい. 実際, $0\leq k\leq n+1$ に対して

$$A_k+A_{n-k+1}=B_k+B_{n-k+1}-(C_k+C_{n-k+1}) \tag{41}$$

が成立するので, (40) が成り立つ. ただし, $A_{n+1}=B_{n+1}=C_{n+1}=0$ とする. 以下, (41) を示そう. まず, 次の等式が成立している.

$$
\begin{aligned}
&(a-b)(a-c)(d-x)(bc-dx)(x-ay)(x-by)(x-cy)(y-dz)(ax-bcy)(dy-bcz)\\
&-(a-d)(b-x)(c-x)(ad-bc)(x-ay)(y-bz)(y-cz)(x-dy)(ax-bcy)(dx-bcy)\\
&+(b-d)(c-d)(a-x)(ax-bc)(y-az)(x-by)(x-cy)(x-dy)(ay-bcz)(dx-bcy)\\
&=xy(a-b)(a-c)(a-d)(b-d)(c-d)(1-y)(ad-bc)(x-bcz)(x^2-bcy)(y^2-xz).
\end{aligned}
\tag{42}
$$

(42) において, (x,y,z) を (q,q^k,q^n) と置き換えた等式を利用すると, $0\leq k\leq n$ に対して

$$
\begin{aligned}
&A_k-B_k+C_k\\
&=(q^{n-k+1}-q^k)(a-b)(a-c)(a-d)(b-d)(c-d)(ad-bc)(1-bcq^{n-1})G_kG_{n-k+1}\\
&\quad\times\frac{(1-a)(1-b)(1-bcd^{-1})(1-bcq^{-2})(1-bcq^{-1})(F_s;q)_1}{adq^2(1-aq^{-1})(1-bq^{-1})(1-bcd^{-1}q^{-1})(E_r;q)_1}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

[1] 実際は, $1\leq k\leq n$ に対して, $\alpha_k\beta_{n-k}=\alpha_{n-k+1}\beta_{k-1}$ が成立していればよい

の成立が直接の計算で示せる. ただし

$$G_k = \frac{(1-q^k)(1-bcq^{k-2})(a^{-1}bc,c,d;q)_{k-1}(bc;q)_{k-2}(E_r;q)_k\alpha_k}{(a,b,bcd^{-1},q;q)_k(F_s;q)_k}$$

とする. 従って, (43) から $A_0 - B_0 + C_0 = 0$ であることと

$$A_k - B_k + C_k = -(A_{n-k+1} - B_{n-k+1} + C_{n-k+1}) \quad (1 \le k \le n)$$

であることが容易に分かるので, (41) が成り立つ. □

Proof of Theorem 3.4. (39) において, $\alpha_k = ((-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}})^{s-r}$ とおくと

$$\beta_k = \alpha_{k+1} = ((-1)^{k+1} q^{\frac{k(k+1)}{2}})^{s-r} = (-1)^{s-r}(q^{(s-r)})^k \alpha_k$$

と書けるので, (38) が得られる. □

(38) から (37) が得られ, (37) から (11) が得られるので, z^k の係数を比較することにより, Wilson の結果である Theorem 1.4 も得られる.

(36) において $r = 2$ とし, $(a,b,c,d,e_1,e_2,f_1,f_2,z)$ を $(abq^{-1},0,abcdq^{-1},0,az,az^{-1},ac,ad,q)$ と置きかえて整理すると, 次の Askey-Wilson polynomial の行列式表示が得られる. 尚, (44) は, FPSAC'13 の reviewer の一人に指摘された等式である.

Corollary 3.6. $n \ge 1$, $1 \le i,j \le n$ に対して

$$\begin{aligned} B_{i,j} = \frac{(ab;q)_{i+j-2}}{(abcd;q)_{i+j-1}} &\big((1-abq^{i+j-2})(1-acq^{j-1})(1-adq^{j-1}) \\ &- (1-abcdq^{i+j-2})(1-azq^{j-1})(1-az^{-1}q^{j-1})\big) \end{aligned}$$

とおくと

$$\det(B_{i,j})_{1\le i,j\le n} = a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}} P_n(z;a,b,c,d;q) \prod_{i=1}^{n} \frac{(ab,cd,q;q)_{i-1}}{(abcd;q)_{n+i-1}}. \tag{44}$$

特に, (44) において, (z,a,b,c,d) を $(\iota, a^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac{r+1}{2}}\iota, -a^{\frac12}c^{-\frac12}q^{\frac{r+1}{2}}\iota, b^{\frac12}\iota, -b^{\frac12}\iota)$ と置きかえて整理すると次が得られる (cf. [2], [4]). ただし, ι は虚数単位とする.

Corollary 3.7. $n \ge 1$, $r \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\begin{aligned} &\det\left((q^{i-1} - cq^{j-1})\frac{(aq;q)_{i+j+r-2}}{(abq^2;q)_{i+j+r-2}}\right)_{1\le i,j\le n} \\ &= (-\iota)^n a^{\frac{n(n-2)}{2}} c^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n(n-2)(2n+1)}{6} + \frac{n(n-2)r}{2}} \prod_{k=1}^{n} \frac{(q;q)_{k-1}(aq;q)_{k+r-1}(bq;q)_{k-2}}{(abq^2;q)_{k+n+r-2}} \\ &\times P_n\left(\iota; a^{\frac12}c^{\frac12}q^{\frac{r+1}{2}}\iota, -a^{\frac12}c^{-\frac12}q^{\frac{r+1}{2}}\iota, b^{\frac12}\iota, -b^{\frac12}\iota; q\right). \end{aligned} \tag{45}$$

尚, (37) から, 次の Askey-Wilson polynomial の quadratic formula も得られる.

Corollary 3.8. $n \ge 2$, $a,b,c,d,q,z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned} &ab(1-q^{n-1})(1-cdq^{n-2})P_n(z;a,b,c,d;q)P_{n-2}(z;aq,bq,c,d;q) \\ &= (1-abq^{n-1})(1-abcdq^{n-1})P_{n-1}(z;a,b,c,d;q)P_{n-1}(z;aq,bq,c,d;q) \\ &\quad - (1-ab)(1-abcdq^{2n-2})P_{n-1}(z;aq,b,c,d;q)P_{n-1}(z;a,bq,c,d;q). \end{aligned} \tag{46}$$

参考文献

[1] M. Ciucu and C. Krattenthaler, "The Interaction of a gap with a free boundary in a two dimensional dimer system", *Comm. Math. Phys.*, **302** (2011) 253-289.

[2] V. J. W. Guo, M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "A generalization of the Mehta-Wang determinant and Askey-Wilson polynomials", 25th International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2013), DMTCS proc. AS, 2013, 749-760.

[3] V. J. W. Guo, M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "A quadratic formula for basic hypergeometric series related to Askey-Wilson polynomials", arXiv:math.CO/1212.1887v2.g.

[4] M. Ishikawa, H. Tagawa, "A generalization of the Mehta-Wang determinant and the Askey-Wilson polynomials", 数理解析研究所講究録 1795 「組合せ論的表現論の拡がり」 (2012), 204-223.

[5] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "A q-analogue of Catalan Hankel determinants", *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B11** (2009), 19-42.

[6] C. Krattenthaler, "Determinants of (generalized) Catalan numbers", J. Statist. Plann. Inference 140 (2010), 2260-2270.

[7] C. Krattenthaler, "A Systematic List of Two- and Three-term Contiguous Relations for Basic Hypergeometric Series", available at http://www.mat.univie.ac.at/~kratt/artikel/contrel.html.

[8] M. Mehta and R. Wang, "Calculation of a Certain Determinant", *Commun. Math. Phys.* **214** (2000), 227-232.

[9] J. Wilson, "Orthogonal functions from Gram determinants", SIAM J. Math. Anal. 22 (1991), 1147-1155.