数理解析研究所講究録
第2008巻 2016年 72-80

Morita equivalence in ring extension and congruence of functors

岡山大学・大学院自然科学研究科　池畑 秀一 (Shûichi IKEHATA)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

岡山大学・大学院自然科学研究科　山中 聡 (Satoshi YAMANAKA)
Graduate School of Natural Science and Technology
Okayama University

岡山県立大学・情報工学部　小松 弘明 (Hiroaki KOMATSU)
Faculty of Computer Science and System Engineering
Okayama Prefectural University

Abstract

宮下庸一が環拡大の世界に森田同値の概念を導入し，G-ガロア拡大とフロベニウス拡大が森田不変であることを証明して以来，第一筆者と第二筆者は様々な環拡大が森田不変であることを示してきた．第二筆者と第三筆者は圏論的な枠組みを構築して環拡大以外にも通用できる理論にした．本論分では環拡大の森田同値の理論について，圏論からの視点と環論からの視点の両者を紹介する．

1　序

二つの環 A, A' の上の左加群の圏 A-**Mod**, A'-**Mod** が圏同値であるかどうかは森田加群が存在するかどうかで決定される．A-A'-加群 M が森田加群であるとは，M が有限生成射影生成 A-加群であり，$\mathrm{End}({}_AM) \simeq A'$ が成り立つときにいう．宮下庸一は環のガロア拡大の理論を構築するに際し，[5] において環拡大の森田同値の概念を導入した．

定義 1.1. 環拡大 A/B, A'/B' あるいは環準同型写像 $\rho : B \to A$, $\rho' : B' \to A'$ について，森田加群 ${}_AM_{A'}$ および ${}_BN_{B'}$ が存在して ${}_AA \otimes_B N_{B'} \simeq {}_AM_{B'}$ が成り立つとき，$A/B \sim A'/B'$ あるいは $\rho \sim \rho'$ で表し，A/B と A'/B' は**森田同値**あるいは ρ と ρ' は**森田同値**であるという．

[5, Proposition 3.2] において，定義 1.1 の $\sim$ は同値関係であることが示されている．

例 1.2. 環拡大 A/B について，A および B 上の n 次行列環をそれぞれ $\mathrm{M}_n(A)$, $\mathrm{M}_n(B)$ とすれば，$A/B \sim \mathrm{M}_n(A)/\mathrm{M}_n(B)$ が成り立つ．なぜならば，${}_AA^n_{\mathrm{M}_n(A)}$, ${}_BB^n_{\mathrm{M}_n(B)}$ は森田加群であり，${}_AA \otimes_B B^n_{\mathrm{M}_n(B)} \simeq {}_AA^n_{\mathrm{M}_n(B)}$ であるから．

本研究は科研費 (基盤研究 (C) 234540049) の助成を受けたものである．

宮下は有限群 G に対する G-ガロア拡大が森田不変であることを示した．ここでいう不変とは，G-ガロア拡大に森田同値な環拡大はすべて G-ガロア拡大であることを指す．さらに一般的にフロベニウス拡大も森田不変であることを示した．本論分の第一筆者はその理論を発展させて，[2] において分離拡大，平田分離拡大，symmetric 拡大，および QF-拡大が森田不変であることを示した．第二筆者はその研究を引き継ぎ，[9] において trivial 拡大，liberal 拡大，depth two 拡大，強分離拡大，および弱分離拡大が森田不変であることを示した．さらに第二筆者と第三筆者は [4] において，環拡大の森田同値の概念を一般の圏にまで拡張した．その観点から環拡大の森田同値の理論について新たな発見があった．

本論文はこれらの結果を紹介するものである．

2 合同な関手

環準同型写像 $\rho : B \to A$ と $\rho' : B' \to A'$ が森田同値だとする．森田加群 ${}_AM_{A'}$, ${}_BN_{B'}$ は圏同値 $S = - \otimes_A M : \mathbf{Mod}\text{-}A \to \mathbf{Mod}\text{-}A'$ と $T = - \otimes_B N : \mathbf{Mod}\text{-}B \to \mathbf{Mod}\text{-}B'$ を与える．係数環を制限する関手 $\rho_* : \mathbf{Mod}\text{-}A \to \mathbf{Mod}\text{-}B$ と $\rho'_* : \mathbf{Mod}\text{-}A' \to \mathbf{Mod}\text{-}B'$ を用いれば，条件 ${}_AA \otimes_B N_{B'} \simeq {}_AM_{B'}$ は $T\rho_* \simeq \rho'_*S$ と書き換えることができる．この事実を一般的に考察するために，[4] において次の定義を与えた．

定義 2.1. 関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ と $F' : \mathbf{C}' \to \mathbf{D}'$ について，圏同値 $S : \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$, $T : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ で $TF \simeq F'S$ なるものが存在するとき，F と F' は合同であるといい，$F \equiv_{S,T} F'$ 又は $F \equiv F'$ で表す．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ {\scriptstyle S}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T} \\ \mathbf{C}' & \xrightarrow[F']{} & \mathbf{D}' \end{array}$$

$F \equiv_{S,T} F'$ のとき，S の準逆関手 $S' : \mathbf{C}' \to \mathbf{C}$ を用いると，$F' \simeq TFS'$ が成り立つから，F の圏論的な性質は F' でも保存される．

まずは一般的な事柄として，随伴関手についての結果を示す．

定理 2.2. [4, Theorem 2.5]　$F \equiv_{S,T} F'$ のとき，次が成り立つ．

(1) F が右随伴関手をもてば F' も右随伴関手をもつ．また，G が F の右随伴関手のとき，G' が F' の右随伴関手であるためには，$G \equiv_{T,S} G'$ が成り立つことが必要十分である．

(2) F が左随伴関手をもてば F' も左随伴関手をもつ．また，G が F の左随伴関手のとき，G' が F' の左随伴関手であるためには，$G \equiv_{T,S} G'$ が成り立つことが必要十分である．

次に関手の間の自然変換の対応について述べる．この結果は環拡大の森田同値の理論において種々の環同型や加群の同型を導くために用いることができる．圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への関手 F と G について，F から G への自然変換の全体を $\mathrm{Nat}(F, G)$ で表す．

定理 2.3. [4, Theorem 2.7]　$F \equiv_{S,T} F'$, $G \equiv_{S,T} G'$, $H \equiv_{S,T} H'$ のとき，1 対 1 対応 $\Phi : \mathrm{Nat}(F, G) \to \mathrm{Nat}(F', G')$, $\Psi : \mathrm{Nat}(G, H) \to \mathrm{Nat}(G', H')$, $\Theta : \mathrm{Nat}(F, H) \to$

$\mathrm{Nat}(F', H')$ が存在して，任意の $\alpha \in \mathrm{Nat}(F, G)$, $\beta \in \mathrm{Nat}(G, H)$ に対して，$\Theta(\beta\alpha) = \Psi(\beta)\Phi(\alpha)$ が成り立つ.

次に分離関手と半単純関手を取り上げる．関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が**分離関手**とは，自然変換 $\Phi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}\big(F(-), F(-)\big) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, -)$ で $\Phi_{X,Y}\big(F(f)\big) = f$ が $\mathbf{C}$ のすべての射 $f : X \to Y$ に対して成り立つことである．また，アーベル圏の間の加法的関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が**半単純関手**とは，$\mathbf{C}$ の分裂しない完全列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ に対して常に $0 \to F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \to 0$ も分裂しないことである．環準同型写像 $\rho : B \to A$ から導かれる係数環を制限する関手 $\rho_* : \mathbf{Mod}\text{-}A \to \mathbf{Mod}\text{-}B$ を考えたとき，[7, Proposition 1.3] により，A/B が分離拡大であることと ρ_* が分離関手であることとは同値である．また，A/B が半単純拡大 ([1]) であることは ρ_* が半単純関手であることに他ならない.

定理 2.4. [4, Theorem 3.1]　分離関手に合同な関手は分離関手である.

定理 2.5. [4, Theorem 3.6]　半単純関手に合同な加法的関手は半単純関手である.

3　圏論から見た環拡大の森田同値

この節では関手の合同の観点から環拡大の森田同値を捉える．環準同型写像 $\rho : B \to A$ が与えられたとき，右加群の圏 $\mathbf{Mod}\text{-}A$ と $\mathbf{Mod}\text{-}B$ の間に標準的な 3 個の関手が得られる．係数環を制限する関手 $\rho_* : \mathbf{Mod}\text{-}A \to \mathbf{Mod}\text{-}B$, $\rho^* = - \otimes_B A : \mathbf{Mod}\text{-}B \to \mathbf{Mod}\text{-}A$, $\rho^\dagger = \mathrm{Hom}(A_B, (-)_B) : \mathbf{Mod}\text{-}B \to \mathbf{Mod}\text{-}A$ である．ρ^* は ρ_* の左随伴関手であり，$\rho^\dagger$ は ρ_* の右随伴関手である．同様に左加群についての関手 ${}_*\rho : A\text{-}\mathbf{Mod} \to B\text{-}\mathbf{Mod}$, ${}^*\rho = A \otimes_B - : B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$, ${}^\dagger\rho = \mathrm{Hom}({}_BA, {}_B(-)) : B\text{-}\mathbf{Mod} \to A\text{-}\mathbf{Mod}$ を得る.

定理 3.1. [4, Theorem 4.1]　環準同型写像 $\rho : B \to A$, $\rho' : B' \to A'$ について次は同値である.

(1) $\rho \sim \rho'$　(2) $\rho^* \equiv \rho'^*$　(3) $\rho_* \equiv \rho'_*$　(4) $\rho^\dagger \equiv \rho'^\dagger$
(5) ${}^*\rho \equiv {}^*\rho'$　(6) ${}_*\rho \equiv {}_*\rho'$　(7) ${}^\dagger\rho \equiv {}^\dagger\rho'$

この定理から直ちに次の結果を得る.

系 3.2. [4, Corollary 4.2]　環準同型写像 $\rho : B \to A$ について，以下の性質はすべて森田不変である.

(1) A は有限生成右 B-加群　(2) A は有限表現右 B-加群
(3) A は射影右 B-加群　(4) [2, Lemma 1]　A は生成右 B-加群
(5) A は平坦右 B-加群　(6) ρ は環の圏における全射
(7) [5, Proposition 3.10]　A/B はフロベニウス拡大
(8) [2, Theorem 5]　A/B は分離拡大　(9) A/B は半単純拡大

証明. (1) $\sim$ (4) は $\rho^\dagger$ の性質，(5) は ${}^*\rho$ の性質だからである．

[8, Chap. XI, Proposition 1.2] より，ρ が環の圏において全射であることと ρ_* が充満関手であることは同値であるから (6) を得る．

[6, Theorem 5.1] より，A/B がフロベニウス拡大であることと ρ^* が ρ_* の右随伴関手であることとは同値であるから，定理2.2より (7) を得る．

(8) は定理2.4による．

(9) は定理2.5による． □

森田同値な環は中心が同型である．森田同値な環拡大についてこれに相当する事実を示すために，次の補題を準備する．特に補題3.3 (1) から森田同値な環の中心が同型であることが導かれる．なお，環 A の部分集合 X に対して $V_A(X) = \{a \in A \mid ax = xa \ (\forall x \in X)\}$ とおき，両側 A-加群 S に対して $S^A = \{s \in S \mid as = sa \ (\forall a \in A)\}$ とおく．

補題 3.3. 環準同型写像 $\rho : B \to A$ について以下が成り立つ．

(1) $\mathrm{Nat}(I_{\mathbf{Mod}\text{-}A},\ I_{\mathbf{Mod}\text{-}A}) \simeq \mathrm{End}({}_AA_A) \simeq V_A(A)$　環同型

(2) $\mathrm{Nat}(\rho_*,\ \rho_*) \simeq \mathrm{End}({}_AA_B) \simeq V_A(B)^{op}$　環同型

(3) $\mathrm{Nat}(\rho^*,\ \rho^*) \simeq \mathrm{End}({}_BA_A) \simeq V_A(B)$　環同型

(4) $\mathrm{Nat}(\rho^*\rho_*,\ I_{\mathbf{Mod}\text{-}A}) \simeq \mathrm{Hom}({}_AA \otimes_B A_A,\ {}_AA_A) \simeq V_A(B)$

(5) $\mathrm{Nat}(I_{\mathbf{Mod}\text{-}A},\ \rho^*\rho_*) \simeq \mathrm{Hom}({}_AA_A,\ {}_AA \otimes_B A_A) \simeq (A \otimes_B A)^A$

(6) $\mathrm{Nat}(\rho^*\rho_*,\ \rho^*\rho_*) \simeq \mathrm{End}({}_AA \otimes_B A_A) \simeq (A \otimes_B A)^B$

(7) $\mathrm{Nat}(\rho_*\rho^*,\ I_{\mathbf{Mod}\text{-}B}) \simeq \mathrm{Hom}({}_BA_B,\ {}_BB_B)$

(8) $\mathrm{Nat}(I_{\mathbf{Mod}\text{-}B},\ \rho_*\rho^*) \simeq \mathrm{Hom}({}_BB_B,\ {}_BA_B) \simeq V_A(B)$

(9) $\mathrm{Nat}(\rho_*\rho^*,\ \rho_*\rho^*) \simeq \mathrm{End}({}_BA_B)$　環同型

次の結果は補題3.3および定理2.3から直ちに導かれる．

命題 3.4. 環準同型写像 $\rho : B \to A$ と $\rho' : B' \to A'$ が森田同値ならば，次が成り立つ．

(1) $V_A(B) \simeq V_{A'}(B')$　環同型

(2) $(A \otimes_B A)^A \simeq (A' \otimes_{B'} A')^{A'}$

(3) $(A \otimes_B A)^B \simeq (A' \otimes_{B'} A')^{B'}$

(4) $\mathrm{Hom}({}_BA_B,\ {}_BB_B) \simeq \mathrm{Hom}({}_{B'}A'_{B'},\ {}_{B'}B'_{B'})$

(5) $\mathrm{End}({}_BA_B) \simeq \mathrm{End}({}_{B'}A'_{B'})$　環同型

4　環論から見た環拡大の森田同値

前節では圏論の視点から導かれる環拡大の森田同値の理論について述べた．本節以降では環論による環拡大特有の理論について述べる．定義1.1における M と N のかかわりには左 A-加群構造のみ現れて右 A'-加群構造は現れない．しかし，実際には対称性が保証されている．次の補題がそれを示している．

補題 4.1. [5, Lemma 3.1] $\rho : B \to A$, $\rho' : B' \to A'$ を環準同型写像とする．森田加群 ${}_AM_{A'}$, ${}_BN_{B'}$ が ${}_AA \otimes_B N_{B'} \simeq {}_AM_{B'}$ を満たすとする．この同型対応は準同型写像 $\nu : {}_BN_{B'} \to {}_BM_{B'}$ を用いて $a \otimes n \mapsto a\nu(n)$ と表すことができるが，${}_BN \otimes_{B'} A' \simeq {}_BM_{A'}$ が対応 $n \otimes a' \mapsto \nu(n)a'$ によって得られる．また，$\operatorname{Ker}\nu = (\operatorname{Ker}\rho)N = N(\operatorname{Ker}\rho')$ が成り立つ．

森田同値な環の間には両側イデアルの間に 1 対 1 対応が存在する．森田同値な環拡大の間には部分加群や中間環の間に 1 対 1 対応が存在する．環拡大 A/B に対して，A の B-B-部分加群の全体を $\mathfrak{R}(A/B)$ で表す．また，$X \in \mathfrak{R}(A/B)$ で $XY = B = YX$ なる $Y \in \mathfrak{R}(A/B)$ を有するものの全体を $\mathfrak{G}(A/B)$ で表す．さらに，A/B の中間環の全体を $\mathfrak{I}(A/B)$ で表す．

命題 4.2. [5, Proposition 3.3] 環拡大 A/B と A'/B' が森田同値ならば，包含関係に関する順序同型写像 $(-)' : \mathfrak{R}(A/B) \to \mathfrak{R}(A'/B')$ が存在して，以下の性質をみたす．

(1) すべての X, $Y \in \mathfrak{R}(A/B)$ に対して $(XY)' = X'Y'$

(2) 森田加群 ${}_AM_A$, ${}_BN_B$ が ${}_AA \otimes_B N_{B'} \simeq {}_AM_{B'}$ をみたすとき，この同型による N の像を $\overline{N}$ とすれば，すべての $X \in \mathfrak{R}(A/B)$ に対して $X\overline{N} = \overline{N}X'$ が成り立つ．

(3) $(-)'$ は群同型写像 $\mathfrak{G}(A/B) \to \mathfrak{G}(A'/B')$ を導く．

(4) $(-)'$ は 1 対 1 対応 $\mathfrak{I}(A/B) \to \mathfrak{I}(A'/B')$ を導く．

(5) 任意の $T \in \mathfrak{I}(A/B)$ に対して，$A/T \sim A'/T'$, $T/B \sim T'/B'$ が成り立つ．

(6) $\big(V_A(V_A(B))\big)' = V_{A'}(V_{A'}(B'))$

以下では，環拡大の森田同値の理論について環論的研究に有用な考え方を記す．環準同型写像 $\rho : B \to A$ と $\rho' : B' \to A'$ が森田同値であるとし，森田加群 ${}_AM_{A'}$, ${}_BN_{B'}$ が ${}_AA \otimes_B N_{B'} \simeq {}_AM_{B'}$ を満たすとする．環準同型写像 $\rho'' : \operatorname{End}^r({}_BN) \to \operatorname{End}^r({}_AA \otimes_B N)$ を $\rho''(\sigma) = 1_A \otimes \sigma$ で定める．ここで，End の右肩にある r は準同型写像を右側から作用させることを意味する．以後 Hom^r も同様である．準同型写像を左側から作用させる場合は右肩に ℓ を付ける．自然な環同型写像 $\alpha' : A' \to \operatorname{End}^r({}_AM) \to \operatorname{End}^r({}_AA \otimes_B N)$ と自然な環同型写像 $\beta' : B' \to \operatorname{End}^r({}_BN)$ について，次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc}
A' & \xrightarrow{\alpha'} & \operatorname{End}^r({}_AA \otimes_B N) \\
{\scriptstyle\rho'}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle\rho''} \\
B' & \xrightarrow[\beta']{} & \operatorname{End}^r({}_BN)
\end{array}$$

したがって，$\rho : B \to A$ に森田同値な環準同型写像を考察するには，有限生成射影生成左 B-加群 ${}_BN$ を与えて，$B' = \operatorname{End}^r({}_BN)$, $A' = \operatorname{End}^r({}_AA \otimes_B N)$ とおき，環準同型写

像 $\rho': B' \to A'$ は $\rho'(\sigma) = 1_A \otimes \sigma$ と定めればよい．なお，${}_AA \otimes_B N$ は自動的に有限生成射影生成加群になる．この設定の下で $N^* = \mathrm{Hom}^r({}_BN, {}_BB)$ とおく．

${}_BN$ が有限生成射影生成加群であることより，二つのシステム $\{g_k, n_k\}$ および $\{f_j, m_j\}$ $(g_k,\ f_j \in N^*,\ n_k,\ m_j \in N)$ が存在して

$$\sum_k n_k g_k = 1 \qquad \text{および} \qquad \sum_j (nf_j)m_j = n \quad (n \in N)$$

が成り立つ．このとき，写像

$$\eta : N^* \otimes_B N \longrightarrow B', \qquad \eta(f \otimes u) = f \cdot u_r \quad (u_r\ \text{は}\ u\ \text{の右乗法})$$

は B'-B'-同型写像である．逆写像は $\eta^{-1}(h) = \sum_j f_j \otimes m_j h$ で与えられる．さらに写像

$$\xi : N \otimes_{B'} N^* \longrightarrow B, \qquad \xi(u \otimes f) = uf$$

は B-B-同型写像である．逆写像は $\xi^{-1}(b) = \sum_k b \cdot n_k \otimes g_k$ で与えられる．ここで次のような写像 α を考える:

$$\begin{array}{rcl} \alpha : N^* \otimes_B A \otimes_B N & \longrightarrow & A' \\ f \otimes x \otimes u & \longmapsto & [y \otimes v \mapsto y(vf)x \otimes u] \end{array}$$

このとき α は B'-B'-同型である．実際，逆写像は $\alpha^{-1}(h) = \sum_j f_j \otimes (1 \otimes m_j)h$ により与えられる．α を通して $N^* \otimes_B A \otimes_B N$ に積を定義することができて，

$$(f \otimes x \otimes u)(g \otimes y \otimes v) = f \otimes x(ug)y \otimes v$$

となる．明らかに $\sum_j f_j \otimes 1 \otimes m_j$ が $N^* \otimes_B A \otimes_B N$ における単位元であり，α は環同型である．さらに，α は B'-B'-同型 $N^* \otimes_B B \otimes_B N \simeq B'$ を誘導する．以上より A' および B' をそれぞれ $N^* \otimes_B A \otimes_B N$ および $N^* \otimes_B B \otimes_B N$ と同一視することができる．また，任意の $x \in A$ について，$x'_{(j,k)} = f_j \otimes x \otimes n_k$ および $x'_{[j,k]} = g_k \otimes x \otimes m_j$ と定める．[2] において，第一筆者は次のような 3 つの写像を与えた:

$$\varphi : A \longrightarrow A', \qquad \varphi(x) = \sum_j f_j \otimes x \otimes m_j$$
$$\Phi : \mathrm{End}^\ell({}_BA_B) \longrightarrow \mathrm{End}^\ell({}_{B'}A'_{B'}), \qquad \Phi(\eta) = 1 \otimes \eta \otimes 1$$
$$\psi : A \otimes_B A \longrightarrow A' \otimes_{B'} A', \qquad \psi(x \otimes y) = \sum_{j,k} x'_{(j,k)} \otimes y'_{[j,k]}$$

これらを用いて，以下の事実が得られる．命題 3.4 の幾つかの同型に具体的な対応を与えるものである．

補題 4.3. [2, Lemma 2] φ は環同型 $V_A(B) \simeq V_{A'}(B')$，$V_A(A) \simeq V_{A'}(A')$，および $V_B(B) \simeq V_{B'}(B')$ を誘導する．

補題 4.4. [2, Lemma 3] 次が成り立つ.

(1) Φ は環同型である.

(2) Φ は加法群の同型 $\mathrm{Hom}^{\ell}({}_BA_B, {}_BB_B) \simeq \mathrm{Hom}^{\ell}({}_{B'}A'_{B'}, {}_{B'}B'_{B'})$ を誘導する.

(3) Φ は加法群の同型 $\mathrm{Aut}^{\ell}(A/B) \simeq \mathrm{Aut}^{\ell}(A'/B')$ を誘導する.

(4) $\mathrm{Aut}^{\ell}(A/B)$ の部分群 H が $A^H = B$ をみたすとき, $A'^{\Phi(H)} = B'$ が成り立つ.

補題 4.5. [2, Lemma 4] ψ は加法群の同型 $(A \otimes_B A)^A \simeq (A' \otimes_{B'} A')^{A'}$ を誘導する.

補題 4.6. [9, Lemma 2.5] ψ は加法群の同型 $(A \otimes_B A)^B \simeq (A' \otimes_{B'} A')^{B'}$ を誘導する.

最後に微分に関する結果を述べる. Sを両側A-加群とする. 加法的な写像 $\delta : A \to S$ がB-微分 (B-derivation) であるとは, $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ $(x, y \in A)$ かつ $\delta(B) = 0$ が成り立つときにいう. A から S への B-微分全体を $\mathrm{Der}_B(A, S)$ で表す. 関手 $S \mapsto S' = N^* \otimes_B S \otimes_B N$ は両側 A-加群の圏から両側 A'-加群の圏への圏同値を与えることから, 次が成り立つ.

補題 4.7. [9, Lemma 2.6] Φ は加法群の同型 $\mathrm{Der}_B(A, S) \simeq \mathrm{Der}_{B'}(A', S')$ を誘導する.

5 森田不変

森田不変な環拡大について第三節で紹介したもの以外について述べる. 群準同型写像 $U : G \to \mathfrak{G}(A/B)$ によって $A = \bigoplus_{g \in G} U(g)$ と表されるとき, 宮下はAをBとGの**一般接合積**と名付けた. 命題4.2を用いて次を示した.

定理 5.1. [5, Theorem 3.4] 環Aが環Bと群Gの一般接合積のとき, $A/B \sim A'/B'$ ならばA'はB'とGの一般接合積である.

宮下は一般接合積とG-ガロア拡大との対応を研究し, それを用いて次の結果を得た. 後に本論文第一筆者は補題4.4およびその前に与えた道具を用いてガロア・システムを構成することによって証明した.

定理 5.2. [5, Theorem 3.5], [2, Theorem 1] 有限群Gに対するG-ガロア拡大に森田同値な環拡大はG-ガロア拡大である.

宮下は次の結果をホモロジー代数的に示した. 第一筆者はフロベニウス・システムを構成することによって証明した.

定理 5.3. [5, Proposition 3.10], [2, Theorem 2] フロベニウス拡大は森田不変である.

補題4.4を用いて次が得られる.

定理 5.4. [2, Theorem 3] symmetric 拡大は森田不変である.

また, 補題4.5 を用いて次を示した.

定理 5.5. [2, Theorem 4] QF 拡大は森田不変である.

定理 5.6. [2, Theorem 6] 平田分離拡大は森田不変である.

第二筆者は以下を示した.

定理 5.7. [9, Proposition 3.1] trivial 拡大は森田不変である.

定理 5.8. [9, Proposition 3.2] liberal 拡大は森田不変である.

定理 5.9. [9, Theorem 3.3] depth two 拡大は森田不変である.

定理 5.10. [9, Theorem 3.4] 強分離拡大は森田不変である.

定理 5.11. [9, Theorem 3.5] 弱分離拡大は森田不変である.

定理 5.9 および定理 5.10 はそれぞれの環拡大のシステムを構成することで示される. また, 定理 5.11 は補題 4.7 より従う.

最後に森田不変ではない例を挙げる.

例 5.12. [9, Example] 環 R と自然数 n に対して, $R^n = \{x^n \mid x \in R\}$ とおくことにする. k を素数標数 p の体とし, $A = k[t]$, $B = k[t^p]$ とする. 例 1.2 より $A/B \sim \mathrm{M}_2(A)/\mathrm{M}_2(B)$ である. ここで $A^p \subseteq B$ であるが, $\mathrm{M}_2(A)^p \not\subseteq \mathrm{M}_2(B)$ である. 実際, $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_2(A)$ は任意の自然数 n について $\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin \mathrm{M}_2(B)$ となる. よって, 適当な自然数 n について $A^n \subseteq B$ を満たすような環拡大 A/B は森田不変ではない.

例 5.13. 準分離拡大は森田不変ではない. なぜならば, [3, Example 5.5] により, 任意の環拡大 A/B と自然数 $n > 1$ について, $\mathrm{M}_n(A)/\mathrm{M}_n(B)$ は常に準分離拡大であるから.

参考文献

[1] K. Hirata and K. Sugano, On semisimple extensions and separable extensions over noncommutative rings, *J. Math. Soc. Japan*, **18** 1966, 360–373.

[2] S. Ikehata, On Morita equivalence in ring extensions, *Math. J. Okayama Univ.*, **18** 1975, 73–79.

[3] H. Komatsu, High order Kähler modules of noncommutative ring extensions, *Comm. Algebra*, **29** 2001, 5499–5524.

[4] H. Komatsu and S. Yamanaka, Congruence of functors, *preprint.*

[5] Y. Miyashita, On Galois extensions and crossed products, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I*, **21** 1970, 97–121.

[6] K. Morita, Adjoint pairs of functors and Frobenius extensions, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A*, **9** 1965, 40–71.

[7] C. Năstăsescu, M. Van den Bergh, and F. Van Oystaeyen, Separable functors applied to graded rings, *J. Algebra*, **123** 1989, 397–413.

[8] B. Stenström, Rings of Quotients, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[9] S. Yamanaka, Note on Morita equivalence in ring extensions, *Comm. Algebra*, **44** 2016, 4121–4131.

E-mail address : ikehata@ems.okayama-u.ac.jp
E-mail address : s_yamanaka@math.okayama-u.ac.jp
E-mail address : komatsu@cse.oka-pu.ac.jp