

再生核をもちいたサンプリング値からの 原函数再構成とその高精度数値計算

藤原宏志 (京都大学 情報学研究科)
斎藤三郎 (群馬大学 工学部)

概要

本稿では、必ずしも規則的でない標本点上で与えられた値をとる函数を求める問題に対し、再生核 Hilbert 空間の枠組みで再構成公式 (補間公式) を述べ、そのノルム最小化元としての意味付けを示す。また具体的な数値例をもちいて有効性、数値的安定性、収束性を論じる。

1 緒言

Shannon らのサンプリング定理に代表される一連の理論は、連続量と離散量との相互変換に関連して、通信工学、情報理論を始めとする広範な分野において理論面からも応用面からも取り組まれている [4, 5, 6, 7]。多くの場合、標本点は暗黙のうちに決められており、特に古典的なサンプリング定理の枠組みでは等間隔な標本点に限定して議論がなされる。しかし現実には標本点 (観測点) は等間隔とは限らず、対象とする現象や目的によっては必ずしも規則的でない標本点が適当な場合も多い。

一方、微分方程式の数値計算や数値積分などでは、連続的な情報を有限の情報で近似 (離散化) して扱う。そのため効率的かつ高精度な計算のために標本点の選択は極めて重要で、考える函数空間の基底や現象を考慮して定められることが多い。特に標本点での函数値から標本点以外の点での原函数の値を求める手法は補間とよばれ、種々の数値解析手法に関わる基本的な話題のひとつである。

本論文ではサンプリングの理論の中から、有限個の標本値から原函数を復元する問題を考察する。その場合、先験情報などをもちいて函数空間の基底や補間函数を定めたり、応用においては大域的・周期的な情報をもつ三角函数 (Fourier 級数展開) を利用することも多い。本論文では函数空間として再生核 Hilbert 空間を利用し、再生核を補間函数とする復元法を提案する。このように標本点を任意に設定して再生核空間の枠組みで原函数を復元する手法については [8, 11] など数多く提案されているが、そこでは数値例などで具体的に復元するには至っていない。そこで本論文では公式の導出のみならず提案手法による数値計算例を紹介し、提案手法の有効性を定量的に示す。次章で再生核空間の基礎について述べ、3章で再構成公式を導出し、近年著者らによって見い出されたその意味付けについて論じる。4章以降は提案するアルゴリズムの具体的適用例によって提案手法の有効性を示し、安定性および収束性に関する数値例を紹介する。また、高精度数値計算手法である多倍長計算の必要性について論じる。

2 再生核 Hilbert 空間

本章では [3, 9, 10] に従い, 再生核 Hilbert 空間について基礎事項を記す.

定義 2.1. $H = H(\Omega)$ を領域 Ω 上の函数 Hilbert 空間とし, その内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ とする. $K(x, y) : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (または \mathbb{C}) が次を満たすとき, K を H の再生核という.

- (1) 任意の $y \in \Omega$ に対し, $K_y(x) := K(x, y)$ は x の函数として H の元である. すなわち, $K_y \in H$.
- (2) 任意の $x \in \Omega$ および任意の $f \in H$ に対して $f(x) = \langle f, K_x \rangle_H$ が成立する.

H に再生核 K が存在するとき, H を再生核 Hilbert 空間といい, (2) を再生性という.

命題 2.2. Hilbert 空間 H に再生核が存在すれば, 唯一つである.

証明. K, \tilde{K} がともに H の再生核であるとする. 任意の $y \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} \left\| K(\cdot, y) - \tilde{K}(\cdot, y) \right\|_H^2 &= \langle K(\cdot, y) - \tilde{K}(\cdot, y), K(\cdot, y) - \tilde{K}(\cdot, y) \rangle_H \\ &= \langle K_y - \tilde{K}_y, K_y \rangle_H - \langle K_y - \tilde{K}_y, \tilde{K}_y \rangle_H \end{aligned}$$

第1項に K_y の再生性, 第2項に \tilde{K}_y の再生性をもちいると, この値は 0 となる. \square

命題 2.3. 再生核函数 Hilbert 空間 H の再生核 K について, 次が成立する.

- (1) 任意の $x, y \in \Omega$ に対して $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$.
- (2) K は半正定値, すなわち任意の $f \in H$ と有限集合 $E \subset \Omega$ に対して

$$\sum_{x, y \in E} \overline{f(x)} f(y) K(x, y) \geq 0.$$

さらに $\{K(\cdot, y)\}_{y \in E}$ が H で線型独立ならば, 等号が成立するのは E 上で $f(x) = 0$ となる時に限る.

証明. H の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, ノルムを $\|\cdot\|_H$ とする.

- (1) $K(x, y) = K_y(x) = \langle K_y, K_x \rangle_H = \overline{\langle K_x, K_y \rangle_H} = \overline{K_x(y)} = \overline{K(y, x)}$.
- (2) $K(x, y) = \langle K_y, K_x \rangle_H$ より

$$\begin{aligned} \sum_{x, y \in E} \overline{f(x)} f(y) K(x, y) &= \sum_{x, y \in E} \overline{f(x)} f(y) \langle K_y, K_x \rangle_H = \sum_{x, y \in E} \langle f(y) K_y, f(x) K_x \rangle_H \\ &= \left\langle \sum_{y \in E} f(y) K_y, \sum_{x \in E} f(x) K_x \right\rangle_H = \left\| \sum_{y \in E} f(y) K_y \right\|_H^2 \geq 0. \end{aligned}$$

また K_y が線型独立でこの値が 0 ならば, 任意の $y \in E$ で $f(y) = 0$ である. \square

例 2.4. 再生核 Hilbert 空間 H とその再生核 K の例を挙げる [9].

(1) Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R})$ は内積

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \{f(x)\overline{g(x)} + f'(x)\overline{g'(x)}\} dx$$

をもち、再生核は次で与えられる。

$$K_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + \xi^2} e^{i(x-y)\xi} d\xi = \frac{1}{2} e^{-|x-y|} \in C.$$

また $H^2(\mathbb{R})$ は内積

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \{f(x)\overline{g(x)} + 2f'(x)\overline{g'(x)} + f''(x)\overline{g''(x)}\} dx$$

をもち、再生核は次で与えられる。

$$K_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + \xi^2)^2} e^{i(x-y)\xi} d\xi = \frac{1}{4} e^{-|x-y|} (1 + |x-y|) \in C^2.$$

Sobolev の埋蔵定理により $H^1(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R})$, $H^2(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R})$ である。

(2) $h > 0$ とする。 \mathbb{R} 上で解析的かつ 2 乗可積分な函数で、ある正数 $C > 0$ に対して

$$|f(x)| \leq C \exp\left(\frac{\pi|x|}{h}\right), \quad x \rightarrow \infty$$

を満たす函数の全体を Paley-Wiener 空間といい $W(\pi/h)$ と書く。これは

$$K_h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-ix\xi} \overline{e^{-iy\xi}} d\xi = \frac{1}{\pi(x-y)} \sin \frac{\pi}{h}(x-y) \in C^\omega \text{ (解析的)}$$

を再生核とする再生核 Hilbert 空間である。また

$$W\left(\frac{\pi}{h}\right) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} F(x) e^{-ix\xi} dx; F \in L^2\left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right) \right\}$$

が成立する。

3 再生核 Hilbert 空間上でのサンプリング定理

領域 Ω 上の複素数値函数の全体を $\mathcal{F}(\Omega)$ とする。 $H \subset \mathcal{F}(\Omega)$ を函数 Hilbert 空間、 N を正整数、 $\{a_i\}_{i=1}^N \subset \Omega$ を相異なる N 点とする。 $\{F_i\}_{i=1}^N \subset \mathbb{C}$ が与えられたとき、

$$f(a_i) = F_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.1)$$

を満たす $f \in H$ を求めることを考える。以下では a_i を標本点、 F_i を標本値という。

一般にこのような f は存在しても一意とは限らない。そこで H が再生核 K をもち、かつ $\{K(\cdot, a_j)\}_{j=1}^N$ が H で線型独立な場合に、それらの線型結合で表される H の元で条件 (3.1) を満たすものを求める。すなわち、 $\{c_j\} \subset \mathbb{C}$ によって

$$f(x) \approx f_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j K(x, a_j)$$

と表され、標本点上で

$$f_N(a_i) = F_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

を満たす f_N を考える。このとき $\{c_j\}$ は連立一次方程式

$$\sum_{j=1}^N K(a_i, a_j) c_j = F_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

の解であるが、命題 2.3(2) により $\{c_j\}$ はただひとつ存在する。さらに $K(a_i, a_j)$ を (i, j) 成分にもつ N 次正方行列

$$\left(K(a_i, a_j) \right)_{1 \leq i, j \leq N} \quad (3.2)$$

の逆行列も存在する。その (i, j) 成分を \tilde{k}_{ji} とすると、 $c_j = \sum_{i=1}^N \tilde{k}_{ji} F_i$ となるので

$$f_N(x) = \sum_{i,j=1}^N F_i \tilde{k}_{ji} K(x, a_j)$$

と書くこともできる。以上を整理すると次の手順で表される。

アルゴリズム 3.1. 正整数 N と $\{(a_i, F_i)\}_{i=1}^N \subset \Omega \times \mathbb{C}$ が与えられたとする。このとき以下の手順で $f_N(x) \in \mathcal{F}(\Omega)$ を定める。

(1) 再生核 Hilbert 空間 $H \subset \mathcal{F}(\Omega)$ をひとつ定める。ただし H の再生核 K に対して $\{K(\cdot, a_i)\}_{i=1}^N$ が H で線型独立であるとする。

(2) 連立一次方程式 $\left(K(a_i, a_j) \right)_{i \rightarrow, j \downarrow} \left(c_j \right)_{j \downarrow} = \left(F_i \right)_{i \downarrow}$ を解き、 $\{c_j\}$ を求める。

(3) $f_N(x) = \sum_{j=1}^N c_j K(x, a_j)$ とする。

以上の手順でただひとつ定まる $f_N \in H$ は条件 (3.1) を満たす。

提案するこのアルゴリズムの本質は、先験情報などをもちいて適切に函数空間 H を設定することにある。例えば函数の補間や補外など、函数空間が先に設定され、その枠組みで条件 (3.1) を満たす f を求める問題への適用が想定される。

一般には条件 (3.1) を満たす $f \in H$ は無数に存在するが、上述のとおり、再生核の線型結合で与えられる f_N は一意に定まる。これはまた次のとおり、ノルム最小の元となっている。

定理 3.2. $\{(a_i, F_i)\}_{i=1}^N \subset \Omega \times \mathbb{C}$ に対して $\mathcal{M} = \{f \in H; f(a_i) = F_i, 1 \leq i \leq N\}$ とすると、

$$\|f_*\|_H = \min_{f \in \mathcal{M}} \|f\|_H$$

となる f_* がただひとつ存在し、 f_N に一致する。

証明. 再生性により

$$M = \{f \in H; \langle f, K_{a_i} \rangle_H = F_i, 1 \leq i \leq N\}$$

であることに注意すると, M は閉凸集合であり, ノルム最小の元 f_* がただひとつ存在する. 一方, $f_N \in M$ であり, 任意の $f \in M$ に対して $g = f - f_N$ とすると

$$\langle g, f_N \rangle_H = \left\langle f - f_N, \sum_{j=1}^n c_j K_{a_j} \right\rangle_H = \sum_{j=1}^n \bar{c}_j \{ \langle f, K_{a_j} \rangle_H - \langle f_N, K_{a_j} \rangle_H \} = 0.$$

したがって

$$\|f\|_H^2 = \|g + f_N\|_H^2 = \|g\|_H^2 + 2\operatorname{Re}\langle g, f_N \rangle_H + \|f_N\|_H^2 \geq \|f_N\|_H^2$$

であり, f_N は M で最小ノルムを実現している. □

4 数値計算例

本章では提案するアルゴリズム 3.1 による数値計算例を示す. 標本点は C 言語の標準ライブラリに含まれる擬似一様乱数ルーチンをもちいて $[-5, 5]$ の範囲で生成した. 再生核空間には Sobolev 空間 $H^1(\mathbb{R})$, $H^2(\mathbb{R})$ および Paley-Wiener 空間 $W(\pi/h)$ をもちいた. また標本値の計算およびアルゴリズム 3.1 の (2), (3) の数値計算は 10 進 600 桁の精度でおこなった. ここで 10 進 600 桁での計算は一般的な計算環境 (ハードウェア, コンパイラ, ソフトウェア) では実現されないため, 多倍長計算ライブラリ `exflib` [2] をもちいた. 計算精度については 5 章で論じる.

例 4.1. 標本値を

$$f(x) = e^{-x^2/\pi} \sin \pi x$$

をもちいて $F_i = f(a_i)$, $1 \leq i \leq N$ で生成する.

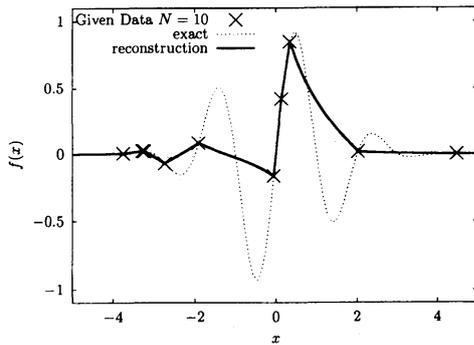
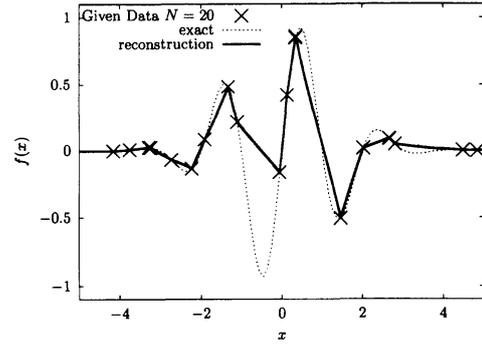
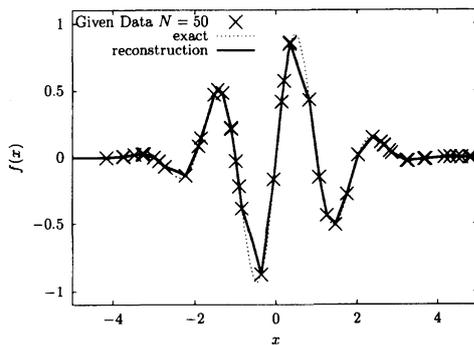
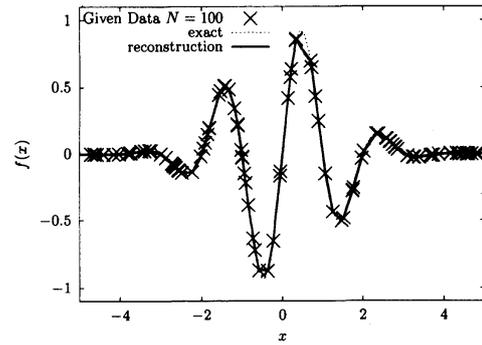
Fig. 1, 2 および 3 はそれぞれ再生核空間 $H^1(\mathbb{R})$, $H^2(\mathbb{R})$ および $W(\pi)$ の枠組みでの結果を示す. 図中, \times 印が入力となる $\{(a_i, F_i)\}_{i=1}^N$ を, 点線が f を, 実線が提案するアルゴリズム 3.1 による結果 f_N を示している.

ここでもちいた f は $H^1(\mathbb{R})$, $H^2(\mathbb{R})$ および $W(\pi)$ の何れにも属しており, 標本点数 N が充分大きい場合, 求まった f_N は f を十分に近似している.

例 4.2. 区分的に線型な連続関数

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & 1 \leq x < 2, \\ 3 - x, & 2 \leq x < 3, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

を対象とし, $H^1(\mathbb{R})$ および $W(\pi)$ の枠組みでのアルゴリズム 3.1 の結果をそれぞれ Fig. 4, 5 に示す. $f \in H^1(\mathbb{R})$ より, この枠組みでは f_N は f を十分に近似する (Fig. 4). 一方 $f \notin W(\pi)$ より, この枠組みでは Fig. 5 に示すとおり, 得られる f_N は振動して f の近似を与えない.

(a) 標本点数が $N = 10$ の場合(b) 標本点数が $N = 20$ の場合(c) 標本点数が $N = 50$ の場合(d) 標本点数が $N = 100$ の場合Fig 1: 解析関数 (例 4.1) の $H^1(\mathbb{R})$ での計算例

例 4.3. 区間 $[0, 3]$ の特性関数 $f(x) = \chi_{[0,3]}(x)$ により標本値を作成する. Fig. 6, 7 はそれぞれ $H^1(\mathbb{R})$, $H^2(\mathbb{R})$ の枠組みで得られる f_N を示している. この f は不連続性を有しており, もちいた何れの函数空間にも属さない. したがって得られる f_N には, Fig. 7(d) のように N が大きい場合に振動が現れる. $H^1(\mathbb{R})$ では何れの結果も近似を与えているように見えるが (Fig. 6), さらに大きな N に対しては振動が現れることが考えられる.

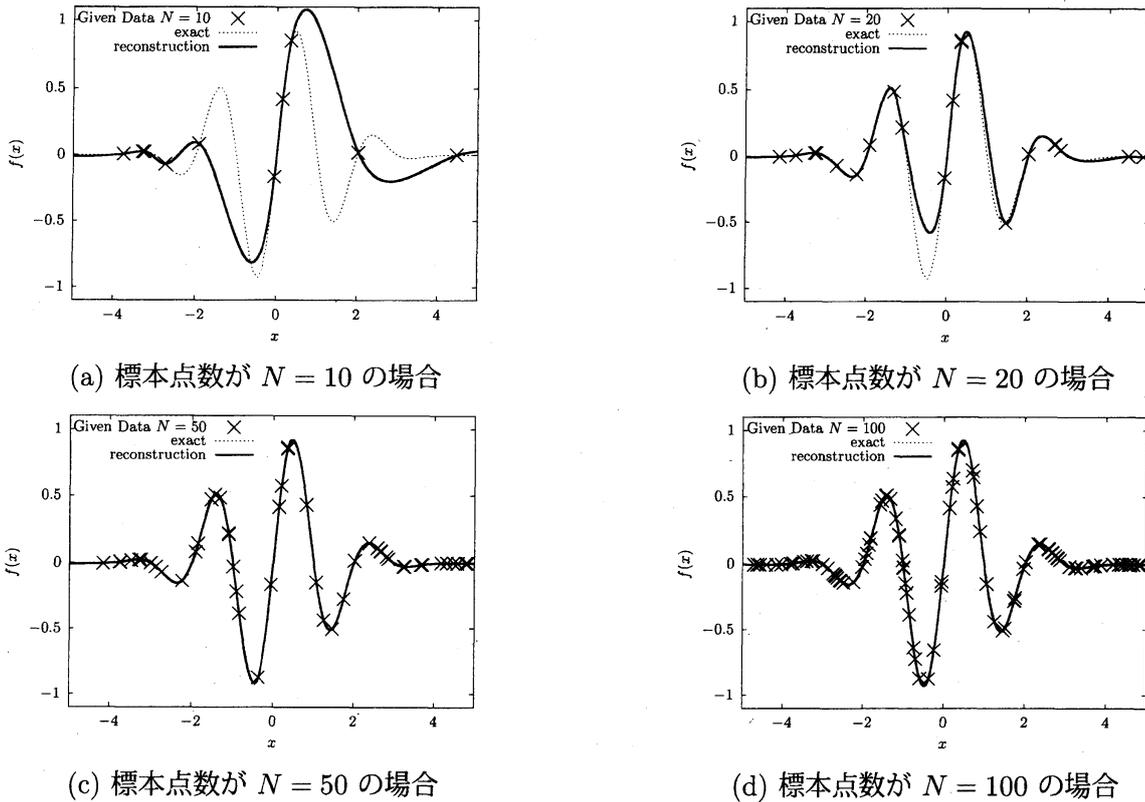
5 アルゴリズム 3.1 の数値的安定性と計算にもちいる精度

提案するアルゴリズムでは行列 (3.2) による連立方程式の求解 (2) を含み, 数値的安定性に関してその条件数が重要な情報を与える. 本章では条件数の例を示し, 函数空間の設定と数値的安定性との関係を論じる.

前章と同じ標本点をもちい, 再生核空間を $H^1(\mathbb{R})$ または $H^2(\mathbb{R})$ とした場合の行列 (3.2) の 2-ノルムによる条件数を Fig. 8 (a) に示す. 図中, 横軸は N の値を, 縦軸は条件数を対数軸で示している. 一方, Fig. 8 (b) は Paley-Wiener 空間 $W(\pi/h)$, $h = 0.5, 1, 2$ での条件数である.

K_1 は微分可能ではないが, K_2 は C^2 -級であり, また K_h は解析的であることに注意する. これより, 再生核 (函数空間の設定) が滑らかなほど条件数が大きく, 数値的不安定が増すことが示唆される.

数値的に不安定な計算過程においては, 浮動小数点演算における丸め誤差が急激に増大し, 計算結果の信頼性は著しく低下することが多い. Fig. 9 は例 4.1 の場合に, 幾つかの

Fig 2: 解析函数 (例 4.1) の $H^2(\mathbb{R})$ での計算例

計算精度で得られた f_N を示す。図中、(a)(b) はそれぞれ標準的な倍精度 (10 進で約 16 桁)、10 進 200 桁の精度での結果である。これらの範囲では計算精度の不足から、丸め誤差の影響により計算が破綻している。そこで多倍長計算ライブラリ `exflib` によりさらに計算精度を高めて 10 進 300 桁、400 桁とすると、Fig. 9 (c)(d) の結果を得た。これらの計算結果に差異は見られず、多倍長計算によって丸め誤差の影響が除去されていることがわかる。また提案するアルゴリズム 3.1 の不安定性に対処するには、本例においては 10 進 200 桁の計算精度は充分ではなく、少なくとも 300 桁程度が必要と見積ることができる。

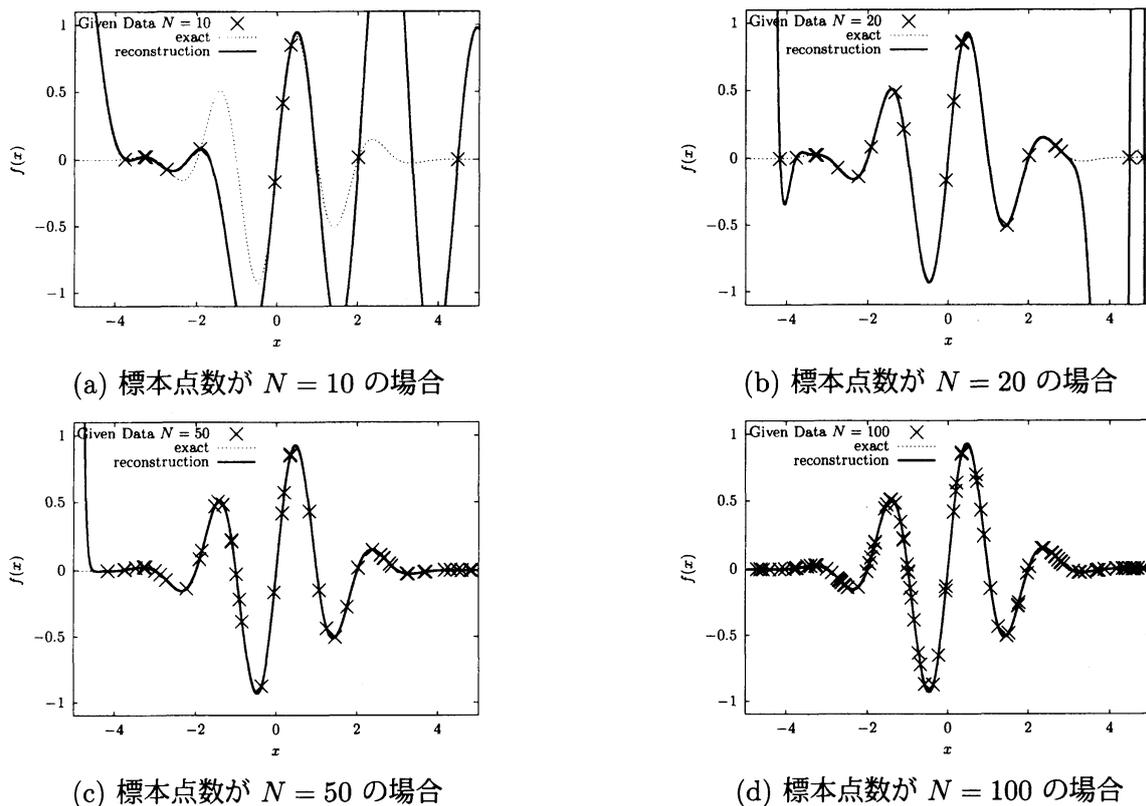
6 アルゴリズム 3.1 が各点収束しない例

提案するアルゴリズムでは、仮定が全て満たされている場合であっても、標本点の配置によっては各点 $x \in \Omega$ で

$$\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) = f(x) \quad (6.1)$$

とは限らない。次にその例を示す。

例 6.1. 標本点を $a_i = 1/i$, $1 \leq i \leq N$ とし、 $f(x) = \text{sinc}(2\pi x)$ をもちいて標本値を $F_i = f(a_i)$ とする。 $H^1(\mathbb{R})$, $H^2(\mathbb{R})$, $W(\pi)$ のもとで得られる f_N を Fig. 10 に示す。図中 (a)–(d) はそれぞれ $N = 10, 20, 50, 100$ での結果を表す。ここでは 10 進 600 桁の精度で数値計算をおこなった。

Fig 3: 解析函数 (例 4.1) の $W(\pi)$ での計算例

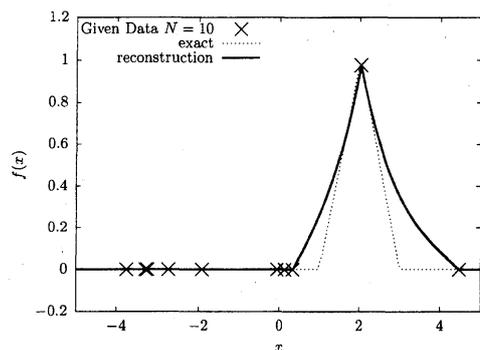
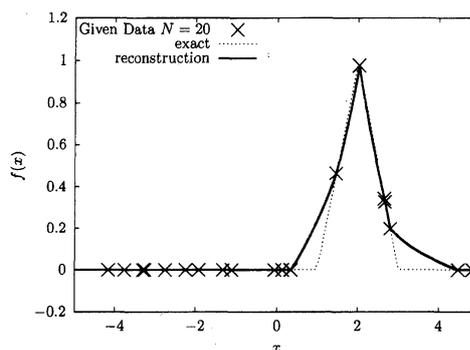
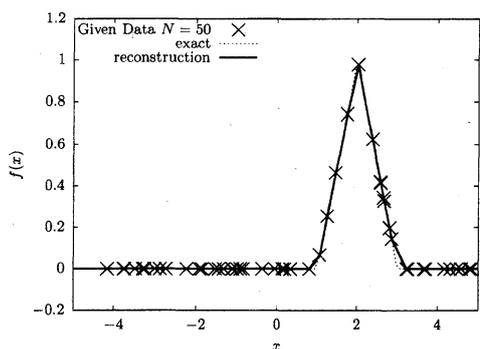
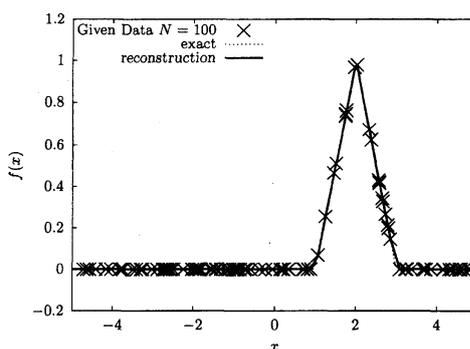
図より $H^1(\mathbb{R})$ や $H^2(\mathbb{R})$ の枠組みで得られる f_N は、標本点が存在しない区間 $(1/2, 1)$ において f の近似となっていない。ここで $\ell = 1, 2$ のいずれでも、 $f \in H^\ell(\mathbb{R})$ かつ $\{K_\ell(\cdot, 1/i)\}_{i=1}^N$ は $H^\ell(\mathbb{R})$ 上で線型独立であることに注意する。一方、 $W(\pi)$ においては、区間 $(1/2, 1)$ で標本値を与えていないにも関わらず f の十分な近似となっている。これは f と枠組みの解析性からくる一致の定理に依るものと考えられる。

この例により、充分多くの標本点 $\{a_i\}$ を与えても十分な近似が得られるとは限らず、標本点の配置および函数空間の設定が重要であることがわかる。数学的には $\{a_i\} \subset \Omega$ の稠密性に関する適当な仮定のもとで (6.1) が従う [1]。

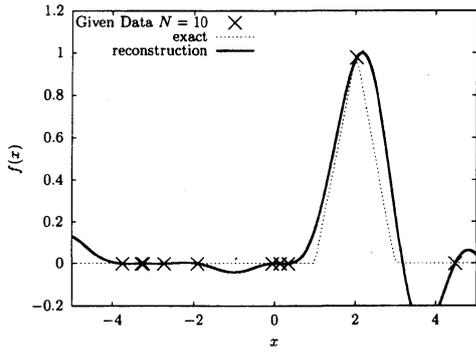
謝辞 本研究の遂行にあたり、科研費 (基盤研究 (C) No. 26400198, 基盤研究 (C)(2) No. 24540113) の助成を頂きました。

参考文献

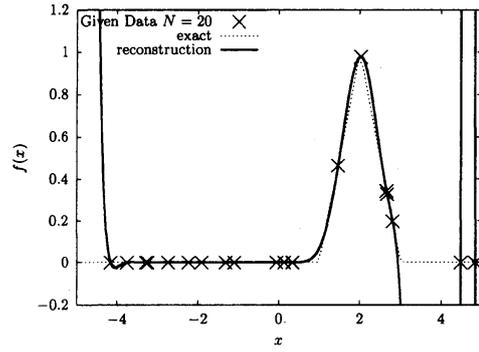
- [1] FUJIWARA, H. AND SAITOH, S. : The general sampling theory by using reproducing kernels, Contributions in Mathematics and Engineering — In Honor of Constantin Carathéodory, P. M. Pardalos and Th. M. Rassias (ed.), Springer, New York (to appear).

(a) 標本点数が $N = 10$ の場合(b) 標本点数が $N = 20$ の場合(c) 標本点数が $N = 50$ の場合(d) 標本点数が $N = 100$ の場合Fig 4: 微分不可能な例 4.2 の $H^1(\mathbb{R})$ での計算例

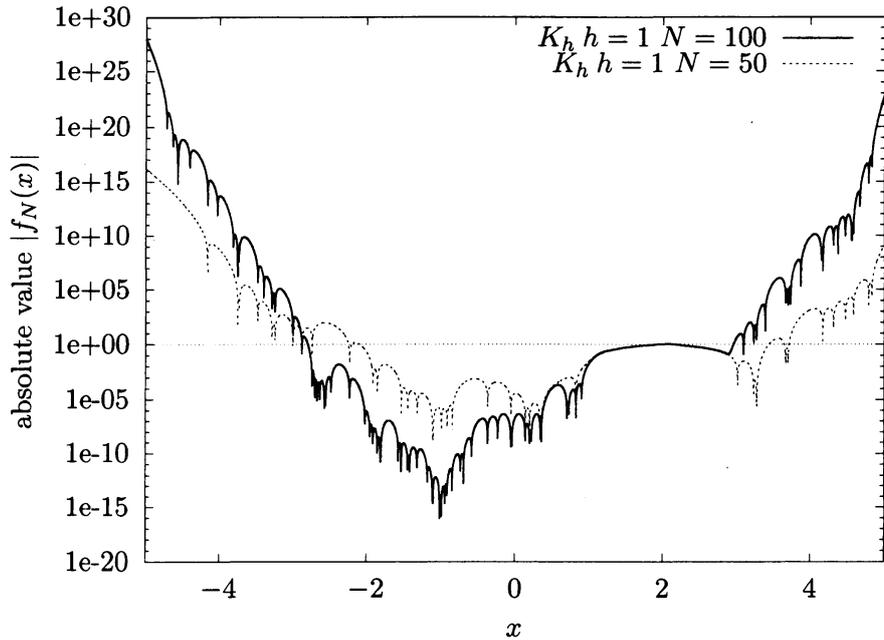
- [2] <http://www-an.acs.i.kyoto-u.ac.jp/~fujiwara/explib>
- [3] 藤原宏志 : Numerical real inversion of the Laplace transform and their applications, 数理解析研究所講究録 **1618** (2008), 192–209.
- [4] HIGGINS, J. R. : Sampling theory in Fourier and signal analysis: foundations, Clarendon Press, Oxford (1996).
- [5] HIGGINS, J. R. AND STENS, R. L. (EDS.) : Sampling theory in Fourier and signal analysis: advanced topics, Clarendon Press, Oxford (1999).
- [6] JERRI, A. J. : The Shannon sampling theorem — its various extensions and applications — a tutorial review, *Proc. IEEE* **65** (1977), 1565–1596.
- [7] KANG, S., KWON, K. H. AND LEE, D. G. : Beyond Shannon: generalized sampling, マス・フォア・インダストリ研究 **2** (2015), 13–55.
- [8] 岡田正巳 : サンプリング値の補間による未知関数の再構成, 数理解析研究所講究録 **1869** (2013), 58–68.
- [9] 齋藤三郎 : 再生核の理論入門, 牧野書店 (2002).
- [10] SAITOH, S.: Approximate real inversion formulas of the Gaussian convolution. *Appl. Anal.* **83** (2004), 727–733.



(a) 標本点数が $N = 10$ の場合



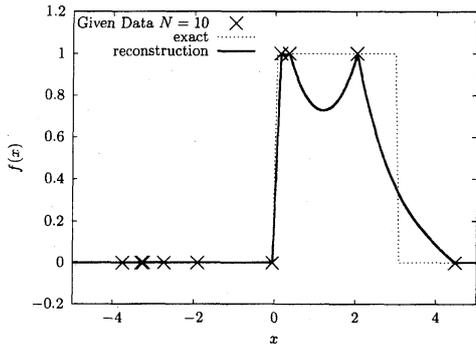
(b) 標本点数が $N = 20$ の場合



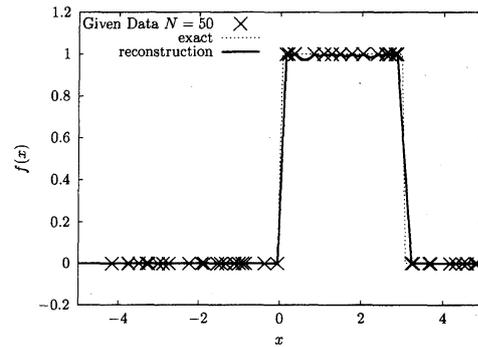
(c) 標本点数が $N = 50$ (破線), $N = 100$ (実線) の場合, 縦軸は対数軸

Fig 5: 微分不可能な例 4.2 の $W(\pi)$ での計算例

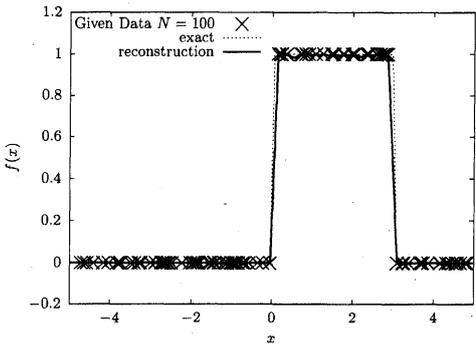
[11] 渡辺宏太郎, 柏木英一, 生天目章: ソボレフ空間 $H_0^s(\Omega)$ の再生核による補間法について, 情報処理学会全国大会論文集 (基礎理論および基礎技術) 第 49 回 (1994), 129-130.



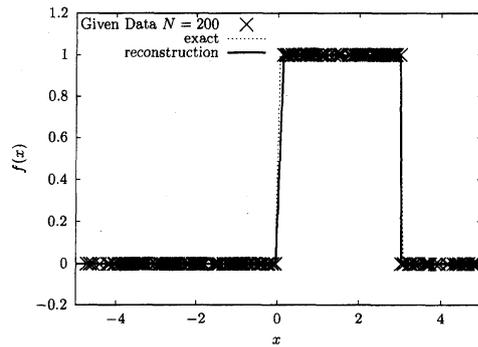
(a) 標本点数が $N = 10$ の場合



(b) 標本点数が $N = 50$ の場合

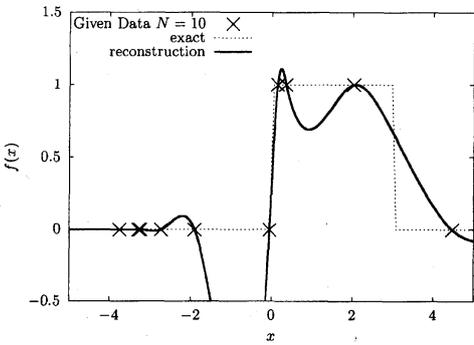


(c) 標本点数が $N = 100$ の場合

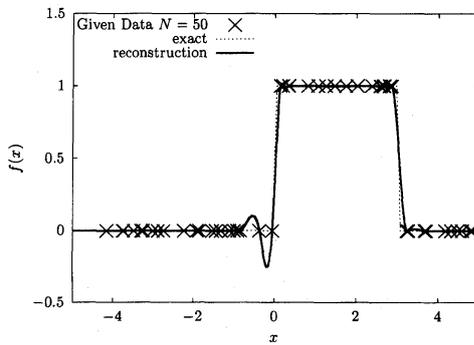


(d) 標本点数が $N = 200$ の場合

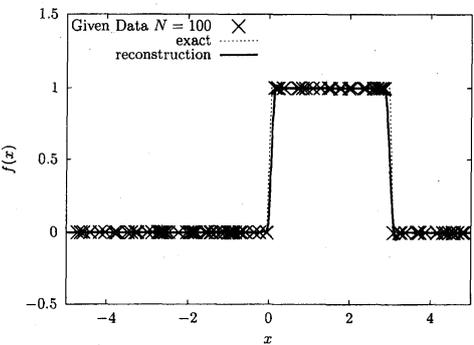
Fig 6: 不連続性をもつ階段函数 (例 4.3) の $H^1(\mathbb{R})$ での計算例



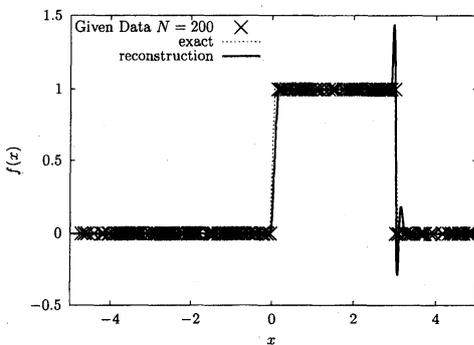
(a) 標本点数が $N = 10$ の場合



(b) 標本点数が $N = 50$ の場合

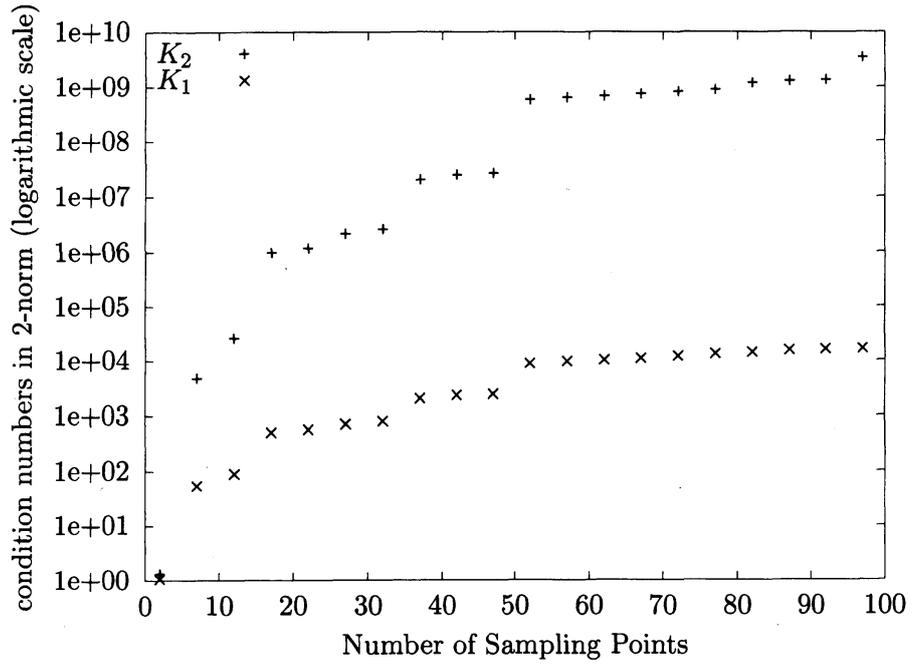


(c) 標本点数が $N = 100$ の場合

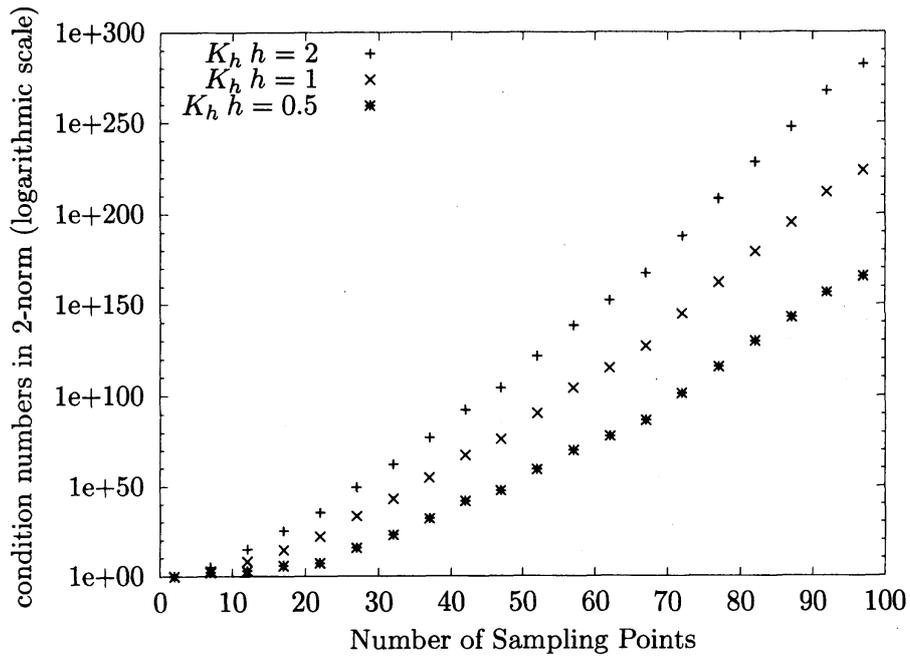


(d) 標本点数が $N = 200$ の場合

Fig 7: 不連続性をもつ階段函数 (例 4.3) の $H^2(\mathbb{R})$ での計算例

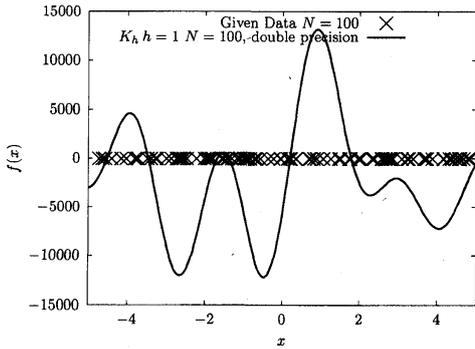


(a) Sobolev 空間の再生核函数の場合, \times : K_1 , $+$: K_2

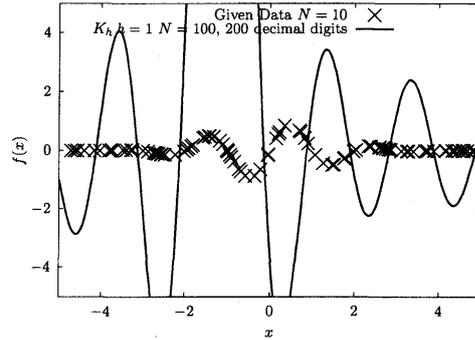


(b) Paley-Wiener 空間の再生核 K_h の場合, $*$: $h = 0.5$, \times : $h = 1$, $+$: $h = 2$

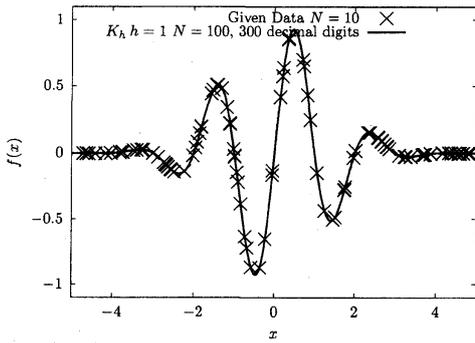
Fig 8: 行列 $(K(a_i, a_j))$ の 2-ノルムでの条件数



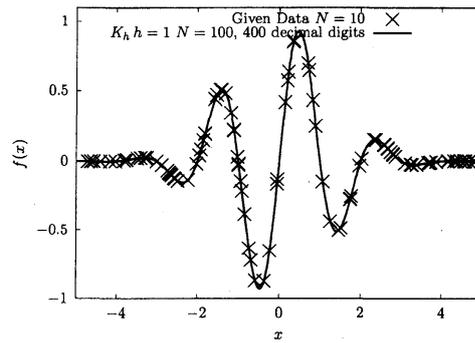
(a) 倍精度 (10 進約 16 桁) での計算結果



(b) 10 進 200 桁での計算結果

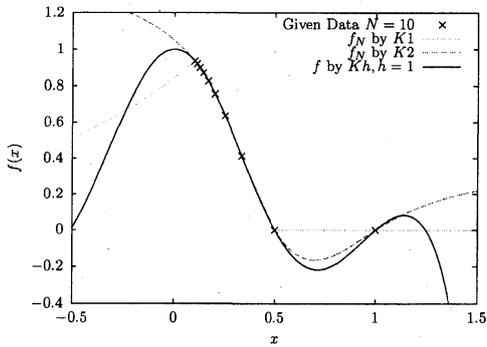


(c) 10 進 300 桁での計算結果

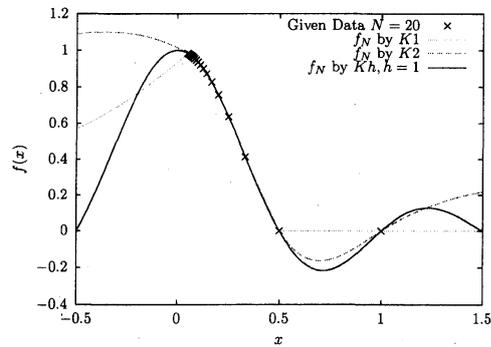


(d) 10 進 400 桁での計算結果

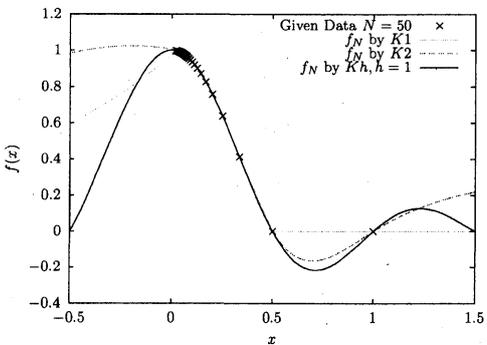
Fig 9: Paley-Wiener 空間で $N = 100$ とする場合に, 種々の計算精度での丸め誤差の影響



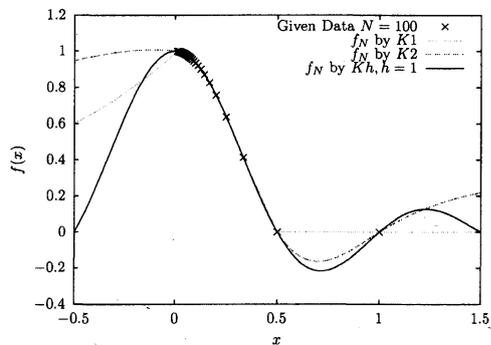
(a) 標本点数が $N = 10$ の場合



(b) 標本点数が $N = 20$ の場合



(c) 標本点数が $N = 50$ の場合



(d) 標本点数が $N = 100$ の場合

Fig 10: $f_N(x)$ が収束しない数値例, 点線: $H^1(\mathbb{R})$, 破線: $H^2(\mathbb{R})$, 実線: $W(\pi)$