数理解析研究所講究録
第 1965 巻 2015 年 87-90

Grassmann グラフの Terwilliger 代数について

東北大学大学院 情報科学研究科　渡邉　悠太
Yuta Watanabe
Graduate School of Information Sciences,
Tohoku University

1　はじめに

q 元体上の有限次元ベクトル空間 V を考える. Grassmann グラフとは, V の中の D 次元部分空間全体を頂点集合とし, 二つの部分空間の交わりが超平面をなすときに隣接関係を定めたものである. Grassmann グラフは「距離正則」とよばれる強い正則性を持つグラフであり, 代数的組合せ論における重要な研究対象である.

一般的に, グラフを代数的に捉える上で重要なものとして, 隣接行列から定まる Bose–Mesner 代数が挙げられるが, Bose–Mesner 代数は可換であるため非常に扱い易い一方で, グラフの大局を見ているにすぎないという欠点がある. そこで最近では, 局所的な情報を含めて（非可換に）拡張された Terwilliger 代数を考察することが有意であると考えられている.

今回, Dunkl [2] の結果を用いて部分的にしか知られていなかった Grassmann グラフの Terwilliger 代数の構造を完全に決定した. 本稿はその証明の概要を紹介することを目的とする. 原稿の枚数に制限があるため, 一部計算や証明を省略して結果のみの記述となっている. なお, 筆者の指導教官である田中太初准教授（東北大学）との共同研究に基づいている.

2　Terwilliger 代数の定義

ベクトル空間 V を a 次元空間 V_a と b 次元空間 V_b の直和として捉える. Grassmann グラフの頂点集合 X の部分集合として, V_a を含む頂点全体からなる集合 Y を考える.

$$Y = \{\xi \in X \mid V_a \subset \xi\}.$$

この部分集合 Y は「descendent」とよばれ, 距離正則グラフにおける重要な部分集合となっている. (Brouwer–Godsil–Koolen–Martin [1] や田中 [5] を参照.) 頂点集合 X を部分集合 Y からの距離で分割する. ここで距離とは 2 点間の道の長さのことであり, Y から距離 i の頂点の集合を Y_i で表す. このとき, $Y_0 = Y$ であり, Y_i は次で特徴付けられる.

$$Y_i = \{\xi \in X \mid \dim(\xi \cap V_a) = a - i\} \qquad (0 \le i \le a).$$

X で添字付けられる複素数体上の全行列環を $\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ と表す. 隣接行列 $A \in \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ とは, 頂点 ξ, η が隣接しているときに (ξ, η) 成分に 1 を割り当てて, それ以外に 0 を割り当てる実対称行列である. 隣接行列 A で生成される $\mathrm{Mat}_X(\mathbb{C})$ の部分代数を Bose–Mesner 代数[*1]とよぶ.

双対冪等元 E_i^* $(0 \le i \le a)$ とは, 頂点 ξ が Y_i に属しているときに (ξ, ξ) 成分に 1 を割り当てて, それ以外に 0 を割り当てる実対角行列である. 隣接行列と双対冪等元の両方で生成される部分代数 $\mathcal{T}$ を Terwilliger 代数

[*1] 距離正則グラフの場合の定義であることに注意.

とよぶ.

$$\mathcal{T} = \mathbb{C}[A, E_0^*, E_1^*, \ldots, E_a^*] \subset \mathrm{Mat}_X(\mathbb{C}).$$

Terwilliger [6] によって提唱された最初の Terwilliger 代数は, 部分集合からの距離ではなく, ある固定された 1 頂点（基点）からの距離による分割に基づいて定義されている. その後, 鈴木 [4] によって部分集合に対する分割へと定義が一般化されていて, 前述の通り, ここでは鈴木 [4] による定義を採用している. なお, 部分集合 Y が 1 頂点からなるとき（つまり $a = D$ のとき）は, 最初の Terwilliger 代数の定義と一致している.

3 Terwilliger 代数の既約表現

今回, Terwilliger 代数 $\mathcal{T}$ の全ての既約表現を記述した. 以降では, その証明の概略を「構成法」と「既約性」2 部に分けて紹介する. 構成に関しては, ある群から定まる $\mathcal{T}$ の代数構造を含む代数を考えて, そこでの表現を $\mathcal{T}$ に制限するという形で得る. また既約性については, 得られた表現の特性を調べることで証明している.

3.1 構成法

V 上の一般線形群 $\mathrm{GL}(V)$ の中で V_a を固定するもの全体のなす群を G とする. X 上の複素値関数全体を $L(X)$ で表し, $L(X)$ から $L(X)$ への G の作用と可換な線形写像全体の集合を $\mathrm{Hom}_G(L(X), L(X))$ で表す.

命題 1. $\mathcal{T}$ は $\mathrm{Hom}_G(L(X), L(X))$ の部分代数である.

Proof. 隣接行列 A と双対冪等元 E_i^* が $\mathrm{Hom}_G(L(X), L(X))$ に含まれていることを示せば十分である. まず, Grassmann グラフの隣接関係は正則線形変換によって不変なため, 隣接行列 A は G の作用と可換である. 次に, 各 Y_i が G-軌道となっていることから, 双対冪等元 E_i^* も全て G の作用と可換であることが従う. □

Dunkl [2] は V の部分空間全体への群 G の作用を考察している. その結果を用いて, $\mathrm{Hom}_G(L(X), L(X))$ の表現を構成する. $\rho : G \to \mathrm{GL}(L(X))$ を G の置換表現とし, $\rho_i : G \to \mathrm{GL}(L(Y_i))$ $(0 \leq i \leq a)$ をその部分表現とする. ここでは詳しく記述できないが, Dunkl [2] は各 ρ_i の既約分解を与えている.

定理 2 (Dunkl [2]). G のある既約表現 $\lambda_{m,n,r}$ が存在して, $\rho_i = \oplus_{m,n,r} \lambda_{m,n,r}$ $(0 \leq i \leq a)$ とできる. ここで, 添字 m, n, r の範囲は i に依存する.

$d(m,n,r) + 1$ で $\lambda_{m,n,r}$ を含む ρ_i の個数を表すことにすると, 上記定理と表現論で有名な Schur の補題より $\mathrm{Hom}_G(L(X), L(X))$ のブロック対角化を得る.

$$\mathrm{Hom}_G(L(X), L(X)) \simeq \bigoplus_{m,n,r} \mathrm{Mat}_{d(m,n,r)+1}(\mathbb{C}).$$

なお本研究では上記の同型を具体的に決定した. その際に, Dunkl [2] の求めた球函数を使っている.

3.2 既約性

以降では, パラメータ m, n, r を固定して $d = d(m,n,r)$ とする. あるひとつの表現 $\varphi : \mathrm{Hom}_G(L(X), L(X)) \to \mathrm{Mat}_{d+1}(\mathbb{C})$ に着目して, φ が $\mathcal{T}$ の表現として既約であることを示す.

各 i $(0 \leq i \leq a)$ に対して双対冪等元 E_i^* の定め方から, $\varphi(E_i^*)$ もまた対角行列（もしくは零行列）である. ある $\nu = \nu(m,n,r)$ が存在して, 次のように表せる.

$$\varphi(E_i^*) = \begin{cases} \mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \overset{\overset{i-\nu}{\vee}}{1}, 0, \ldots, 0) & \nu \leq i \leq \nu + d \text{ のとき}, \\ \mathbf{0} & \text{それ以外}. \end{cases}$$

隣接行列 A に対しては, 具体的に計算した結果, 三重対角行列になることを確認した. ここでは結果のみを記述する.

$$\varphi(A) = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & & & 0 \\ c_1 & a_1 & b_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{d-1} & a_{d-1} & b_{d-1} \\ 0 & & & c_d & a_d \end{pmatrix}$$

ここで,

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{q^{a+b-m-n-r+1}}{(q-1)^2}\left(1-q^{i-D+m+n+r}\right)\left(1-q^{i-b+2n+r}\right), \\ c_i &= \frac{q^{a+b-m-n-r+1}}{(q-1)^2}\left(1-q^{i}\right)\left(q^{-a-b+2m+2n+2r-1}-q^{i+D-b-m+n-1}\right), \\ a_i &= \theta - b_i - c_i. \end{aligned}$$

ただし, 行和の値は $\theta = \frac{1}{(q-1)^2}\left(q-1-q^{D+1}-q^{-D+a+b+1}+q^{a+b-m-n-r+1}+q^{m+n+r}\right)$ である.

命題 3. $\varphi(A)$ は既約三重対角行列である. 言い換えれば, 全ての添字 i に対して $b_i \neq 0, c_i \neq 0$ を満たす.

以上の事実から既約性を示すことができる.

命題 4. φ は $\mathcal{T}$ の表現として既約である.

Proof. $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ を $\mathbb{C}^{d+1}$ の標準基底とする. 零でないベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{d+1}$ を任意に取り, 標準基底を用いて $\mathbf{v} = \alpha_0\mathbf{e}_0 + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_d\mathbf{e}_d$ と表す. $\mathbf{v}$ は零ベクトルではないため, 零でない元 α_j が存在する. $\varphi(E^*_{j+v})$ は第 j 成分にのみ 1 をもつ対角行列なので, $\varphi(E^*_{j+v})\mathbf{v} = \alpha_j\mathbf{e}_j$. このことから, $\mathbf{e}_j$ は $\varphi(\mathcal{T})\mathbf{v}$ に含まれる. $\varphi(A)$ は三重対角行列なので, $\varphi(A)\mathbf{e}_j = b_{j-1}\mathbf{e}_{j-1} + a_j\mathbf{e}_j + c_{j+1}\mathbf{e}_{j+1} \in \varphi(\mathcal{T})\mathbf{v}$. さらに, 命題 3 より, $\mathbf{e}_{j\pm1}$ も $\varphi(\mathcal{T})\mathbf{v}$ に含まれる. これを繰り返すことで, $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d \in \varphi(\mathcal{T})\mathbf{v}$ となる. □

行列 $*$-代数の一般論から, 全ての $\mathcal{T}$ の既約表現は G の部分置換表現として得られることが知られている. (例えば, Gijswijt [3] を参照.) したがって, これで全ての $\mathcal{T}$ の既約表現が得られたことになる.

最後に Leonard pair との関連について触れて終わりたい. ベクトル空間 V に対して, 線形変換の対 $(B: V \to V, B^*: V \to V)$ が次の条件を満たすとき Leonard pair とよばれる.

(i) ある V の基底に対して, B の行列表現が既約三重対角かつ B^* の行列表現が対角となる.
(ii) ある V の基底に対して, B の行列表現が対角かつ B^* の行列表現が既約三重対角となる.

今回の場合は, A^* を適切にとることで, $(\varphi(A), \varphi(A^*))$ が Leonard pair となっている.*2 さらに, Leonard pair は同型を除いて完全に分類されているが, 今回の場合は Type I となっていることを確認した. (Terwilliger [6] を参照.) $a = D$ の場合は, Terwilliger [7] に結果だけ載っていたが, 今回得られたものはそれと矛盾しないものである.

*2 A^* は双対隣接行列とよばれる.

参考文献

[1] Andries E. Brouwer, Chris D. Godsil, Jack H. Koolen, and William J. Martin. Width and dual width of subsets in polynomial association schemes. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 102(2):255–271, 2003.

[2] Charles F. Dunkl. An addition theorem for some q-Hahn polynomials. *Monatshefte für Mathematik*, 85(1):5–37, 1978.

[3] Dion Gijswijt. *Matrix algebras and semidefinite programming techniques for codes*. PhD thesis, University of Amsterdam, 2005.

[4] Hiroshi Suzuki. The Terwilliger algebra associated with a set of vertices in a distance-regular graph. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 22(1):5–38, 2005.

[5] Hajime Tanaka. Classification of subsets with minimal width and dual width in Grassmann, bilinear forms and dual polar graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 113(5):903–910, 2006.

[6] Paul Terwilliger. The subconstituent algebra of an association scheme (part I). *Journal of Algebraic Combinatorics*, 1(4):363–388, 1992.

[7] Paul Terwilliger. The subconstituent algebra of an association scheme (part III). *Journal of Algebraic Combinatorics*, 2(2):177–210, 1993.