数理解析研究所講究録
第1976巻 2015年 91-99

Bruce-Roberts ミルナー数の計算アルゴリズム

田島慎一*
TAJIMA, SHINICHI
筑波大学大学院数理物質系数学域
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

鍋島克輔†
NABESHIMA, KATSUSUKE
徳島大学大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部
INSTITUTE OF SOCIO-ARTS AND SCIENCES, TOKUSHIMA UNIVERSITY

Abstract

Bruce-Roberts' Milnor numbers of hypersurface isolated singularities are considered in the context of symbolic computation. An effective method to compute Bruce-Roberts' Milnor numbers is proposed. The key of the method is the use of parametric local cohomology systems.

1 序

J. W. Bruce と R. M. Roberts は, 1988年の論文 [5] において複素解析的な特異多様体上の函数の critical points の研究を行い, 古典的な Milnor 数の概念を一般化した. 今日, Bruce-Roberts ミルナー数と呼ばれるこの概念は, (M. Kashiwara, R. MacPherson らが独立に導入した) local Euler obstruction とも関係する重要な不変量であることが知られている. しかし, その値を実際に求めることは, 特異多様体が超曲面である場合であっても一般には極めて困難である. 本稿では, 特異多様体が孤立特異点を持つ超曲面である場合を考察し, その場合は Bruce-Roberts ミルナー数を求めることが可能であることを示す.

*tajima@math.tsukuba.ac.jp
†nabeshima@tokushima-u.ac.jp

2 基本概念

X は $\mathbb{C}^n$ の原点 O の近傍, $\mathcal{O}_X$ は X 上の正則函数のなす層, $\mathcal{O}_{X,O}$ は層 $\mathcal{O}_X$ の原点 O における stalk を表すとする. X 上正則な函数 $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が定める超曲面を $Z = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$ で表す. 以下, 超曲面 Z は原点を孤立特異点として持つと仮定する.

2.1 Bruce-Roberts ミルナー数

正則函数を係数とする正則ベクトル場

$$v = a_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2(x)\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n(x)\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad a_i(x) \in \mathcal{O}_X, \quad i = 1, \ldots, n$$

は, 条件 $v(g) \in \langle g \rangle$ を満たすとき, Z に沿って**対数的**であるいう. ここで, $\langle g \rangle$ は g によって生成される $\mathcal{O}_X$ のイデアルを表す. X 上で Z に沿って対数的なベクトル場全体のなす加群の層を $\mathcal{D}er_X(-\log Z)$ で表す ([22]). 正則函数の germ $f \in \mathcal{O}_{X,O}$ に対し,

$$I_{BR(f,Z)} = \langle v(f) \mid v \in \mathcal{D}er_{X,O}(-\log Z) \rangle$$

と定める. これは, 局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ におけるイデアルである. 局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ のイデアル $I_{BR(f,Z)}$ による剰余

$$\mathcal{O}_{X,O}/I_{BR(f,Z)} = \mathcal{O}_{X,O}/\langle v(f) \mid v \in \mathcal{D}er_{X,O}(-\log Z) \rangle$$

を考える.

定義 ([5]) 剰余 $\mathcal{O}_{X,O}/I_{BR(f,Z)}$ のベクトル空間としての次元を, Bruce-Roberts ミルナー数と呼び $\mu_{BR}(f,Z)$ で表す.

$$\mu_{BR}(f,Z) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/I_{(BR(f,Z))}).$$

2.2 局所コホモロジー

$\mathbb{C}^n$ の原点 O に台を持つ局所コホモロジーを $\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ で表す. イデアル $I_{BR(f,Z)}$ により annihilate される局所コホモロジー類全体のなすベクトル空間を

$$H_{BR(f,Z)} = \{\psi \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) \mid h\psi = 0, \forall h \in I_{BR(f,Z)}\}$$

で表す. このとき, 次が成立する.

定理 1. ベクトル空間 $H_{BR(f,Z)}$ は, 剰余 $\mathcal{O}_{X,O}/I_{BR(f,Z)}$ の双対ベクトル空間である.

従って, Bruce-Roberts ミルナー数は, ベクトル空間 $H_{BR(f,Z)}$ の次元と等しい.

$$\mu_{BR}(f,Z) = \dim_{\mathbb{C}}(H_{BR(f,Z)})$$

また, Grothendieck local duality により, $H_{BR(f,Z)}$ を用いることでイデアル $I_{BR(f,Z)}$ を完全に特徴つけることができる.

3 対数的ベクトル場と局所コホモロジー

論文 [26] において, 孤立特異点を持つ超曲面 Z に沿って対数的なベクトル場全体のなす加群の層 $\mathcal{D}er_X(-\log Z)$ の構造を調べる方法を与えた. この節では, まずこの結果を復習し, さらに $\mathcal{D}er_X(-\log Z)$ の生成元を構成するための基本的枠組みを与える.

さて, [26] に既に示したように, 対数的ベクトル場のなす加群 $\mathcal{D}er_X(-\log Z)$ の構造を調べるためには, まず, $\mathbb{C}^n$ の原点を通る超平面 H を「適切に」選び, その後に対数的ベクトル場を求めるための計算を行うことが重要である. 対数的ベクトル場を求める際は, 「適切に」選ばれた超平面 H が, $\mathbb{C}^n$ の座標 $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ により, $H=\{z\in\mathbb{C}^n \mid z_1=0\}$ と表されるような座標系 $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ を利用する. この節では, 記号の混乱を避けるため, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ は $\mathbb{C}^n$ に元々与えられた座標系, $z=(z_1,z_2,...,z_n)$ は新たに与えられる座標系を表すとする. 函数 f,g 等は z の函数とみなし $f(z),g(z)$ と表すことにする.

3.1 polar variety と イデアル商

多少, 天下り的になるが, $g,\frac{\partial g}{\partial z_2},\frac{\partial g}{\partial z_3},\ldots,\frac{\partial g}{\partial z_n}$ は regular sequence であると仮定し, 局所コホモロジー類からなる次のベクトル空間を考える

$$H_\Gamma=\{\psi\in\mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)\mid g\psi=\frac{\partial g}{\partial z_2}\psi=\frac{\partial g}{\partial z_3}\psi=\cdots=\frac{\partial g}{\partial x_z}\psi=0\}.$$

この有限次元ベクトル空間 H_Γ は, 超曲面 Z の polar variety

$$\Gamma=\{z\in X\mid\frac{\partial g}{\partial z_2}=\frac{\partial g}{\partial z_3}=\cdots=\frac{\partial g}{\partial z_n}=0\}$$

と超曲面 Z との交わり方を記述するベクトル空間であると解釈することができる. 次に, H_Γ の各要素を $\dfrac{\partial g}{\partial z_1}$ 倍することで得られる集合を $H_\Phi=\dfrac{\partial g}{\partial z_1}(H_\Gamma)$ とおくと, H_Φ の局所環 $\mathcal{O}_{X,O}$ における annihilator $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_\Phi)$ は, イデアル商

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_{\Phi(g)})=\left\{a(z)\in\mathcal{O}_{X,O}\,\middle|\,a(z)\frac{\partial g}{\partial z_1}\in\left\langle g,\frac{\partial g}{\partial z_2},\frac{\partial g}{\partial z_3},\ldots,\frac{\partial g}{\partial z_n}\right\rangle\right\}$$

で与えられることが分かる. 従って, 次の結果を得る.

定理 2 ([26]). 正則関数 $a(z)\in\mathcal{O}_{X,O}$ に対し, 次の (i), (ii) は同値である.

(i) $a(z)\in\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_\Phi)$

(ii) $\exists v\in\mathcal{D}er_X(-\log Z)$ s.t. $v=a(z)\dfrac{\partial}{\partial z_1}+a_2(z)\dfrac{\partial}{\partial z_2}+\cdots+a_n(z)\dfrac{\partial}{\partial z_n}$
ただし, $a_2(z),\ldots,a_n(z)\in\mathcal{O}_{X,O}$ である.

この定理により, イデアル $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_\Phi)$ のスタンダード基底を求め, 局所環における syzygy 計算を行なうことで, 対数的ベクトル場のなす加群の生成元を構成出来ることが分かる.

3.2 超平面切断

さて, ここで, H_Φ は, 剰余 $\mathcal{O}_{X,O}/\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_\Phi)$ の双対ベクトル空間であることを思い出す. いま,

$$H_T = \{\psi \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) \mid g\psi = \frac{\partial g}{\partial z_1}\psi = \frac{\partial g}{\partial z_2}\psi = \cdots = \frac{\partial g}{\partial z_n}\psi = 0\}$$

とおくと, ベクトル空間の完全列

$$0 \to H_T \to H_\Gamma \to H_\Phi \to 0$$

を得る. ここで, H_T, H_Γ の $\mathcal{O}_{X,O}$ における annihilators は其々,

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_T) = \left\langle g, \frac{\partial g}{\partial z_1}, \frac{\partial g}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial z_n} \right\rangle,$$

$$\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_{X,O}}(H_\Gamma) = \left\langle g, \frac{\partial g}{\partial z_2}, \frac{\partial g}{\partial z_3}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial z_n} \right\rangle,$$

であることから, B. Teissier ([29]), D. T. Lê ([12]) らの結果等より,

$$\dim_{\mathbb{C}}(H_T) = \tau(g), \quad \dim_{\mathbb{C}}(H_\Gamma) = \mu^{(n)}(g) + \mu^{(n-1)}(g|H)$$

が従う ([27], [12], [29]). ただし, $\tau(g)$ は g の Tjurina 数, $\mu^{(n)}(g)$ は g の Milnor 数, $\mu^{(n-1)}(g|H)$ は g を超平面 H に制限して得られる函数の Milnor 数を意味する. これらより, 次の結果を得る.

命題 3 ([26]).

$$\dim_{\mathbb{C}}(H_\Phi) = \mu^{(n)}(g) - \tau(g) + \mu^{(n-1)}(g|H)$$

剰余 $\mathcal{O}_{X,O}/\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(H_\Phi)$ は, 対数的ベクトル場

$$v = a_1(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + a_2(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + \cdots + a_n(z)\frac{\partial}{\partial z_n}$$

の係数 $a_1(z)$ の原点 O における vanish の度合いを測るベクトル空間である. $\mu^{(n)}(g) - \tau(g)$ の値は超曲面 Z のみに依るが, $\mu^{(n-1)}(g|H)$ は超平面 H の選びかたに依存する. 従って, 対数的ベクトル場の構造を記述する際は, $\mu^{(n-1)}(g|H)$ が最小となるような超平面 H を選び, この超平面が $H = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_1 = 0\}$ と表されるような座標系 $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ を用いて対数的ベクトル場を表現することが良いことが分かる.

4 超平面の選択

今迄と同様に, 正則函数 $g(x) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が定める超曲面 $Z = \{x \in X \mid g(x) = 0\}$ は, 原点を孤立特異点として持つとする. 原点 O を通る超平面を, 超平面を定める法線ベクトル $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ を用いて H_ξ で表す. 以下, 原点 O を通る超平面全体のなす集合を, 法線ベクトルが定める射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ と同一視する.

4.1 genericity

正則函数 g を超平面 H_ξ に制限して得られる函数を $g|H_\xi$ で表す. 函数 $g|H_\xi$ が原点を孤立特異点として持つ場合, その Milnor 数を $\mu^{(n-1)}(g|H_\xi)$ で表す. この時, Milnor 数 $\mu^{(n-1)}(g|H_\xi)$ は一般に, $[\xi] \in \mathbb{P}^{n-1}$ に依存するが, 最小値

$$\min_{[\xi]\in\mathbb{P}^{n-1}} \mu^{(n-1)}(g|H_\xi)$$

が存在する. この最小値を B. Teissier ([30]) に従って, $\mu^{(n-1)}(g)$ で表す.

B. Teissier ([28, 29, 30]) は, 射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}$ の部分集合

$$\{[\xi] \in \mathbb{P}^{n-1} \mid \mu^{(n-1)}(g|H_\xi) = \mu^{(n-1)}(g)\}$$

が, Zarisky open, dense であることを示した. この事から,

$$\dim_{\mathbb{C}}(H_\Phi) = \mu^{(n)}(g) - \tau(g) + \mu^{(n-1)}(g|H)$$

を最小とするような超平面 H は 超平面全体のなす集合 $\mathbb{P}^{n-1}$ において generic に存在することが直ちに従う.

いま, $U = \{[\xi] \in \mathbb{P}^{n-1} \mid \mu^{(n-1)}(g|H_\xi) = \mu^{(n-1)}(g)\}$ とおき, 補集合 $\mathbb{P}^{n-1} - U$ を考える. B. Teissier ([29]) により, $\mathbb{P}^{n-1} - U$ は, 超曲面 Z に対する Nash blow-up の特異点 O 上の fiber, 即ち, limiting tangent space と一致することが示されている. 従って, 対数的ベクトル場を構成する際は, $[\xi] \notin \mathbb{P}^{n-1} - U$ をみたす ξ に対する超平面 H_ξ を予め選んで種々の計算を行うことが良い事になる.

D. O'Shea が論文 [21] において, limiting tangent space を求めるアルゴリズムを発表している. D. O'Shea の提案したアルゴリズムを用いて $\mathbb{P}^{n-1} - U$ を求め, その情報から「対数的ベクトル場の計算に適した超平面」を決めることが可能である. しかしながら, このアルゴリズムは一般に計算コストがかなり高い. 次の節で, U に属すような generic な超平面を求めるための新たな計算法を提案する.

4.2 Parametric local cohomology system の利用

この節では, parametric local cohomology system を用いることで, 条件 $\mu^{(n-1)}(g|H) = \mu^{(n-1)}(g)$ を満たす generic な超平面 H と, $H = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_1 = 0\}$ となる座標系 $z = (z_1, z_2, ..., z_n)$ を同時に求めることが可能であることを示す.

まず, 条件 $\mu^{(n-1)}(g|H_\xi) = \mu^{(n-1)}(g)$ を満たす超平面 H_ξ 全体のなす集合

$$\{[\xi] \in \mathbb{P}^{n-1} \mid \mu^{(n-1)}(g|H_\xi) = \mu^{(n-1)}(g)\}$$

は, $\mathbb{P}^{n-1}$ において open dense であることに注目する.

与えられた座標系 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ に対し, パラメータ $\ell = (l_2, l_3, ..., l_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ を用いて

$$\begin{cases} z_1 &= x_1 - l_2x_2 - l_3x_3 - \cdots - l_nx_n \\ z_2 &= x_2 \\ z_3 &= x_3 \\ &\vdots \\ z_{n-1} &= x_{n-1} \\ z_n &= x_n \end{cases}$$

なる座標変換を施し, 函数 g を用いて, $r_\ell(z_2, z_3, ..., z_n) = g(l_2z_2+l_3z_3+\cdots+l_nz_n, z_2, z_3, ..., z_n)$ とおく. この函数 r_ℓ は, g を超平面 $H_\ell = \{z_1 = 0\}$ に制限することで得られる函数である.

超平面 H_ℓ の原点 O に台を持つ局所コホモロジーに属するコホモロジー類であり, 函数 r_ℓ のヤコビイデアル $J_{r_\ell} = \left\langle \frac{\partial r_\ell}{\partial z_2}, \frac{\partial r_\ell}{\partial z_3}, ..., \frac{\partial r_\ell}{\partial z_n} \right\rangle$ により annihilate されるもの全体のなす空間を

$$H_{J_{r_\ell}}^{(n-1)} = \{\psi \in \mathcal{H}_{\{O\}}^{n-1}(\mathcal{O}_{H_\ell}) \mid J_{r_\ell}\psi = 0\}$$

とおく.

函数 r_ℓ が原点 O を孤立特異点として持つ場合, $H_{J_{r_\ell}}^{(n-1)}$ は有限次元ベクトル空間となりその次元は, $g|_{H_\ell}$ の Milnor 数と等しい.

$$\dim_{\mathbb{C}}(H_{J_{r_\ell}}^{(n-1)}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{H_\ell}/J_{r_\ell}).$$

集合 $\{[1, -l_2, -l_2, ..., -l_n] \in \mathbb{P}^{n-1} \mid (l_2, l_3, ..., l_n) \in \mathbb{C}^{n-1}\} = \{[\xi] \in \mathbb{P}^{n-1} \mid \xi_1 \neq 0\}$ は, $\mathbb{P}^{n-1}$ において open dense であることから,

$$\min_\ell \dim_{\mathbb{C}}(H_{J_{r_\ell}}^{(n-1)}) = \mu^{(n-1)}(g)$$

が成立することが保障される. 従って, $H_{J_{r_\ell}}^{(n-1)}$ が有限次元となるような r_ℓ を与えるパラメータ ℓ の中から, $\dim_{\mathbb{C}}(H_{J_{r_\ell}}^{(n-1)})$ を最小にする $\ell = (l_2, l_3, ..., l_n)$ を選ぶことで, 対数的ベクトル場の計算に用いる超平面 $\{x \in \mathbb{C}^n \mid x_1 - l_2x_2 - l_3x_3 - \cdots - l_nx_n = 0\}$ および座標系 $(z_1, z_2, ..., z_n) = (x_1 - l_2x_2 - l_3x_3 - \cdots - l_nx_n, x_2, x_3, ..., x_n)$ を求めることが出来る.

この計算法を実行するためには, パラメータ ℓ に依存する函数 r_ℓ により定義されるパタメータ付局所コホモロジー類のなす空間 $H_{J_{r_\ell}}^{(n-1)}$ を計算することが必要となるが, その計算には [18] に与えた parametric local cohomology system を求める計算アルゴリズムを用いる. 函数 r_ℓ はパラメータを含むため, パラメータ値によっては r_ℓ は孤立特異点を定義しない場合もあり得ることに注意されたい. 論文 [18] で与えた計算アルゴリズムは, パラメータ付局所コホモロジーの計算を開始する前に, 特異点集合の次元判定を予め行う等の前処理を行うように設計してあり, この種の問題に対応可能なようにしてある. 本稿で扱う問題の場合, $\mu^{(n-1)}(g)$ は, 不等式

$$\mu^{(n-1)}(g) \cdot \text{multiplicity}(g) \leq \mu^{(n)}(g)$$

を満たすことが示されている ([29], page 323, proposition 2.1) ので, パラメータ付局所
ホモロジー計算において, ベクトル空間 $H^{(n-1)}_{J_{r_\ell}}$ の次元が, $\mu^{(n}(g)/\mathrm{multiplicity}(g)$ の値
超えた場合, その (パラメータ空間の) stratum 上での局所コホモロジー計算を止めるこ
で, この種の問題を処理することが出来る.

5 アルゴリズムの概要

超曲面を定義する g および函数 f はともに, 多項式であるとする (計算は理論的には
束冪級数とみなして行う). 以下のアルゴリズムは, 対数的ベクトル場の構造が分かるよ
な方法で, Bruce-Roberts Milnor 数の計算を行うものである.

アルゴリズム

Input： 超曲面の定義多項式 g および 多項式 (正則関数) f

1. B. Teissier の条件を満たす generic な超平面および座標系を構成する.

2. Polar variety と超曲面の交わり方を記述する局所コホモロジー類の計算を行う,

3. 対数的ベクトル場の計算に必要となるイデアル商の双対空間を構成し, イデアル商のスタンダード基底計算を行う.

4. 拡張イデアルメンバーシップアルゴリズムおよび局所環におけるシジジー計算により対数的ベクトル場の生成元を構成する

5. イデアル $I_{BR(f,Z)}$ により annihilate される局所コホモロジー類のなすベクトル空間

$$H_{BR(f,Z)} = \{\psi \in \mathcal{H}^n_{\{O\}}(\mathcal{O}_X) \mid h\psi = 0, \forall h \in I_{BR(f,Z)}\}$$

の基底局所コホモロジー類を求める.

6. ベクトル空間 $H_{BR(f,Z)}$ の次元. イデアル $I_{BR(f,Z)}$ の reduced standard 基底を計算す

Output： $H_{BR(f,Z)}$ の基底局所コホモロジー類, Bruce-Roberts ミルナー数, および
イデアル $I_{BR(f,Z)}$ の reduced standard 基底

このアルゴリズムは, Bruce-Roberts ミルナー数を求めるだけでなく, ベクトル空
$H_{BR(f,Z)}$, イデアル $I_{BR(f,Z)}$ の reduced standard 基底も出力することに注意されたい. ま
た, 対数的ベクトル場のなす加群の生成元を出力させることも可能である

参　考　文　献

[1] I. Ahmed, M. A. Soares Ruas and J. N. Tomazella, *Invariants of topological relati right equivalences*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **155** (2013), 307–315.

[2] J.-P. Brasselet et M. H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*, Séminaire E. N. S ,1978-1979, Astérisque **82-83** (1981), 93–146.

[3] J.-P. Brasselet, D. Massey, A. J. Parameswaran and J. Seade, *Euler obstruction and defects of functions on singular varieties*, J. London Math. Soc. **70** (2004), 59–76.

[4] J. L. Brylinski, A. Dubson et M. Kashiwara, *Formule de l'indice pour les modules hokonomes et obstruction d'Euler locale*, C. R. Acad. Sci. Paris, **293** (1981), 573–576.

[5] J. W. Bruce and R. M. Roberts, *Critical points of functions on an analytic varieties,* Topology **27** (1988), 57–90.

[6] A. Dubson, *Classes caractéristiques des variétés singuliéres*, C. R. Acad. Sci. Paris **287** (1978), 237–240.

[7] A. Dubson, *Calcul des invariants numériques des singularités et applications*, Sonderforschungsbereich **40** Theoretische Mathematik, Univ. Bonn 1981.

[8] N. G. Grulha Jr, *The Euler obstruction and Bruce-Roberts' Milnor number*, Quart. J. Math. **60** (2009), 291–302.

[9] N. G. Grulha Jr, *Stability of the Euler obstruction of a function*, Bol. Soc. Mat. Mexicana **17** (2011), 95–103.

[10] M. Kashiwara, *Index theorem for maximally overdetermined systems of linear differential equations*, Proc. Japan Acad. **49** (1973), 803–804.

[11] M. Kashiwara, *Systemes d'equations micro-differentielles*, Cours de Masaki Kashiwara, Notes de Teresa Monteiro Fernandes, Univ. Paris-Nord, 1976-77

[12] D. T. Lê, *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersueface complexe*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **23** (1973), 261–270.

[13] R. MacPherson, *Chern classes for singular varieties*, Ann. of Math. **100** (1974), 423–432.

[14] 鍋島克輔, 田島慎一：パラメータ付き対数的ベクトル場と局所コホモロジーについて, 京都大学数理解析研究所講究録 **1927** 「数式処理研究の新たな発展」(2014), 55–65

[15] K. Nabeshima and S. Tajima, *An algorithm for computing standard bases by change of ordering via algebraic local cohomology,* Lecture Notes in Computer Science **8592** (2014), 414–418.

[16] K. Nabeshima and S. Tajima, *An algorithm for computing Tjurina stratifications of μ-constant deformations using algebraic local cohomology*, Lecture Notes in Computer Science **8592** (2014), 523–530.

[17] K. Nabeshima and S. Tajima , *Computing logarithmic vector fields associated with parametric semi-quasihomogeneous hypersurface isolated singularities*, International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 2015, (2015), 291–298.

[18] K. Nabeshima and S. Tajima, *Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals*, submitted.

[19] J. J. Nuño-Ballesteros, B. Oréfice and J.N. Tomazella, *The Bruce-Roberts number of a function on a weighted homogeneous hypersurface*, The Quarterly J. Math. **64** (2013), 269 - 280.

[20] B. Oréfice, *O número de Milnor de uma singularidade isolada*, Ph.D. thesis, Federal University of São Carlos (Brazil), 2011.

[21] D. O'Shea, *Computing limits of tangent spaces : singularites, computation and pedagogy*, in Singularity Theory, Trieste 1991 , World Sci. (1995), 549–573.

[22] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., **27** (1980), 265–291.

[23] M.-H. Schwartz, *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 3262–3264, 3535–3537.

[24] M.-H. Schwartz, *Classes de Chern des ensembles analytiques*, Actualité Mathématiques, Hermann 2000.

[25] J. Seade, M. Tibar and A. Verjovsky, *Milnor numbers and Euler obstruction*, Bull. Braz. Math. Soc. **36** (2005), 275–283.

[26] S. Tajima, *On polar varieties, logarithmic vector fields and holonomic D-modules*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu **40** (2013), 41–51.

[27] S. Tajima, *Parametric local cohomology classes and Tjurina stratifications for μ-constant deformations of quasi-homogeneous singularities*, in Several Topics on Real and Complex Singularities (2014), 189–200, World Scientific

[28] B. Teissier, *Cycles évanescents et conditions de Whitney*, C.R. Acad. Sc. Paris **276** (1973), 1051–1054.

[29] B Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, Astérisques **7-8**, Soc. Math. France. (1973), 285–362.

[30] B. Teissier, *Variété polaires*, Inventiones Math. **40** (1977), 267–292.