数理解析研究所講究録
第1988巻 2016年 31-42

Variants of AC under ZF minus union

嘉田勝 (Masaru Kada)　　加藤匠人 (Takuto Kato)
大阪府立大学 (Osaka Prefecture University)

1 はじめに

ZF 集合論における和集合公理とは，任意の $\mathcal{F}$ に対して，$[\forall Y\,\forall x\,((x\in Y\wedge Y\in\mathcal{F})\rightarrow x\in A)]$ をみたす集合 A が存在することを主張する公理である．このとき A は $\bigcup\mathcal{F}$ を包含する集合であり，内包公理を使うことで $\bigcup\mathcal{F}$ が存在することを示せる．

ところで，ZFC 公理系から和集合公理を除いた公理系 ZFC $-$ U を考えると，この体系で和集合公理以外の公理を用いることで，どの程度，和集合の存在についての結果を再構築できるだろうか．Oman [2] は，ZFC $-$ U のもとでも，集合族 $\mathcal{F}$ の各要素の濃度に上限が存在すれば（このこと自体が，ZFC では自明だが ZFC $-$ U では自明でないことに注意せよ）和集合 $\bigcup\mathcal{F}$ が存在することを示した．これにより，たとえば2個の集合 A, B の和集合 $A\cup B$ は和集合公理を使わなくても構成できることがわかる．

Oman の論文に示されている結果の多くは選択公理に依存しているため，ZF から和集合公理を除いた体系 ZF $-$ U で同様の結果が同様の証明で成り立つことは期待できない．また，ZF $-$ U において「選択公理」とは何か，あるいは何であるべきかという問題が発生する．というのは，ZF 上では選択関数の存在公理，整列可能性定理，ツォルンの補題などは同値であることが証明できるので，どれを選択公理として採用しても等価な体系となるが，ZF $-$ U 上ではそれらの同値性自体が疑わしいからである．Oman の論文ではその点があいまいにされていて，選択公理として採用する命題の選び方によっては，論文中の証明のいくつかが破綻する可能性がある．これらの問題点を明らかにするためには，まず，ZF $-$ U を基礎理論と定めたときに，ZF 上では選択公理と同値な種々の命題相互の強弱関係がどうなっているかを調べ，そのうえで，Oman の論文に現れる証明を遂行するうえで適切な強さの「選択公理として採用すべき命題」を見出す必要がある．

Masaru Kada（嘉田勝）: email kada@mi.s.osakafu-u.ac.jp

本稿では，第 2 節で必要な諸定義や定理を示した後，第 3 節で ZF − U 上で 2 集合の和が条件付きで存在することを示す．第 4 節では，ZF − U 上で選択公理を少し弱めた公理として「集合族の和集合が存在するならば，その集合族の選択関数が存在する」という公理（もちろん ZF 上では通常の選択公理と同値）を導入し，これを UAC と名付ける．そして，ZF − U 上で UAC は整列公理やツォルンの補題などと同値であることを示し，ZF − U + UAC のもとでは 2 集合の和が存在することを示す．さらに，第 5 節では UAC と選択公理の中間に位置する公理 IAC を導入し，ZF − U + IAC のもとでは Oman の結果（集合族 $\mathcal{F}$ の各要素の濃度に上限が存在すれば $\bigcup\mathcal{F}$ が存在する）が証明できることを示す．

2　必要な諸定義・定理

本稿で用いる集合論についての用語記法は，特記のない限り [1] に従う．

定義 2.1. $\mathcal{F}$ を, 空集合を要素にもたない集合族とする.

- $\mathcal{F}$ の**選択集合** C とは, $C \subseteq \bigcup\mathcal{F}$ でありかつ, 各 $z \in \mathcal{F}$ に対して, $|C \cap z| = 1$ となる集合である.
- $\mathcal{F}$ の**選択関数** g とは, 定義域が $\mathcal{F}$ で, 各 $x \in \mathcal{F}$ に対して, $g(x) \in x$ となる関数である.

定義 2.2. 集合 A 上の二項関係 R が**半順序付け**であるとは, 以下の 2 条件を満たすことである;

(1) (**推移律**) 任意の $x, y, z \in A$ に対して, xRy または yRz ならば xRz
(2) (**非反射律**) 任意の $x \in A$ に対して, $x \not R x$

上記に加えて以下の条件も満たすとき, R は A の**全順序付け**であると言う;

(3) (**三分律**) 任意の $x, y \in A$ に対して, xRy, yRx, $x = y$ のいずれかが成り立つ.

集合論で関数（または写像）を表現する方法は 2 つある．1 つは論理式で表現する方法，もう 1 つは順序対の集合，すなわち直積の部分集合で表現する方法である．定義域が集合でない（プロパークラスである）関数は，論理式としては表現できるが，順序対の集合としては表現できない．また，ZF では置換公理のおかげで定義域が集合である関数は直積の部分集合で表現できるが，ZF − U を基礎理論とする場合は，後述の通り，集合の直積

自体が存在するとは限らないので，定義域が集合であっても，関数を論理式でしか表せないことが起こりうる．

定義 2.3. φ を，少なくとも 2 個の自由変数 x, y をもつ論理式とする．

- 任意の x に対して $\varphi(x, y)$ をみたす y がただひとつ存在するとき，φ は**関数を定義する論理式**であるという．また，論理式 φ をみたす順序対 (x, y) 全体からなるクラスを**クラス関数**と呼ぶことがある．
- **集合** a の任意の要素 x に対して $\varphi(x, y)$ をみたす y がただひとつ存在するとき，クラス $\{\langle x, y\rangle : x \in a \text{ かつ } \varphi(x, y)\}$ を集合 a からのクラス関数と呼ぶ．さらに，**集合** a, b について，a の各々の要素 x に対して，$\varphi(x, y)$ をみたすただひとつの y が b に属するとき，このクラスを集合 a から集合 b へのクラス関数と呼ぶ．

単射や全射といった概念は，クラス関数についても自然に定義できる．本稿では，クラス関数について単射，全射を考えるときは，それらを特にクラス単射，クラス全射と呼ぶ．

定義 2.4. 集合 a から集合 b へのクラス単射が存在することを $a \preceq^c b$ で表す．

ZF に含まれる公理図式である置換公理図式は，集合 a と，関数を定める論理式 φ があったとき，φ による a の像，すなわちクラス $\{y : \exists x \in a\, \varphi(x, y)\}$ が集合であるという公理である．言い換えると，定義域が集合であるクラス関数の像が集合であることは，置換公理で保証されている．

集合 x, y について，順序対の定義はクラトフスキ流の定義 $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ を採用する．この形の集合は対の公理により存在が保証される．しかし，集合 a, b の直積 $a \times b = \{\langle x, y\rangle : x \in a \wedge y \in b\}$ は，ZF 上では置換公理と和集合公理，もしくは冪集合公理と和集合公理を適用して構成されるため，ZF $-$ U 上では必ずしも集合として存在するとは限らない．

定義 2.5. a, b を集合，$a \times b$ は集合として存在するものと仮定する．$a \times b$ の部分集合 f が「各々の $x \in a$ に対して，$\langle x, y\rangle \in f$ となる $y \in b$ がただひとつ存在する」という性質をみたすとき，f を a から b への**関数**という．

集合としての関数をこのように定義したうえで，定義域の部分集合への関数の**制限**，**単射**，**全射**，**全単射**などという概念を通常どおり定義する．

定義 2.6. a から b への単射が存在することを $a \preceq b$ で表す．また，a から b への全単射が存在することを $a \approx b$ で表す．

補題 2.7 ([2, Lemma 2])**.** $\mathrm{ZF}-\mathrm{U} \vdash$ (任意の集合 a, b について，$a \cup \{b\}$ は存在する．)

証明. a, b を任意の集合とする．冪集合公理より，集合 $\mathcal{P}(a)$ が存在する．「$x = \{i\}$ なる $i \in a$ が存在すれば $y = i$，そうでなければ $y = b$)」を表す論理式を $\varphi(x, y)$ とすると，φ についての置換公理により $a \cup \{b\}$ が存在する． □

補題 2.7 は，ZF の無限公理を記述するという観点でも重要である．無限公理は通常は「$\emptyset \in x \wedge \forall y \in x\,(S(y) \in x)$ をみたす集合 x が存在する」という形で記述される．ただし $S(x) = x \cup \{x\}$ である．補題 2.7 は和集合公理を使わなくても $S(x)$ を構成できることを保証しているので，和集合公理のない体系でも，ZF の無限公理を通常と同様に記述してよいことがわかる．

定義 2.8. z が $\forall y \in z\,[y \subseteq z]$ をみたすとき，z は**推移的集合**であるという．これは $\forall x \forall y\,[x \in y \wedge y \in z \to x \in z]$ と同値である．

定義 2.9. 集合 A 上の二項関係 R が**整礎的**であるとは，空でない任意の $y \subseteq A$ に対して，関係 R についての y の極小要素 $x \in y$ が存在することをいう．

定義 2.10. 集合 A 上の二項関係 R が**整列順序付け**である（もしくは，$(A; R)$ が**整列順序集合**である）とは，以下の 2 条件を満たすことである．

(1) R が A の全順序付けである．
(2) R が A 上で整礎的である．

集合 A が何らかの二項関係によって整列順序付けられるとき，A を**整列可能集合**と呼ぶ．

定義 2.11. 集合 z が以下の 2 条件を満たすとき，**順序数**と呼ぶ．

(1) 二項関係 $\in$ が z の整列順序付けである．
(2) z は推移的集合である．

次の定理は，順序数の基本的な性質は $\mathrm{ZF}-\mathrm{U}$ の範囲で証明可能であることを示している．証明は，たとえば [1] に示されている通常の証明の議論をたどって，和集合公理に依存していないことを検証すればよい．

定理 2.12 ([2, Lemma 3])**.** α, β を順序数とする．$\mathrm{ZF}-\mathrm{U}$ から以下を証明できる．

(1) $\alpha \subsetneq \beta$ ならば，$\alpha \in \beta$.
(2) 自分自身を要素としてもつ順序数は存在しない．

(3) $\alpha \neq \beta$ ならば，$\alpha \in \beta$ または $\beta \in \alpha$ のどちらかが成り立つ．

(4) $\alpha \subseteq \beta$ または $\beta \subseteq \alpha$ のどちらかが成り立つ．

(5) 順序数の推移的部分集合は順序数である．

(6) 順序数の全ての要素は順序数である．

(7) $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ も順序数である（$\alpha + 1$ の存在は補題 2.7 で示した）．

3 ZF − U 上での和集合の存在条件

この節では，ZF − U において，集合の和集合が存在するための十分条件を示す．そのほか，2 集合の直積や，集合から集合への関数全体の集合の存在の十分条件も示す．

補題 3.1. ZF − U ⊢ (a, b が集合で $a \preceq^c b$ であれば，$a \times b$ および $b \times a$ は存在する．)

証明. a, b は $a \preceq^c b$ をみたす任意の集合の組とする．φ を a から b への単射を表す論理式とする．冪集合公理より，$\mathcal{P}(\mathcal{P}(b))$ は存在する．内包公理より，$(\varphi``a) \times b \ \big(\subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(b))\big)$ が存在する．置換公理によって $a \times b$ の存在が示せる．$b \times a$ についても同様． □

系 3.2. ZF − U ⊢ ($a \preceq^c b$ と $a \preceq b$ は同値である．)

証明. φ を集合 a から集合 b への単射を表す論理式とする．補題 3.1 より，$a \times b$ が存在する．すると，φ が表す単射は，分出公理によって，順序対の集合としての関数 $\{\langle x, y\rangle \in a \times b : \varphi(x, y)\}$ で表現できる．逆は易しい． □

これ以後，ZF − U 上での議論では，$\preceq^c$ という記号は使用せず $\preceq$ に統一する．

補題 3.3. ZF − U ⊢ (a, b が集合で，$a \preceq b$ もしくは $b \preceq a$ とすると，${}^a b = \{f :$ f は a から b への関数 $\}$ は集合である．)

証明. a, b を，$a \preceq b$ もしくは $b \preceq a$ をみたす集合とする．補題 3.1 より，直積集合 $a \times b$ が存在する．冪集合公理より $\mathcal{P}(a \times b)$ が存在する．ここで，a から b への個々の関数 f は $a \times b$ の部分集合であるから，${}^a b \subseteq \mathcal{P}(a \times b)$ であり，内包公理を用いてこの集合を構成できる． □

定理 3.4. ZF − U ⊢ (a, b が集合で $a \preceq b$ ならば，a, b の和集合 $a \cup b$ が存在する．)

証明. a, b が集合で $a \preceq b$ であると仮定する．$b = \varnothing$ の場合は明らかである．$b \neq \varnothing$ と仮定して，$p \in b$ を任意にとって固定する．補題 3.1 より，$a \times b$ は存在する．$\varphi(x, y)$ を，

「$x = \langle i, j\rangle \in a \times b$ かつ ($j = p$ ならば $y = i$) かつ ($j \neq p$ ならば $y = j$)」を表す論理式として，φ についての置換公理を用いると $a \cup b \setminus \{p\}$ を構成できる．さらに，補題 2.7 から $a \cup b$ を構成できる． □

4 UAC と同値な命題

前節で観察したとおり，ZF − U 上では，2 つの集合 a, b の和集合 $a \cup b$ ですら，条件をつけなければ存在を証明することは難しい．一方，ZFC − U のもとでは，集合族 $\mathcal{F}$ の要素の濃度に上限があれば $\bigcup\mathcal{F}$ が存在することは Oman が示している [2, Theorem 3]．そこで，ZF − U に AC を弱めた公理を付け加えることで，和集合の存在の十分条件を ZF − U のときよりも緩めることを考える．

ところで，ZF − U を基礎理論とすると，ZF 上で AC と同値である種々の命題が，ZF − U 上でもなお同値かどうか明らかでないので，まず，ZF − U を基礎理論として議論するときに「何をもって『選択公理』とするのか」を見極めなければならない．そのために，ZF − U のもとで，選択公理に関連する命題相互の強弱関係を調べることから始める必要がある．

この節では，この直後に定義する，AC を弱めた命題 UAC を「ZF − U を基礎理論とするときの選択公理のオルタナティブ」の有力な候補と位置づけ，ZF − U に UAC を付け加えた公理系について考察する．

今後，理論 ZF − U を T で表す．

定義 4.1. $\mathcal{F}$ は空集合を要素にもたない集合族を表すとする．

AC　$\mathcal{F}$ の選択関数が存在する．

UACS　$\mathcal{F}$ が互いに交わらない集合族で，$\bigcup\mathcal{F}$ が存在するならば，$\mathcal{F}$ の選択集合が存在する．

UAC　$\bigcup\mathcal{F}$ が存在するならば，$\mathcal{F}$ の選択関数が存在する．

PAC　任意の集合 X について，$\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ の選択関数が存在する．

IAC　集合 Y が存在して，すべての $X \in \mathcal{F}$ について $X \preceq Y$ が成立するならば，$\mathcal{F}$ の選択関数が存在する．

次のふたつの命題を考察の対象にするには，集合の濃度が適切に定義できることが前提となる．

定義 4.2. 次のとおり定義する.

BAC　$\{|x| : x \in \mathcal{F}\}$ が上界をもつならば，$\mathcal{F}$ の選択関数が存在する.
BU　$\{|x| : x \in \mathcal{F}\}$ が上界を持つならば，$\bigcup \mathcal{F}$ が存在する.

次の補題の証明は易しい.

補題 4.3. T $\vdash$ (UAC，UACS，PAC は互いに同値である.)

次の定理の ZFC での通常の証明では超限帰納法を用いる. 超限帰納法では極限順序数ステップで「それまでに構成された部分全体の和をとる」操作をするのが自然だが，和集合公理を除いた集合論ではそれができないので，和集合公理の使用を巧みに回避しながら同様の議論を構築する必要がある. 次の定理は，その回避策をとるには PAC があれば足りることを示している.

定理 4.4 ([2, Proposition 1]). T + PAC $\vdash$（すべての集合は何らかの順序数と濃度が等しい.)

証明. X を任意の集合とする. 順序数 γ と全単射 $F : X \to \gamma$ が存在することを示せばよい. G を $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ の選択関数とする.

関数 f について，f の定義域が順序数，f の値域が X の部分集合で，かつ，すべての $i \in \operatorname{dom} f$ に対して $f(i) = G(X \setminus \{f(j) : j \in i\})$ であるとき，f は acceptable であるということにする. このとき，次の 4 つの主張が示せる.

主張 1. f, g が acceptable で，$i \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ のとき，$f(i) = g(i)$ である.
証明. $f(i) \neq g(i)$ となる，acceptable な関数 f, g と $i \in \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ が存在したとする. i は順序数なので，最小のものを選ぶ. すると，acceptable の定義と i の最小性から，$f(i) = G(X - \{f(j) : j \in i\}) = G(X \setminus \{g(j) : j \in i\}) = g(i)$ となる. これは矛盾である.

主張 2. f が acceptable で，$i, j \in \operatorname{dom} f$，$i \neq j$ ならば，$f(i) \neq f(j)$ である. すなわち f は単射である.
証明. $i, j \in \operatorname{dom} f$ は順序数で $i \neq j$ なので，定理 2.12(3) より，$i \in j$ または $j \in i$ である. $i \in j$ として一般性を失わない. f が acceptable なので $f(j) = G(X \setminus \{f(x) : x \in j\})$ である. $i \in j$ より $f(i) \neq f(j)$ である.

主張 3. $x \in X$ が，ある acceptable な関数 f の値域に属するとき，x は special であるということにする. x が special であれば，x を値域にもつ acceptable な関数 f に

対して，$f(\alpha_x) = x$ となる α_x はただ一つ存在する．

証明．α_x の存在は x が special であることの定義そのものである．一意性を示す．ある順序数 α, β と acceptable な関数 f, g に対して $f(\alpha) = x$ かつ $g(\beta) = x$ と仮定する．$\mathrm{dom}\, f$ と $\mathrm{dom}\, g$ は順序数なので，定理 2.12(3) より，$\mathrm{dom}\, f \subseteq \mathrm{dom}\, g$ または $\mathrm{dom}\, g \subseteq \mathrm{dom}\, f$ である．$\mathrm{dom}\, f \subseteq \mathrm{dom}\, g$ と仮定して一般性を失わない．主張 1 より，$i \in \mathrm{dom}\, f$ に対して $f(i) = g(i)$ である．したがって $f \subseteq g$ である．このことから，$g(\alpha) = f(\alpha) = x = g(\beta)$ となり，主張 2 より $\alpha = \beta$ である．

主張 4. x, y が special で $x \neq y$ ならば $\alpha_x \neq \alpha_y$ である．

証明．対偶を示す．$\alpha_x = \alpha_y$ とする．x, y は special なので，$f(\alpha_x) = x$ かつ $g(\alpha_y)(= g(\alpha_x)) = y$ となる acceptable な関数 f, g が存在する．$\alpha_x \in \mathrm{dom}\, f \cap \mathrm{dom}\, g$ なので，主張 1 より $f(\alpha_x) = g(\alpha_x)$ である．ゆえに $x = y$ である．

$S = \{x \in X : x$ は special$\}$ とする．置換公理により，$F = \{\langle \alpha_x, x\rangle : x \in S\}$ は集合である．主張 4 より．この F は関数になっている．置換公理により，$D = \mathrm{dom}\, F = \{\alpha_x : \exists x(\langle \alpha_x, x\rangle \in F)\}$ も集合である．ここで，F が acceptable であることを示すために，D が順序数であることを示す．$\alpha \in \beta \in D$ とする．$\beta \in D$ より，acceptable な関数 f で $f(\beta) \in X$ となるものが存在する．$\alpha \in \beta$ および f が acceptable であることの定義から，$\mathrm{dom}\, f$ は順序数であり，それゆえ推移的である．したがって，$\alpha \in \mathrm{dom}\, f$ で $f(\alpha) \in X$ である．よって $\alpha \in D$ となり，D は推移的集合である．D は順序数からなる集合なので，$\in$ 関係で全順序づけられている．したがって D は順序数である．

最後に，$S = X$ を背理法で示す．$S \subsetneq X$ と仮定する．補題 2.7 より，$F \cup \{(D, G(X \setminus S))\}$ は集合であり，$D \notin D(= \mathrm{dom}\, F)$ より，これは関数である．さらに $F \cup \{(D, G(X \setminus S))\}$ は acceptable で，special の定義から，$G(X \setminus S) \in S$ となる．これは G が選択関数である（つまり $G(X \setminus S) \in X \setminus S$ でなければならない）ことと矛盾する．したがって $S = X$ である．

以上のことと主張 3 より，F は順序数から X への全単射である． □

整列可能集合については，上記と同様の証明により，UAC を使うことなく，その順序型（順序同型な順序数）が存在することが容易に示せる．

定理 4.5. T $\vdash$（集合 A 上の 2 項関係 R が A の整列順序付けであるとき，$(A; R) \approx (\alpha; \in)$ となる順序数 α が存在する．）

系 4.6. T $\vdash$（集合 A と順序数 α について，$A \preceq \alpha$ のとき，$A \approx \delta$ となる順序数 $\delta \leq \alpha$ が存在する．）

整列順序集合 $(A; R)$ の順序型を $\mathrm{type}(A; R)$ で表す.

ここで，ZF 上で AC と同値な命題の多くが，ZF − U 上では UAC と同値であることを観察する.

定義 4.7. $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ が,「$X \subseteq A$ に対して,『$X \in \mathcal{F} \Leftrightarrow X$ の任意の有限部分集合が $\mathcal{F}$ に属する』」という条件をみたすとき，$\mathcal{F}$ は**有限特性**をもつという.

有限特性をもつ集合族は，部分集合 $\subseteq$ について下に閉じた族となる.

補題 4.8. $\mathcal{F}$ が有限特性をもち，$X \in \mathcal{F}$ かつ $Y \subseteq X$ のとき，$Y \in \mathcal{F}$ である.

定義 4.9. $(X; <)$ を半順序集合とする.

- $C \subseteq X$ が $<$ についての全順序集合であるとき，C を X の**鎖**という.
- 鎖 $C \subseteq X$ を真に包含する X の鎖 $D \supsetneq C$ が存在しないとき，C を X の**極大鎖**という.
- すべての鎖 $C \subseteq X$ が上に有界である（すなわち，すべての $x \in C$ に対して $x \leq b$ となるような $b \in X$ が存在する）とき，X は**帰納的**な半順序集合であるという.

定理 4.10. 理論 $\mathrm{T} = \mathrm{ZF} - \mathrm{U}$ において，下記の命題はすべて同値である.

(1) UACS.
(2) UAC.
(3) PAC.
(4) (整列定理) すべての集合は整列可能集合である.
(5) (テューキーの補題) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ (ただし $\mathcal{F} \neq \varnothing$) が有限特性をもつならば, $(\mathcal{F}; \subsetneq)$ は極大元をもつ.
(6) (ハウスドルフの極大性原理) いかなる半順序集合 $(X; <)$ にも極大鎖 $C \subseteq X$ が存在する.
(7) (ツォルンの補題) 空でないすべての帰納的半順序集合は極大元をもつ.

証明.（概略）(1)⇔(2)⇔(3) は補題 4.3 で観察した．(4)⇒(5) および (5)⇔(6)⇔(7) は，ZF 上での一般的な証明（たとえば [1, Section I.12]）が和集合公理に依存していないことが確かめられる．(5)⇒(1) は，ZF 上での一般的な「テューキーの補題 ⇒ 選択公理」の証明では選択の対象となる集合族の和集合を作ることから始まるところを，UAC の場合は和集合の存在を前提としているので，和集合公理の使用を避けられる．最後に，(3)⇒(4) では超限帰納法を用いるが，そこでは，定理 4.4 の証明と同様の手法を用いて和集合公理

の使用を回避すればよい. □

注意を要するのは濃度の比較可能定理である. ZF では濃度の比較可能定理が AC と同値であることはよく知られている. また,「整列定理 $\Rightarrow$ 濃度の比較可能定理」は和集合公理と無関係にたやすく証明できる (両方の集合を整列して順序型を比べる). いっぽう,「濃度の比較可能定理 $\Rightarrow$ 整列定理」の (ZF のもとでの) 知られている証明 (たとえば [1, Section I.12]) では, 次に示すハルトークスの定理を用いて, 整列すべき集合 X とそれ自身のハルトークスのアレフ $\aleph(X)$ (次の定理で X に対しての witness となる κ のうち最小の基数) の濃度を比較することで X を整列している.

定理 4.11 (Hartogs, 1915 [1, Theorem I.11.26]). ZF $\vdash$ (任意の集合 X に対して, $\kappa \not\preceq X$ となる基数 κ が存在する.)

ところが, ハルトークスの定理の証明には和集合公理が本質的に使われており, これを回避する方法は見つかっていない. したがって, ZF $-$ U のもとでは, 濃度の比較可能定理は UAC より真に弱い可能性を否定できない.

定理 4.12. T + UAC $\vdash$ (任意の 2 集合は濃度が比較可能である, すなわち $\forall x, y\,[x \preceq y \vee y \preceq x]$ である.)

定理 4.13. 命題「任意の集合 X に対して, $\kappa \not\preceq X$ となる基数 κ が存在する」を HA で表す. このとき, T + HA $\vdash$ (「任意の 2 集合は濃度が比較可能」$\Rightarrow$ UAC) である.

蛇足ながら, T + UAC のもとでは HA は容易に証明できる.

定理 4.14. T + UAC $\vdash$ (任意の集合 X, Y について, $X \cup Y$, $X \times Y$, ${}^{X}Y$ は存在する.)

証明. 定理 4.12 によって, $X \preceq Y$ または $Y \preceq X$ のどちらかが成り立つので, 定理 3.4 から $X \cup Y$ が, 補題 3.1 から $X \times Y$ が, 補題 3.3 から ${}^{X}Y$ が存在することが示せる. □

系 4.15. T+UAC $\vdash$ (任意の有限個の集合 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ について, $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_n$ が存在する.)

このように, T + UAC を基礎理論として採用すると, 2 個の集合の和集合が自由にとれるほか, 直積 $X \times Y$ や関数の集合 ${}^{X}Y$ を作る操作が自由にできるようになり, 安定した理論を構築できる. このことは, ZF から和集合公理を除いた体系では UAC が選択公理のオルタナティブとして重要な位置を占める可能性を示唆している.

5 命題 BU を証明可能な公理系

Oman が示した結果のひとつは，ZFC − U のもとで命題 BU（定義 4.2）が証明できることだった [2, Theorem 3]．この節では，BU を証明するために ZF − U に追加すべき AC のフラグメントは何かを考える．UAC はその有力な候補のひとつだが，残念ながら UAC で足りるかどうかは今のところ未解決である．

問題 5.1. T + UAC $\vdash$ BU か？

この節では，BAC を見かけ上強めた IAC を ZF − U に追加すれば，Oman の論文と同じ議論で BU が証明できることを示す．

補題 5.2. T $\vdash$ （任意の集合 X, Y （ただし $X \neq \varnothing$）に対して，X から Y への単射が存在すれば Y から X への全射が存在する．）

証明は ZF における証明と同じである．ちなみに，この命題の逆は T のもとでは（ZF のもとでさえ）証明できないことが知られているが，T + UAC のもとで証明できる．

定理 5.3. T + IAC $\vdash$ （集合族 $\mathcal{F}$ について，$\{|a| : a \in \mathcal{F}\}$ に上界が存在するならば，$\bigcup \mathcal{F}$ は存在する．）

証明. $\mathcal{F}$ は集合族で $\{|a| : a \in \mathcal{F}\}$ に上界が存在すると仮定する．$\varnothing \notin \mathcal{F}$ と仮定して差し支えない．$\{|a| : a \in \mathcal{F}\}$ の上界のひとつを γ とすると，任意の $a \in \mathcal{F}$ に対して $|a| \leq \gamma$，したがって $a \preceq \gamma$ となる．補題 5.2 より，$\{a\} \times \gamma$ から a への全射が存在する．各 $a \in \mathcal{F}$ に対して，そのような全射の全体からなる集合を S_a とする．補題 4.14 と内包公理より，S_a は集合であり，さらに置換公理より $\{S_a : a \in \mathcal{F}\}$ も集合である．ここで $\{S_a : a \in \mathcal{F}\}$ について IAC を適用できる（IAC の定義で $Y =^{\gamma} \gamma$ とすればよい）．IAC によって得られた選択関数によって，各 S_a から全射 $G_a : a \times \gamma \to a$ を 1 個ずつ選び出す．論理式 $P(c, d)$ を「ある $a \in x$ と $i \in \gamma$ について $c = \langle a, i \rangle$ かつ $d = G_a(c)$」を表す論理式とすると，補題 4.14 より $\mathcal{F} \times \gamma$ が集合なので，置換公理から $\bigcup \mathcal{F}$ は集合である． □

参考文献

[1] K. Kunen. *The Foundation of Mathematics*, Vol. 19 of *Studies in Logic*. College Publications, 2009.

[2] G. Oman. On the axiom of union. *Arch. Math. Logic*, Vol. 49, pp. 283–289, 2010.