数理解析研究所講究録
第2014巻 2017年 173-183

多重ゼータ値に対するパラメータを持つ重みつき和公式

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　門田慎也 (Shin-ya Kadota)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 導入と結果の紹介

多重ゼータ値 (Multiple Zeta Value, MZV) $\zeta(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ とは, 自然数の組 $(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ (これをインデックスと呼ぶ) に対して次の多重級数から定まる実数値である.

$$\zeta(k_1,k_2,\cdots,k_r):=\sum_{0<n_1<n_2<\cdots<n_r}\frac{1}{{n_1}^{k_1}{n_2}^{k_2}\cdots{n_r}^{k_r}}. \tag{1.1}$$

ただし, (1.1) の右辺の多重級数の収束性から $k_r\geq 2$ とする. また, $k_1+k_2+\cdots+k_r$ を MZV $\zeta(k_1,k_2,\cdots,k_r)$ の weight と呼び, r を depth と呼ぶ. 簡単な計算から, MZV は次のような反復積分表示を持つことがわかる.

$$\zeta(k_1,k_2,\cdots,k_r)=\int_{0<t_1<t_2<\cdots<t_k<1}\omega_1(t_1)\omega_2(t_2)\cdots\omega_k(t_k).$$

ただし, $k=k_1+k_2+\cdots+k_r$ で $i\in\{1,k_1+1,k_1+k_2+1,\cdots,k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+1\}$ なる i に対しては $\omega_i(t)=\frac{dt}{1-t}$ であり, そのほかの i に対しては $\omega_i(t)=\frac{dt}{t}$ である. 私が得た関係式 (1.3) を証明する際に, この積分表示が非常に重要な役割を担うことになる. 本稿では, 私が研究集会で紹介

した「ある種の重みつき和公式」について簡単な証明とともに改めて紹介し，講演中に触れることができなかった「等号つき多重ゼータ値への応用」についても記載する．

まずは，私が得た関係式がどのような流れにのっているかを確認しいていただくためにいくつか関係式を紹介する．MZV の研究は 18 世紀の Euler が始まりである．Euler は当時 $r=2$ のものを考えており，次の関係式 (Euler の和公式と呼ばれている) を示した．

Theorem 1 ([2])**.** $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ に対して次の式が成り立つ．

$$\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=k \\ \alpha_1,\alpha_2 \geq 1}} \zeta(\alpha_1, \alpha_2+1) = \zeta(k+1).$$

これは，weight が $k+1$ の二重ゼータ値をすべて足し合わせると $\zeta(k+1)$ に等しいという関係式である．一般の depth に対しても同じことが言える ([3])．つまり，weight が $k+1$, depth が r の多重ゼータ値をすべて足し合わせると $\zeta(k+1)$ に等しくなる．この関係式を和公式という．Ohno-Zudilin は Euler の和公式の weighted analog となっている関係式を示した．

Theorem 2 ([6])**.** $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ に対して次の式が成り立つ．

$$\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2=k \\ \alpha_1,\alpha_2 \geq 1}} 2^{\alpha_2+1}\zeta(\alpha_1, \alpha_2+1) = (k+2)\zeta(k+1).$$

そして，Eie-Liaw-Ong は Ohno-Zudilin が示した関係式の一般化を行った．

Theorem 3 ([1])**.** $k, r \in \mathbb{N}, k \geq 2r$ に対して次の式が成り立つ．

$$\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_{2r}=k \\ {}^{\forall}\alpha_i \geq 1}} \sum_{j=1}^{r} 2^{\alpha_{2j}+1}\zeta(\alpha_1, \cdots, \alpha_{2r-1}, \alpha_{2r}+1) = (k+2r)\zeta(k+1). \tag{1.2}$$

今回, 私は (1.2) のある種の一般化を行うことに成功した. その関係式を紹介する前に, 表示が煩雑になるのを避けるためいくつか記号を準備する.

インデックス $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_r) \in \mathbb{N}^r$, $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_s) \in \mathbb{N}^s$ ($k_r = 1$ や $\ell_s = 1$ でもよい) に対して,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}_+ &= (k_1, k_2, \cdots, k_r + 1), \\ \boldsymbol{k} \circ \boldsymbol{\ell} &= (k_1, k_2, \cdots, k_r + \ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_s), \\ |\boldsymbol{k}| &= k_1 + k_2 + \cdots + k_r \end{aligned}$$

と定める. これで記号の準備は終わったので, 私の得た関係式を述べる.

Theorem 4. $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とパラメータ $\mu_1, \mu_2, \xi_1, \xi_2$ に対して次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{a_1+a_2=m \\ b_1+b_2=n}} \mu_1^{a_1} \mu_2^{a_2} \xi_1^{b_1} \xi_2^{b_2} \zeta(a_1+b_1+2)\zeta(a_2+b_2+2) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \Bigg[\sum_{\substack{a_1+a_2=m \\ b_1+b_2=n}} \mu_{\sigma(1)}^{a_1} \mu_{\sigma(2)}^{a_2} \xi_{\sigma(1)}^{b_1} \xi_{\sigma(2)}^{b_2} \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=a_1+b_1+1 \\ |\boldsymbol{\beta}|=a_2+b_2+1}} \zeta(\boldsymbol{\alpha}_+, \boldsymbol{\beta}_+) \\ &\quad + \sum_{\substack{a_1+a_2+a_3=m \\ b_1+b_2+b_3=n}} \mu_{\sigma(1)}^{a_1} \xi_{\sigma(1)}^{b_1} (\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)})^{a_2} (\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)})^{b_2} \\ &\qquad \times (\mu_{\sigma(1)}^{a_3} \xi_{\sigma(1)}^{b_3} + \mu_{\sigma(2)}^{a_3} \xi_{\sigma(2)}^{b_3}) \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=a_1+b_1+1 \\ |\boldsymbol{\beta}|=a_2+b_2+1 \\ |\boldsymbol{\gamma}|=a_3+b_3+1}} \zeta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \circ \boldsymbol{\gamma}_+) \Bigg]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

ただし, $\mathfrak{S}_2$ は二次対称群, $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha} &= (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{a_1}) \in \mathbb{N}^{a_1+1}, \\ \boldsymbol{\beta} &= (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{a_2}) \in \mathbb{N}^{a_2+1}, \\ \boldsymbol{\gamma} &= (\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{a_3}) \in \mathbb{N}^{a_3+1} \end{aligned}$$

とする.

一見, (1.2) の一般化にはなっていないように見えるが, 偶数 m に対してパラメータを $(\mu_1,\mu_2,\xi_1,\xi_2)=(1,-1,1,1)$ とし, 次の手順を踏むことにより (1.2) を導出することができる. まず, 左辺にある Riemann ゼータ値 2 つの積を調和積により書き換えてやることで, 二重ゼータ値 2 つの部分と Riemann ゼータ値 1 つの部分が現れる. そして $(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{a_1},2,\underbrace{1,1,\cdots,1}_{a_2},2)$ に対して Ohno 関係式 ([5]) を用いることで右辺の

$$\sum_{b_1+b_2=n}\ \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=a_1+b_1+1\\ |\boldsymbol{\beta}|=a_2+b_2+1}}\zeta(\boldsymbol{\alpha}_+,\boldsymbol{\beta}_+)$$

が先ほど現れた二重ゼータ値 2 つの部分と完全に等しくなることがわかり, キャンセルする. 最後に, 右辺の残りの部分の a_i,b_i についての和と $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ についての和を入れ替え (この部分が一番ややこしい), $(m,n)=(2r-1,k-2r-1)$ と置くことで (1.2) を得ることができる. (注 : $k=2r$ のとき (1.2) は双対関係式から得られる.)

2 Theorem 4 の証明

証明を行うためにパラメータ μ_1,μ_2,ξ_1,ξ_2 と非負の整数 m,n に対して次のような積分を考える.

$$\begin{aligned}
&I_{m,n}(\mu_1,\mu_2,\xi_1,\xi_2)\\
:=&\frac{1}{m!n!}\int_{\substack{0<s_1<s_2<1\\ 0<t_1<t_2<1}}\left(\mu_1\log\frac{1-s_1}{1-s_2}+\mu_2\log\frac{1-t_1}{1-t_2}\right)^m\\
&\qquad\times\left(\xi_1\log\frac{s_2}{s_1}+\xi_2\log\frac{t_2}{t_1}\right)^n\frac{ds_1ds_2dt_1dt_2}{(1-s_1)s_2(1-t_1)t_2}.
\end{aligned}$$

証明の方針は非常に簡単で, 上の積分を 2 通りの方法で計算するというものである. 本稿では証明の大まかな流れしか紹介しないため, 詳しい証明については [4] を参照されたい.

1 つ目の計算:
被積分関数の m 乗および n 乗の因子を素直に展開すると, s_1, s_2 についての積分と t_1, t_2 についての積分の積が現れる. そこで, $0 < x < y < 1$, $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対する等式

$$\left(\log \frac{1-x}{1-y}\right)^a = a! \int_{x<p_1<\cdots<p_a<y} \prod_{i=1}^{a} \frac{dp_i}{1-p_i},$$

$$\left(\log \frac{y}{x}\right)^a = a! \int_{x<q_1<\cdots<q_a<y} \prod_{j=1}^{a} \frac{dq_j}{q_j}$$

と和公式を用いることにより, それぞれの積分が Riemann ゼータ値に等しいことがわかり (1.3) の左辺を得ることができる.

2 つ目の計算:
積分領域 $0 < s_1 < s_2 < 1, 0 < t_1 < t_2 < 1$ を以下の 6 つの領域に分割して, それぞれの領域ごとに計算する.

$$\begin{aligned}
&D_1 : 0 < s_1 < s_2 < t_1 < t_2 < 1, \quad && D_2 : 0 < t_1 < t_2 < s_1 < s_2 < 1,\\
&D_3 : 0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < 1, \quad && D_4 : 0 < t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < 1,\\
&D_5 : 0 < s_1 < t_1 < t_2 < s_2 < 1, \quad && D_6 : 0 < t_1 < s_1 < s_2 < t_2 < 1.
\end{aligned}$$

ところが, 積分変数の対称性から D_1, D_3, D_5 についてのみ計算すれば十分であることがわかる.(このことが $\mathfrak{S}_2$ にわたる和が現れる由来である.) そして, この証明の一番重要なポイントは積分領域に応じて m 乗, n 乗の中身を変形してから展開するという点である. この変形によって, 最終的に MZV の和の形で書き表すことができるのである. このポイントに気を付けて計算を行うことにより, (1.3) の右辺を得ることができ, 証明が完了する.

さらに **Theorem 4** の証明と同様に次の積分

$$\frac{1}{m!n!}\int\limits_{\substack{0<s_1<s_2<1\\0<t_1<t_2<1\\0<u_1<u_2<1}}\left(\mu_1\log\frac{1-s_1}{1-s_2}+\mu_2\log\frac{1-t_1}{1-t_2}+\mu_3\log\frac{1-u_1}{1-u_2}\right)^m$$
$$\times\left(\xi_1\log\frac{s_2}{s_1}+\xi_2\log\frac{t_2}{t_1}+\xi_3\log\frac{u_2}{u_1}\right)^n\frac{ds_1ds_2dt_1dt_2du_1du_2}{(1-s_1)s_2(1-t_1)t_2(1-u_1)u_2}$$

を 2 通りの方法で計算することによって, 次の定理を得ることができる.

Theorem 5. $m,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とパラメータ $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\xi_1,\xi_2,\xi_3$ に対して次の式が成り立つ.

$$\sum_{\substack{a_1+a_2+a_3=m\\b_1+b_2+b_3=n}}\mu_1^{a_1}\mu_2^{a_2}\mu_3^{a_3}\xi_1^{b_1}\xi_2^{b_2}\xi_3^{b_3}\zeta(a_1+b_1+2)\zeta(a_2+b_2+2)\zeta(a_3+b_3+2)$$
$$=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3}\Bigg[\sum_{\substack{a_1+a_2+a_3=m\\b_1+b_2+b_3=n}}P_{1,\sigma}\times\sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=a_1+b_1+1\\|\boldsymbol{\beta}|=a_2+b_2+1\\|\boldsymbol{\gamma}|=a_3+b_3+1}}\zeta(\boldsymbol{\alpha}_+,\boldsymbol{\beta}_+,\boldsymbol{\gamma}_+)$$
$$+\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_4=m\\b_1+\cdots+b_4=n}}(P_{2,\sigma}+P_{3,\sigma})\sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=a_1+b_1+1\\|\boldsymbol{\beta}|=a_2+b_2+1\\|\boldsymbol{\gamma}|=a_3+b_3+1\\|\boldsymbol{\delta}|=a_4+b_4+1}}\zeta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\circ\boldsymbol{\gamma}_+,\boldsymbol{\delta}_+)$$
$$+\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_5=m\\b_1+\cdots+b_5=n}}(P_{4,\sigma}+P_{5,\sigma}+P_{7,\sigma}+P_{12,\sigma})\sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=a_1+b_1+1\\ \vdots\\|\boldsymbol{\varepsilon}|=a_5+b_5+1}}\zeta(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\circ\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}\circ\boldsymbol{\varepsilon}_+)$$
$$+\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_4=m\\b_1+\cdots+b_4=n}}(P_{6,\sigma}+P_{11,\sigma})\sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=a_1+b_1+1\\ \vdots\\|\boldsymbol{\delta}|=a_4+b_4+1}}\zeta(\boldsymbol{\alpha}_+,\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\circ\boldsymbol{\delta}_+)$$
$$+\sum_{\substack{a_1+\cdots+a_5=m\\b_1+\cdots+b_5=n}}(P_{8,\sigma}+P_{9,\sigma}+P_{10,\sigma}+P_{13,\sigma}+P_{14,\sigma}+P_{15,\sigma})$$

$$\times \sum_{\substack{|\boldsymbol{\alpha}|=a_1+b_1+1 \\ \vdots \\ |\boldsymbol{\varepsilon}|=a_5+b_5+1}} \zeta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \circ \boldsymbol{\delta} \circ \boldsymbol{\varepsilon}_+)\Bigg].$$

ただし,

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{a_1}),$$
$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_{a_2}),$$
$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_{a_3}),$$
$$\boldsymbol{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \cdots, \delta_{a_4}),$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{a_5}),$$

$$\begin{aligned}
P_{1,\sigma} =& \mu_{\sigma(1)}^{a_1}\mu_{\sigma(2)}^{a_2}\mu_{\sigma(3)}^{a_3}\xi_{\sigma(1)}^{b_1}\xi_{\sigma(2)}^{b_2}\xi_{\sigma(3)}^{b_3}, \\
P_{2,\sigma} =& \mu_{\sigma(1)}^{a_1}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)})^{a_2}\mu_{\sigma(2)}^{a_3}\mu_{\sigma(3)}^{a_4}\xi_{\sigma(1)}^{b_1}(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)})^{b_2}\xi_{\sigma(2)}^{b_3}\xi_{\sigma(3)}^{b_4}, \\
P_{3,\sigma} =& \mu_{\sigma(1)}^{a_1+a_3}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)})^{a_2}\mu_{\sigma(3)}^{a_4}\xi_{\sigma(1)}^{b_1+b_3}(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)})^{b_2}\xi_{\sigma(3)}^{b_4}, \\
P_{4,\sigma} =& \mu_{\sigma(1)}^{a_1+a_3}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)})^{a_2}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(3)})^{a_4}\mu_{\sigma(3)}^{a_5} \\
& \times \xi_{\sigma(1)}^{b_1+b_3}(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)})^{b_2}(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(3)})^{b_4}\xi_{\sigma(3)}^{b_5}, \\
P_{5,\sigma} =& \mu_{\sigma(1)}^{a_1+a_3+a_5}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)})^{a_2}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(3)})^{a_4} \\
& \times \xi_{\sigma(1)}^{b_1+b_3+b_5}(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)})^{b_2}(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(3)})^{b_4}, \\
P_{6,\sigma} =& \mu_{\sigma(1)}^{a_1}\mu_{\sigma(2)}^{a_2}(\mu_{\sigma(2)} + \mu_{\sigma(3)})^{a_3}\mu_{\sigma(3)}^{a_4}\xi_{\sigma(1)}^{b_1}\xi_{\sigma(2)}^{b_2}(\xi_{\sigma(2)} + \xi_{\sigma(3)})^{b_3}\xi_{\sigma(3)}^{b_4}, \\
P_{7,\sigma} =& \mu_{\sigma(1)}^{a_1}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)})^{a_2}\mu_{\sigma(2)}^{a_3}(\mu_{\sigma(2)} + \mu_{\sigma(3)})^{a_4}\mu_{\sigma(3)}^{a_5} \\
& \times \xi_{\sigma(1)}^{b_1}(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)})^{b_2}\xi_{\sigma(2)}^{b_3}(\xi_{\sigma(2)} + \xi_{\sigma(3)})^{b_4}\xi_{\sigma(3)}^{b_5}, \\
P_{8,\sigma} =& \mu_{\sigma(1)}^{a_1}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)})^{a_2}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)} + \mu_{\sigma(3)})^{a_3}(\mu_{\sigma(2)} + \mu_{\sigma(3)})^{a_4}\mu_{\sigma(3)}^{a_5} \\
& \times \xi_{\sigma(1)}^{b_1}(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)})^{b_2}(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)} + \xi_{\sigma(3)})^{b_3}(\xi_{\sigma(2)} + \xi_{\sigma(3)})^{b_4}\xi_{\sigma(3)}^{b_5}, \\
P_{9,\sigma} =& \mu_{\sigma(1)}^{a_1}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)})^{a_2}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)} + \mu_{\sigma(3)})^{a_3}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(3)})^{a_4}\mu_{\sigma(3)}^{a_5} \\
& \times \xi_{\sigma(1)}^{b_1}(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)})^{b_2}(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(2)} + \xi_{\sigma(3)})^{b_3}(\xi_{\sigma(1)} + \xi_{\sigma(3)})^{b_4}\xi_{\sigma(3)}^{b_5}, \\
P_{10,\sigma} =& \mu_{\sigma(1)}^{a_1+a_5}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)})^{a_2}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(2)} + \mu_{\sigma(3)})^{a_3}(\mu_{\sigma(1)} + \mu_{\sigma(3)})^{a_4}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \xi_{\sigma(1)}^{b_1+b_5}(\xi_{\sigma(1)}+\xi_{\sigma(2)})^{b_2}(\xi_{\sigma(1)}+\xi_{\sigma(2)}+\xi_{\sigma(3)})^{b_3}(\xi_{\sigma(1)}+\xi_{\sigma(3)})^{b_4},\\
P_{11,\sigma} =&\mu_{\sigma(1)}^{a_1}\mu_{\sigma(2)}^{a_2+a_4}(\mu_{\sigma(2)}+\mu_{\sigma(3)})^{a_3}\xi_{\sigma(1)}^{b_1}\xi_{\sigma(2)}^{b_2+b_4}(\xi_{\sigma(2)}+\xi_{\sigma(3)})^{b_3},\\
P_{12,\sigma} =&\mu_{\sigma(1)}^{a_1}(\mu_{\sigma(1)}+\mu_{\sigma(2)})^{a_2}\mu_{\sigma(2)}^{a_3+a_5}(\mu_{\sigma(2)}+\mu_{\sigma(3)})^{a_4}\\
&\times \xi_{\sigma(1)}^{b_1}(\xi_{\sigma(1)}+\xi_{\sigma(2)})^{b_2}\xi_{\sigma(2)}^{b_3+b_5}(\xi_{\sigma(2)}+\xi_{\sigma(3)})^{b_4},\\
P_{13,\sigma} =&\mu_{\sigma(1)}^{a_1}(\mu_{\sigma(1)}+\mu_{\sigma(2)})^{a_2}(\mu_{\sigma(1)}+\mu_{\sigma(2)}+\mu_{\sigma(3)})^{a_3}(\mu_{\sigma(2)}+\mu_{\sigma(3)})^{a_4}\mu_{\sigma(2)}^{a_5}\\
&\times \xi_{\sigma(1)}^{b_1}(\xi_{\sigma(1)}+\xi_{\sigma(2)})^{b_2}(\xi_{\sigma(1)}+\xi_{\sigma(2)}+\xi_{\sigma(3)})^{b_3}(\xi_{\sigma(2)}+\xi_{\sigma(3)})^{b_4}\xi_{\sigma(2)}^{b_5},\\
P_{14,\sigma} =&\mu_{\sigma(1)}^{a_1}(\mu_{\sigma(1)}+\mu_{\sigma(2)})^{a_2+a_4}(\mu_{\sigma(1)}+\mu_{\sigma(2)}+\mu_{\sigma(3)})^{a_3}\mu_{\sigma(2)}^{a_5}\\
&\times \xi_{\sigma(1)}^{b_1}(\xi_{\sigma(1)}+\xi_{\sigma(2)})^{b_2+b_4}(\xi_{\sigma(1)}+\xi_{\sigma(2)}+\xi_{\sigma(3)})^{b_3}\xi_{\sigma(2)}^{b_5},\\
P_{15,\sigma} =&\mu_{\sigma(1)}^{a_1+a_5}(\mu_{\sigma(1)}+\mu_{\sigma(2)})^{a_2+a_4}(\mu_{\sigma(1)}+\mu_{\sigma(2)}+\mu_{\sigma(3)})^{a_3}\\
&\times \xi_{\sigma(1)}^{b_1+b_5}(\xi_{\sigma(1)}+\xi_{\sigma(2)})^{b_2+b_4}(\xi_{\sigma(1)}+\xi_{\sigma(2)}+\xi_{\sigma(3)})^{b_3}
\end{aligned}
$$

である.

Theorem 4 の証明の際には, 2 つ目の計算で積分領域 $0<s_1<s_2<1, 0<t_1<t_2<1$ を 6 つに分割していたが, **Theorem 4** を証明するためには, 積分領域 $0<s_1<s_2<1, 0<t_1<t_2<1, 0<u_1<u_2<1$ を 90 個に分割することになる. ところが, 積分変数の対称性から 90 個のうち以下の 15 個のみ計算すればよいことがわかる.

$$
\begin{aligned}
D_1 &: 0<s_1<s_2<t_1<t_2<u_1<u_2<1,\\
D_2 &: 0<s_1<t_1<s_2<t_2<u_1<u_2<1,\\
D_3 &: 0<s_1<t_1<t_2<s_2<u_1<u_2<1,\\
D_4 &: 0<s_1<t_1<t_2<u_1<s_2<u_2<1,\\
D_5 &: 0<s_1<t_1<t_2<u_1<u_2<s_2<1,\\
D_6 &: 0<s_1<s_2<t_1<u_1<t_2<u_2<1,\\
D_7 &: 0<s_1<t_1<s_2<u_1<t_2<u_2<1,\\
D_8 &: 0<s_1<t_1<u_1<s_2<t_2<u_2<1,\\
D_9 &: 0<s_1<t_1<u_1<t_2<s_2<u_2<1,\\
D_{10} &: 0<s_1<t_1<u_1<t_2<u_2<s_2<1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{11} &: 0 < s_1 < s_2 < t_1 < u_1 < u_2 < t_2 < 1, \\
D_{12} &: 0 < s_1 < t_1 < s_2 < u_1 < u_2 < t_2 < 1, \\
D_{13} &: 0 < s_1 < t_1 < u_1 < s_2 < u_2 < t_2 < 1, \\
D_{14} &: 0 < s_1 < t_1 < u_1 < u_2 < s_2 < t_2 < 1, \\
D_{15} &: 0 < s_1 < t_1 < u_1 < u_2 < t_2 < s_2 < 1.
\end{aligned}
$$

上に記した $P_{i,\sigma}$ とは, 各領域 D_i を計算する際に現れるパラメータの部分である.

より一般的に, 積分

$$
\frac{1}{m!n!} \int_{\substack{0<x_1<y_1<1 \\ \vdots \\ 0<x_\ell<y_\ell<1}} \left(\sum_{i=1}^{\ell} \mu_i \log \frac{1-x_i}{1-y_i} \right)^m \left(\sum_{j=1}^{\ell} \xi_j \log \frac{y_j}{x_j} \right)^n \prod_{k=1}^{\ell} \frac{dx_k dy_k}{(1-x_k)y_k}
$$

を考えることで, 似たような関係式を得ることができるのだが, 分割した領域ごとに計算する際にどのような修正を施すのかを具体的に表記することができないため, 明示的な関係式を与えることは難しい.

3 等号つき多重ゼータ値への応用

等号つき多重ゼータ値 (Multiple Zeta Star Value, MZSV) (多重ゼータスター値とも呼ばれる) $\zeta^\star(k_1, k_2, \cdots, k_r)$ とは, MZV の定義級数において和の変数たちの大小関係に等号を許したものである. つまり

$$
\zeta^\star(k_1, k_2, \cdots, k_r) := \sum_{0<n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_r} \frac{1}{{n_1}^{k_1} {n_2}^{k_2} \cdots {n_r}^{k_r}}
$$

と定義される. この MZSV も MZV と似た以下の反復積分表示を持つことが知られている. $(k = k_1 + k_2 + \cdots + k_r)$

$$
\zeta^\star(k_1, k_2, \cdots, k_r) = \int_{0<t_1<t_2<\cdots<t_k<1} \omega_1(t_1)\omega_2(t_2)\cdots\omega_k(t_k).
$$

ただし, $\omega_1(t)=\frac{dt}{1-t}$ とし, $i\in\{k_1+1,k_1+k_2+1,\cdots,k_1+k_2+\cdots+k_{r-1}+1\}$ なる i に対しては $\omega_i(t)=\frac{dt}{t(1-t)}$ であり, そのほかの i に対しては $\omega_i(t)=\frac{dt}{t}$ である. MZV と MZSV の積分表示の違い ($\frac{dt}{1-t}$ と $\frac{dt}{t(1-t)}$) を考慮すると, 次の積分を計算することにより **Theorem 4** の MZSV 類似のような関係式を得ることができる.

$$\frac{1}{m!n!}\int_{\substack{0<s_1<s_2<1\\0<t_1<t_2<1}}\left(\mu_1\log\frac{s_2(1-s_1)}{s_1(1-s_2)}+\mu_2\log\frac{t_2(1-t_1)}{t_1(1-t_2)}\right)^m \times\left(\xi_1\log\frac{s_2}{s_1}+\xi_2\log\frac{t_2}{t_1}\right)^n\frac{ds_1ds_2dt_1dt_2}{(1-s_1)s_2(1-t_1)t_2}.$$

証明方法は **Theorem 4** とほとんど同じなのだが, 1 つだけ異なる点がある. それは 2 つ目の計算を行う際に部分分数分解 $\frac{1}{1-x}=\frac{1}{x(1-x)}-\frac{1}{x}$ を用いるという点である. 例えば, 分割された領域 $0<s_1<s_2<t_1<t_2<1$ を計算する際には, $\frac{1}{1-t_1}=\frac{1}{t_1(1-t_1)}-\frac{1}{t_1}$ としなければいけない. (注 : $\frac{1}{1-s_1}$ については部分分数分解を行わない) その理由は, MZSV の関係式を得るためには被積分関数の中に $\frac{1}{1-x}$ という形が, 始め (積分変数の中で一番小さいもの) しか現れてはいけないからである. もちろん適当な積分を考えてやることにより **Theorem 5** の MZSV 類似のような関係式を得ることができる.

参考文献

[1] M. Eie, W. -C. Liaw, Y. L. Ong, *On generalizations of weighted sum formulas of multiple zeta values*, Int. J. Number Theory **9** (2013), no. 5, 1185–1198.

[2] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol **20** (1776), 140–186; reprinted in Opera Omnia, Series I, Vol. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217–267.

[3] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, in "Analytic number theory" London Math. Soc. Lecture Note Ser., **247**, Cambridge, 1997, pp.95–101.

[4] S. Kadota, *Certain weighted sum formulas for multiple zeta values with some parameters*, preprint arXiv:1512.08345, 2015.

[5] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), no. 1, 39–43.

[6] Y. Ohno, W. Zudilin, *Zeta stars*, Commun. Number Theory Phys. **2** (2008), no. 2, 325–347.