数理解析研究所講究録
第2036巻 2017年 59-78

Regular Irreducible Characters of Hyperspecial Compact Groups

宮城教育大学　高瀬 幸一
Koichi Takase
Miyagi University of Education

1　イントロダクション

1.1　動機

非アルキメデス的局所体 F の整数環を O とし，O の唯一の極大イデアルを $\mathfrak{p}=\varpi O$ とする．$\mathbb{F}=O/\mathfrak{p}$ は有限体である．$\mathrm{ch}\,\mathbb{F}\neq 2$ と仮定する．

F 上定義された連結簡約線形代数群 $\mathbb{G}$ が F 上半分裂 (即ち $\mathbb{G}$ の Borel 部分群が F 上定義される) かつ不分岐 (即ち $\mathbb{G}$ は F の不分岐拡大上で分裂する) のとき，O 上の滑らかな群スキーム G があって $G\otimes_O F=\mathbb{G}$ かつ $G\otimes_O\mathbb{F}$ が連結簡約代数群となる．このとき局所コンパクト群 $G(F)=\mathbb{G}(F)$ ($G(F)$ は G の F-値点のなす群，以下同様) の開コンパクト部分群 $G(O)$ は $G(F)$ のハイパースペシャル・コンパクト部分群と呼ばれる (J.Tits ; P.S.P.M. vol.33, Part 1). 典型的な例として，$GL_n(F)$ における $GL_n(O)$，或いは $Sp_{2n}(F)$ における $Sp_{2n}(O)$ などが挙げられる．

さて局所コンパクト群 $G(F)$ 上の調和解析を考える上でコンパクト群 $G(O)$ の既約ユニタリ表現を調べることは意味のあることであろう．ところで群スキーム G が滑らかであることと Hensel の補題から，任意の $r>0$ に対して自然な群準同型写像 $G(O)\to G(O/\mathfrak{p}^r)$ は全射となるが，$G(O)$ の既約ユニタリ表現 π は適当な $r>0$ に対して $G(O)\to G(O/\mathfrak{p}^r)$ の核で自明となるから，結局 π は有限群 $G(O/\mathfrak{p}^r)$ の有限次元既約表現を経由する．従って我々の問題は，全ての $r>0$ に対して有限群 $G(O/\mathfrak{p}^r)$ の既約表現を求めることに帰着する．

$r=1$ の時には，問題は有限簡約群 $G(\mathbb{F})$ の表現論となり，$GL_n(\mathbb{F})$ の既約指標を決定した J.A.Green (Trans. Amer. Math. Soc. 80, 1955) に始まり，決定的な P.Deligne, G.Lusztig (Ann. of Math. 103, 1976) を経て既に数多くの成果が報告されている．一方 $r>1$ の場合の有限群 $G(O/\mathfrak{p}^r)$ の表現論については，あまり詳しい事は知られていない．実際，専門家の間では GL_n に関してですら $n\geq 4$ の場合は "wild problem" であると思われている

(A.Stasinski ; Comm. in Alg. 37 (2009), p.4417). そこで特殊な群，或いは特殊な既約表現の系列について詳しい研究がなされてきた．幾つかの例を挙げると

1) A.J.Shalika (Thesis, 1966) では $G = SL_2$ の場合に $G(O/\mathfrak{p}^r)$ $(r > 1)$ の全ての既約表現が決定された，

2) A.J.Silberger (L.N. in Math. vol.166, 1970) は同様の問題を $G = PGL_2$ の場合に解決した．一方

3) T.Shintani (J. Math.Soc. Jpn. vol.20, 1968) とやや遅れて P.Gérardin (Sém. Delange-Pisot-Poitou, 14, 1972/73) は $G = GL_n$ の場合に $G(O/\mathfrak{p}^r)$ $(r > 1)$ の尖点的既約表現を構成し，$G(F)$ の二乗可積分または超尖点的既約表現を構成した．

さて G.Hill は一連の論文 (Comm.Algebra 21 (1993), 402-447; Manuscripta Math. 82 (1994), 293-311; Comm. Algebra 23 (1995), 7-25; J. Algebra 174 (1995), 610-635) で $G = GL_n$ の場合を系統的に研究した．特に最後の論文により所謂 "split regular character" は完全に決定されたと思われていたが，最近 [18] により，その証明は半単純な "split regular character" に対してのみ機能することが指摘され，この問題を攻略する新たな方法が提案された．その方法は，上記論文の続編 [19] により一般のハイパースペシャル・コンパクト群に対して有効であることが示された．本稿ではそれらの概要を報告したい．

1.2 Clifford の方法

ここで本稿の議論の基礎となる Clifford の方法（或いは Clifford 理論）について必要な事をまとめておく．

有限群 G の正規部分群 $N \lhd G$ と N の既約表現 ψ をとる．ψ の $g \in G$ に共役 ψ^g を $\psi^g(n) = \psi(gng^{-1})$ $(n \in N)$ により定義すると

$$G_\psi = \{g \in G \mid \psi^g \simeq \psi\}$$

は G の部分群である．G の既約表現の同値類全体を $\mathrm{Irr}(G)$ と書き

$$\mathrm{Irr}(G \mid \psi) = \{\pi \in \mathrm{Irr}(G) \mid \langle \psi, \pi \rangle_N > 0\}$$

とおく．ここで $\langle \psi, \pi \rangle_N = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_N(\psi, \pi)$ は $\pi|_N$ における ψ の重複度である．$N \subset G_\psi$ だから

$$\mathrm{Irr}(G_\psi \mid \psi) = \{\sigma \in \mathrm{Irr}(G_\psi) \mid \langle \psi, \sigma \rangle_N > 0\}$$

が考えられる．このとき次が成り立つ；

定理 1.2.1 $\sigma \mapsto \mathrm{Ind}_{G_\psi}^G \sigma$ は全単射 $\mathrm{Irr}(G_\psi \mid \psi) \tilde{\to} \mathrm{Irr}(G \mid \psi)$ を与える．

更に N の既約表現 ψ' と $\sigma' \in \mathrm{Irr}(G_{\psi'} \mid \psi')$ に対して $\mathrm{Ind}_{G_\psi}^G \sigma \tilde{\to} \mathrm{Ind}_{G_{\psi'}}^G \sigma'$ となる必要十分条件は

1) $\psi' \tilde{\to} \psi^g$．従って $G_{\psi'} = g^{-1} G_\psi g$, かつ

2) $\sigma' \tilde{\to} \sigma^g$

なる $g \in G$ が存在することである．従って

$$\mathrm{Irr}(G) = \bigsqcup_{\psi \in \mathrm{Irr}(N)/G} \mathrm{Irr}(G \mid \psi)$$

となる．即ち $\mathrm{Irr}(G)$ を決定するために，G より取り扱いやすいと期待される

1) N に対して $\mathrm{Irr}(N)/G$ を決定し，

2) 各 $\psi \in \mathrm{Irr}(N)/G$ に対して $\mathrm{Irr}(G_\psi \mid \psi)$ を決定すればよい．

1.3 Lie 環の元の正則性

有限体 $\mathbb{F}$ 上定義された連結簡約線形代数群 G の $\mathbb{F}$ 上の Lie 環を $\mathfrak{g}$ とする．$\beta \in \mathfrak{g}$ の中心化環を

$$Z_{\mathfrak{g}}(\beta) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \beta] = 0\}$$

として，$\dim_{\mathbb{F}} Z_{\mathfrak{g}}(\beta) = \mathrm{rank}(G)$ であるとき，$\beta \in \mathfrak{g}$ は G で smoothly regular であるという（[17, 1.4]，簡単のために正則と呼ぶ）．$\beta \in \mathfrak{g}$ の Jordan 分解を $\beta = \beta_s + \beta_n$ とすると，半単純部分 $\beta_s \in \mathfrak{g}$ の中心化群

$$Z_G(\beta_s) = \{g \in G \mid \mathrm{Ad}(g)\beta_s = \beta_s\}$$

の単位元を含む連結成分 $Z_G(\beta_s)^o$ は $\mathbb{F}$ 上定義された連結簡約群となり，G の極大トーラス T であってその $\mathbb{F}$ 上の Lie 環 $\mathfrak{t}$ が β_s を含むものがとれる（[1, Prop.13.19]）．一方，$Z_G(\beta_s)^0$ の $\mathbb{F}$ 上の Lie 環は $Z_{\mathfrak{g}}(\beta_s)$ である（[1, 9.1]）．よって $\beta \in \mathfrak{g}$ が G で正則であることは $\beta_n \in Z_{\mathfrak{g}}(\beta_s)$ が $Z_G(\beta_s)^o$ で正則であることと同値である．

ここで $T \subset Z_G(\beta_s)$ だから，T に関する $Z_G(\beta_s)^o$ の根系 $\Phi(T, Z_G(\beta_s)^o)$ の正の根系 Φ^+ を

$$\beta_n = \sum_{\alpha \in \Phi^+} c_\alpha \cdot X_\alpha \quad (c_\alpha \in \overline{\mathbb{F}})$$

となるように定める（$X_\alpha \in \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$ は $\alpha \in \Phi^+$ に対応する根ベクトル）．すると次が成り立つ（[2, p.228,III-3.5]）；

命題 1.3.1 1) $\beta \in \mathfrak{g}$ が正則ならば，全ての単純根 $\alpha \in \Phi^+$ に対して $c_\alpha \neq 0$ である．

2) 根系 $\Phi(T, Z_G(\beta_s)^o)$ の単純成分ごとに bad prime を次のように定める；

	A_r	B_r, D_r	C_r	E_6, E_7, F_4	E_8	G_2
bad prime	$\emptyset$	2	2	2,3	2,3,5	2,3

$\mathbb{F}$ の標数が bad prime でないならば 1) の逆が成り立つ．

上の命題から

命題 1.3.2 $G = GL_n$ のとき $\beta \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ に対して次は同値である；

1) β は GL_n で正則．

2) β は

$$J_{n_1}(\alpha_1) \boxplus \cdots \boxplus J_{n_r}(\alpha_r) = \begin{bmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r}(\alpha_r) \end{bmatrix},$$

と $GL_n(\overline{\mathbb{F}})$-共役である．ここで $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\} \subset \overline{\mathbb{F}}$ は相異なり

$$J_m(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & & \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha \end{bmatrix}$$

は固有値 $\alpha \in \overline{\mathbb{F}}$ の Jordan 細胞である．

3) $\beta \in M_m n(\mathbb{F})$ の固有多項式は β の最小多項式である．

4) $\{X \in M_n(\mathbb{F}) \mid X\beta = \beta X\} = \mathbb{F}[\beta]$.

更に

命題 1.3.3 $G \subset GL_n$ が古典群で $\overline{\mathbb{F}}$ 上の Weyl 群が A-型（即ち "任意の置換と任意の符号変更により生成された群"）のとき，$\beta \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ に対して，β が G で正則である必要十分条件は β が GL_n で正則なることである．

注意 1.3.4 本稿では $\mathbb{F} = O/\mathfrak{p}$ であるが，この場合 $\beta \in \mathfrak{gl}_n(O)$ に対して次は同値である；

1) $\widehat{\beta} = \beta \pmod{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ は GL_n で正則，

2) $\{X \in M_n(O/\mathfrak{p}^l) \mid [X\overline{\beta}] = 0\} = O/\mathfrak{p}^l[\overline{\beta}]$ $(\forall l > 0)$,

3) $\{X \in M_n(O) \mid [X, \beta] = 0\} = O[\beta]$.

1.4 設定

加法群 F の連続なユニタリ指標 τ を一つ固定して

$$\{x \in F \mid \tau(xO) = 1\} = O$$

であるとする.

$G \subset GL_n$ を O 上の滑らかな群スキームとして, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ をその Lie 環とする. $\mathfrak{g}$ は O 上のアフィンスキームである. 従って任意の O-代数 K に対して $G(K)$ は K 上の一般線形群 $GL_n(K)$ の部分群であり, $\mathfrak{g}(K)$ は K 上の Lie 環 $\mathfrak{gl}_n(K) = M_n(K)$ ($[X,Y] = XY - YX$) の K-部分 Lie 環である. $\mathfrak{gl}_n$ の trace form

$$\mathrm{tr} : \mathfrak{gl}_n \times_O \mathfrak{gl}_n \to \mathcal{O} = \mathrm{Spec}(O[t])$$

の $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ への制限を $B : \mathfrak{g} \times_O \mathfrak{g} \to \mathcal{O}$ とする. 即ち, 任意の O- 代数 K に対して $X, Y \in \mathfrak{g}(K) \subset \mathfrak{gl}_n(K) = M_n(K)$ とすれば $B(X,Y) = \mathrm{tr}(XY) \in K$ である. G は O 上滑らかだから任意の $0 < r \in \mathbb{Z}$ に対して自然な同型

$$\mathfrak{g}(O)/\varpi^r \mathfrak{g}(O) \tilde{\to} \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^r) = \mathfrak{g}(O) \otimes_O O/\mathfrak{p}^r$$

が成り立つ ([4, p.215, Proposition]). また任意の $0 < l < r$ に対して自然な全射 $G(O/\mathfrak{p}^r) \to G(O/\mathfrak{p}^l)$ の核を $K_l(O/\mathfrak{p}^r)$ と書く.

ここで次の三つの条件が満たされると仮定する ;

(I) $B : \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \times \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ は非退化,

(II) $r = l + l'$ $(0 < l' \leq l < r)$ とすると群同型

$$\mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l'}) \tilde{\to} K_l(O/\mathfrak{p}^r) \quad (\overline{X} \mapsto \overline{1_n + \varpi^l X})$$

が成り立つ,

(III) $r = 2l - 1$ が奇数のとき写像

$$\mathfrak{g}(O) \to K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r) \quad (X \mapsto \overline{1_n + \varpi^{l-1} X^{l-1} + 2^{-1} \varpi^{2l-2} X^{2l-2}})$$

がある.

条件 (I) から任意の $l > 0$ に対して $B : \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^l) \times \mathfrak{g})O/\mathfrak{p}^l) \to O/\mathfrak{p}^l$ が非退化であり, 更に $B : \mathfrak{g}(O) \times \mathfrak{g}(O) \to O$ が非退化であることが示される. 条件 (II),(III) の写像は “指数写像” の truncation とみなせる.

$G = GL_n, Sp_{2n}$ 等古典群は簡単な付加条件の下でこれらの条件を満たす.

以下, $1 < r \in \mathbb{Z}$ を固定して $r = l + l'$ $(0 < l' \leq l < r)$ なる最小の整数 l をとる. 即ち r が偶数ならば $r = 2l, l' = l$ であり, r が奇数なら

ば $r=2l-1, l'=l-1$ である．条件 (II) から可換群 $K_l(O/\mathfrak{p}^r)$ の指標は $\beta \in \mathfrak{g}(O)$ に対して

$$\psi_\beta(h) = \tau\left(\varpi^{-l'}B(X,\beta)\right)$$

$(h=\overline{1_n+\varpi^l X} \in K_l(O/\mathfrak{p}^r), X \in \mathfrak{g}(O))$ により尽くされる．このとき $g \in G(O/\mathfrak{p}^r)$ に対して

$$\psi_\beta(g^{-1}hg) = \psi_{\mathrm{Ad}(g)\beta}(h) \qquad (h \in K_l(O/\mathfrak{p}^r))$$

だから

$$G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta} = \{\overline{g} \in G(O/\mathfrak{p}^r) \mid \mathrm{Ad}(g)\beta \equiv \beta \pmod{\mathfrak{p}^{l'}}\}$$

である．Clifford の方法に従って $\mathrm{Irr}(G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta}, \psi_\beta)$ を決定することが目標である．ここで $G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta}$ の構造に関して一つの仮定をする；

仮定 1.4.1 $G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta} = \mathcal{C}\cdot K_{l'}(O/\mathfrak{p}^r)$ なる可換部分群 $\mathcal{C} \subset G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta}$ が存在する．

注意 1.4.2 $\widehat{\beta} = \beta \pmod{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ が GL_n で正則（1.3 参照）ならば注意 1.3.4 より $G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta}$ の可換部分群 $\mathcal{C} = G(O/\mathfrak{p}^r) \cap \left(O/\mathfrak{p}^r[\overline{\beta}]\right)^\times$ をとれば仮定 1.4.1 が成り立つ．

注意 1.4.3 $r=l+l'$ $(0<l'\le l)$ とすると $r-1 \ge l$ だから $K_{r-1}(O/\mathfrak{p}^r) \subset K_l(O/\mathfrak{p}^r)$ である．$\beta \in \mathfrak{g}(O)$ に対して

$$\begin{aligned}\psi_\beta|_{K_{r-1}(O/\mathfrak{p}^r)} = 1 \Leftrightarrow 1 &= \psi_\beta\left(\overline{1_n+\varpi^{r-1}X}\right) \\ &= \tau\left(\varpi^{-1}B(X,\beta)\right) \text{ for } \forall X \in \mathfrak{g}(O) \\ \Leftrightarrow \widehat{\beta} &= 0 \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}).\end{aligned}$$

従って $\widehat{\beta} \neq 0$ ならば $\mathrm{Irr}(G(O/\mathfrak{p}^r), \psi_\beta)$ の元は自然な全射 $G(O/\mathfrak{p}^r) \to G(O/\mathfrak{p}^{r-1})$ を経由しない．

1.5 $r=2l$ が偶数のとき

前節の設定の下で $r=2l$ は偶数であるとする．仮定 1.4.1 から

$$G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta} = \mathcal{C}\cdot K_l(O/\mathfrak{p}^r)$$

なる可換部分群 $\mathcal{C} \subset G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta}$ が存在する．可換群 $\mathcal{C}$ の指標群 $\widehat{\mathcal{C}}$ の部分集合

$$\widehat{\mathcal{C}}_{\psi_\beta} = \left\{\theta \in \widehat{\mathcal{C}} \mid \mathcal{C} \cap K_l(O/\mathfrak{p}^r) \text{ 上では } \theta = \psi_\beta\right\}$$

の元 θ に対して，$G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta}$ の一次元表現 $\theta\cdot\psi_\beta$ が $gh \mapsto \theta(g)\cdot\psi_\beta(h)$ $(g \in \mathcal{C}, h \in K_l(O/\mathfrak{p}^r))$ により定義される．更に $\theta \mapsto \theta\cdot\psi_\beta$ は $\widehat{\mathcal{C}}_{\psi_\beta}$ から $\mathrm{Irr}(G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta}, \psi_\beta)$ への全単射を与えることが容易に示される．よって定理 1.2.1 より

定理 1.5.1 $\widehat{\mathcal{C}}_{\psi_\beta}$ から $\mathrm{Irr}(G(O/\mathfrak{p}^r),\psi_\beta)$ への全単射が

$$\theta \mapsto \mathrm{Ind}_{G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta}}^{G(O/\mathfrak{p}^r)}(\theta\cdot\psi_\beta)$$

により与えられる.

以下の各節では, $r=2l-1\geq 3$ が奇数の場合を考察するが, その前に有限体上の代数群に付随した Schur multiplier を一つ定義しておく.

2 有限体上の代数群に付随する Schur multiplier

2.1 定義

$G\subset GL_n$ を有限体 $\mathbb{F}$ 上の代数群として, G の $\mathbb{F}$ 上の Lie 環 $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ に対して

$$B:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{F} \qquad (B(X,Y)=\mathrm{tr}(XY))$$

は非退化とする. $\beta\in\mathfrak{g}$ は中心の元ではないとし, $\rho: Z_{\mathfrak{g}}(\beta)\to\mathbb{C}^\times$ は加法群 $Z_{\mathfrak{g}}(\beta)$ の指標とする. このとき $\mathbb{V}_\beta=\mathfrak{g}/Z_{\mathfrak{g}}(\beta)$ は非退化交代形式 $\langle\dot{X},\dot{Y}\rangle_\beta=B([X,Y],\beta)$ に関して $\mathbb{F}$ 上の斜交空間となる.

$$G(\mathbb{F})_\beta=\{g\in G(\mathbb{F})\mid \mathrm{Ad}(g)\beta=\beta\}$$

とおくと $g\in G(\mathbb{F})_\beta$ に対して $\sigma_g\in Sp(\mathbb{V}_\beta)$ が $X \pmod{Z_{\mathfrak{g}}(\beta)}\mapsto \mathrm{Ad}(g)^{-1}X \pmod{Z_{\mathfrak{g}}(\beta)}$ により定義される. さて $v\mapsto[v]$ を完全列

$$0\to Z_{\mathfrak{g}}(\beta)\to\mathfrak{g}\to\mathbb{V}_\beta\to 0$$

の $\mathbb{V}_\beta$ 上の $\mathbb{F}$-線形な切断として, $v\in\mathbb{V}_\beta, g\in G(\mathbb{F})_\beta$ に対して

$$\gamma(v,g)=\gamma_{\mathfrak{g}}(v,g)=\mathrm{Ad}(g)^{-1}[v]-[v\sigma_g]\in Z_{\mathfrak{g}}(\beta)$$

とおく. すると $v\mapsto\rho(\gamma(v,g))$ は加法群 $\mathbb{V}_\beta$ の指標となるから $\rho(\gamma(v,g))=\widehat{\tau}(\langle v,v_g\rangle_\beta)$ $(\forall v\in\mathbb{V}_\beta)$ なる $v_g\in\mathbb{V}_\beta$ が定まる.

$$G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}=\{g\in G(\mathbb{F})\mid \mathrm{Ad}(g)X=X\ \forall X\in Z_{\mathfrak{g}}(\beta)\}$$

は $G(\mathbb{F})_\beta$ の部分群で, 任意の $g,h\in G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}$ に対して

$$v_{gh}=v_h\sigma_g^{-1}+v_g \tag{1}$$

となる. そこで

$$c_{\beta,\rho}(g,h)=\widehat{\tau}\left(2^{-1}\langle v_g,v_{gh}\rangle_\beta\right) \qquad (g,h\in G(\mathbb{F})_\beta^{(c)})$$

とおくと, 関係式 (1) より次の命題が示される;

命題 2.1.1 $G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}$ は $\mathbb{C}^\times$ に自明に作用するとして

1) $c_{\beta,\rho} \in Z^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$,

2) cohomology class $[c_{\beta,\rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ は $\mathbb{F}$-線形切断 $v \mapsto [v]$ の選択に依らない,

3) $c_{\beta,\rho}(g,h)^{-1} = c_{\beta,\rho}(h^{-1}, g^{-1})$.

命題 2.1.2 指標 $\rho : Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \to \mathbb{C}^\times$ を加法群 $\mathfrak{g}$ の指標 $\widetilde{\rho} : \mathfrak{g} \to \mathbb{C}^\times$ に延長したとき

$$c_{\beta,\rho}(g,h) = \widetilde{\rho}\left(2^{-1}\mathrm{Ad}(g)[v_h]\right) \cdot \widetilde{\rho}\left(2^{-1}[v_{gh}]\right)^{-1} \cdot \widetilde{\rho}\left(2^{-1}[v_g]\right)$$

$(g, h \in G(\mathbb{F})_\beta^{(c)})$ である.

2.2 係数拡大との関係

有限次拡大 $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ の拡大次数は $\mathbb{F}$ の標数と素であるとして，$T'_{\mathbb{K}/\mathbb{F}} = (\mathbb{K} : \mathbb{F})^{-1} T_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}$ とおく．$\mathbb{K}$ の加法群の指標 $\widetilde{\tau} = \tau \circ T'_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}$ は $\mathbb{F}$ の加法群の指標 τ の延長となる．$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$ の $\mathbb{K}$-双線形延長 $B : \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \times \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ は非退化である．指標 $\rho : Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \to \mathbb{C}^\times$ に対して

$$\widetilde{\rho} : Z_{\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}}(\beta) = Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K} \xrightarrow{1 \otimes T'_{\mathbb{K}/\mathbb{F}}} Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^\times$$

とおくと，次の命題が成り立つ；

命題 2.2.1 $[c_{\beta,\rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ は制限写像

$$\mathrm{Res} : H^2(G(\mathbb{K})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times) \to H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$$

による $[c_{\beta,\widetilde{\rho}}] \in H^2(G(\mathbb{K})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ の像である.

2.3 部分代数群との関係

$\mathbb{F}$ 上の部分代数群 $G \subset H \subset GL_n$ があって，H の $\mathbb{F}$ 上の Lie 環を $\mathfrak{h}$ としたとき

$$\widetilde{B} : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \to \mathbb{F} \qquad (\widetilde{B}(X,Y) = \mathrm{tr}(XY))$$

が非退化であるとする．このとき

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^\perp, \qquad \mathfrak{g}^\perp = \{X \in \mathfrak{h} \mid \widetilde{B}(X, \mathfrak{g}) = 0\}$$

である．中心にない元 $\beta \in \mathfrak{g}$ に対して

$$Z_{\mathfrak{h}}(\beta) = Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \oplus \left(\mathfrak{g}^\perp\right)_\beta, \qquad \left(\mathfrak{g}^\perp\right)_\beta = Z_{\mathfrak{h}}(\beta) \cap \mathfrak{g}^\perp$$

となるから

$$\widetilde{\mathbb{V}}_\beta = \mathfrak{h}/Z_{\mathfrak{h}}(\beta) = \mathbb{V}_\beta \oplus \left(\mathfrak{g}^\perp / \left(\mathfrak{g}^\perp\right)_\beta\right)$$

は斜交空間 $\widetilde{\mathbb{V}}_\beta$ の直交分解となる．$\mathbb{F}$-ベクトル空間の完全列

$$0 \to Z_{\mathfrak{h}}(\beta) \to \mathfrak{h} \to \widetilde{\mathbb{V}}_\beta \to 0$$

の $\mathbb{F}$-線形切断 $v \mapsto [v]$ で $[\mathbb{V}_\beta] = \mathfrak{g}$ かつ $[Z_{\mathfrak{g}}(\beta)/\left(\mathfrak{g}^\perp\right)_\beta] = \mathfrak{g}^\perp$ なるものをとる．加法群の指標 $\rho : Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \to \mathbb{C}^\times$ に対して

$$\widetilde{\rho} : Z_{\mathfrak{h}}(\beta) = Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \oplus \left(\mathfrak{g}^\perp\right)_\beta \xrightarrow{\text{projection}} Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \xrightarrow{\rho} \mathbb{C}^\times$$

とおくと次の命題が成り立つ；

命題 2.3.1 $G(\mathbb{F})_\beta^{(c)} \subset H(\mathbb{F})_\beta^{(c)}$ と仮定する．このとき $[c_{\beta,\rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ は制限写像

$$\mathrm{Res} : H^2(H(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times) \to H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$$

による $[c_{\beta,\widetilde{\rho}}] \in H^2(H(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ の像である．

特に $H = GL_n$ の場合

命題 2.3.2 $\beta \in \mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n$ が GL_n で正則ならば

1) $G(\mathbb{F})_\beta^{(c)} = G(\mathbb{F})_\beta \subset GL_n(\mathbb{F})_\beta = GL_n(\mathbb{F})_\beta^{(c)}$,

2) $[c_{\beta,\rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ は制限写像

$$\mathrm{Res} : H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times) \to H^2(GL_n(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$$

による $[c_{\beta,\widetilde{\rho}}] \in H^2(GL_n(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ の像である．

2.4 代数群の直積との関係

$G = G_1 \times G_2$ が $\mathbb{F}$ 上の代数群 G_i の直積の場合を考える．$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ は G_i の $\mathbb{F}$ 上の Lie 環の直積（直和）であって，$\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathfrak{g}$ は $\beta_i \in \mathfrak{g}_i$ がともに中止の元ではないとする．このとき指標 $\rho_i : Z_{\mathfrak{g}_i}(\beta_i) \to \mathbb{C}^\times$ に対して $Z_{\mathfrak{g}}(\beta)$ の指標

$$\rho = \rho_1 \times \rho_2 : Z_{\mathfrak{g}}(\beta) = Z_{\mathfrak{g}_1}(\beta_1) \times Z_{\mathfrak{g}_2}(\beta_2) \to \mathbb{C}^\times$$

が定義される．$\mathbb{F}$-ベクトル空間の完全列

$$0 \to Z_{\mathfrak{g}_i}(\beta_i) \to \mathfrak{g}_i \to \mathbb{V}_{\beta_i} \to 0$$

の $\mathbb{F}$-線形切断 $v \mapsto [v]_i$ に対して

$$0 \to Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \to \mathfrak{g} \to \mathbb{V}_\beta \to 0$$

の $\mathbb{F}$-線形切断が

$$\mathbb{V}_\beta = \mathbb{V}_{\beta_1} \times \mathbb{V}_{\beta_2} \to \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2 \quad ((v_1, v_2) \mapsto ([v_1]_1, [v_2]_2))$$

により与えられる．よって $g = (g_1, g_2), h = (h_1, h_2) \in G$ $(g_i, h_i \in G_i)$ に対して

$$c_{\beta,\rho}(g,h) = c_{\beta_1,\rho_1}(g_1,h_1) \cdot c_{\beta_2,\rho_2}(g_2,h_2)$$

となる．

2.5 Schur multiplier の自明性 (GL_n の場合)

$G = GL_n$ として $\beta \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ は正則であるとする．よって

$$G(\mathbb{F})_\beta = G(\mathbb{F})_\beta^{(c)} = \mathbb{F}[\beta]^\times$$

である．

$$\chi_\beta(t) = \prod_{i=1}^r p_i(t)^{e_i}, \qquad p_i(t) \in \mathbb{F}[t] : \text{既約多項式}$$

とすると，$\beta \in M_n(\mathbb{F})$ の $G(\mathbb{F})$-共役をとって

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_i & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_r \end{bmatrix}, \qquad \beta_i \in M_{n_i}(\mathbb{F}) \text{ s.t. } \chi_{\beta_i}(t) = p_i(t)^{e_i}$$

としてよい．このとき $\beta_i \in \mathfrak{gl}_{n_i}(\mathbb{F})$ は正則である．ここで GL_n の部分代数群

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} g_1 & & \\ & \ddots & \\ & & g_r \end{bmatrix} \in GL_n \;\middle|\; g_i \in GL_{n_i} \right\}$$

の $\mathbb{F}$ 上の Lie 環は

$$\mathfrak{l} = \left\{ \begin{bmatrix} X_1 & & \\ & \ddots & \\ & & X_r \end{bmatrix} \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \;\middle|\; X_i \in \mathfrak{gl}_{n_i}(\mathbb{F}) \right\}$$

となる．更に $\beta \in \mathfrak{l}$ で $Z_\mathfrak{l}(\beta) = Z_\mathfrak{g}(\beta)$ かつ $L(\mathbb{F})_\beta^{(c)} = G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}$ である．よって命題 2.3.2 と 2.4 節の結果から

$$c_{\beta,\rho}(g,h) = \prod_{i=1}^r c_{\beta_1,\rho_i}(g_i,h_i)$$

となる．よって $[c_{\beta,\rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})_\beta^{(c)}, \mathbb{C}^\times)$ の自明性を示すには $\chi_\beta(t) = p(t)^e$ ($p(t) \in \mathbb{F}[t]$ は既約多項式) の場合に示せば十分である．

I. $\chi_\beta(t)=p(t)$ **の場合** このとき $\mathbb{F}[\beta]$ は有限体となるから $G(\mathbb{F})^{(c)}_\beta=\mathbb{F}[\beta]^\times$ は巡回群となり，Schur multiplier の一般論（[8, Prop.2.1.1]）より

$$H^2(G(\mathbb{F})^{(c)}_\beta,\mathbb{C}^\times)=1$$

である．

II. $\chi_\beta(t)=(t-\alpha)^n$ **の場合** $\beta\in M_n(\mathbb{F})$ の $G(\mathbb{F})$-共役をとって

$$\beta=J_n(\alpha)=\begin{bmatrix}\alpha & 1 & & \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ & & & \alpha\end{bmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$$

であるとしてよい．更に $\mathrm{ch}\,\mathbb{F}>n$ であると仮定する．

$f(t)\in\mathbb{F}[t]$ s.t. $\deg f(t)<n$ に対して

$$f(J_n(\alpha))=f(\alpha 1_n+J_n(0))=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}J_n(0)^k$$

となるから

$$\begin{aligned}\mathbb{F}[\beta]&=\mathbb{F}[J_n(0)]\\&=\left\{a_0 1_n+a_1J_n(0)+a_2J_n(0)^2+\cdots+a_{n-1}J_n(0)^{n-1}|a_k\in\mathbb{F}\right\}\end{aligned}$$

となる．よって群の同型

$$\mathbb{F}^\times\times\mathbb{F}^{n-1}\tilde{\to}\mathbb{F}[\beta]^\times\quad\left((r,s)\mapsto r\cdot\exp\left(\sum_{i=1}^{n-1}s_kJ_n(0)^k\right)\right)$$

が成り立つ．ここで

$$\exp S=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}S^k\quad\text{for}\quad S=\begin{bmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{bmatrix}\in M_n(\mathbb{F})$$

である．特に $|\mathbb{F}[\beta]^\times|=q^{n-1}(q-1)=q^n\left(1-\frac{1}{q}\right)$ である．また

$$X=\sum_{k=0}^{n-1}x_kJ_n(0)^k,A=\sum_{k=0}^{n-1}a_kJ_n(0)^k\in\mathbb{F}[\beta]$$

に対して $\mathrm{tr}(X\,{}^tA)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)x_ka_k$ だから，群の同型

$$\mathbb{F}[\beta]\tilde{\to}\mathbb{F}[\beta]^\frown\quad(A\mapsto\rho_A=[X\mapsto\tau(\mathrm{tr}(X^tA))])$$

が成り立つ．ここで

$$V = \{X \in \mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F}) \mid \mathrm{tr}(X\,{}^tA) = 0 \,\mathrm{for}\, \forall A \in \mathbb{F}[\beta]\}$$

とおくと，$\mathrm{ch}\,\mathbb{F} > n$ より $V \cap \mathbb{F}[\beta] = 0$ だから

$$\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{g}_\beta \qquad (\mathfrak{g}_\beta = \mathbb{F}[\beta]).$$

そこで V に関して $[v] \in V$ $(v \in \mathbb{V}_\beta)$ 及び $\gamma(v,g) \in \mathfrak{g}_\beta$ $(v \in \mathbb{V}_\beta, g \in G(\mathbb{F})_\beta = G(\mathbb{F})_\beta^{(c)} = \mathbb{F}[\beta]^\times)$ を定義する．特に $\rho = \rho_A$ $(A \in \mathbb{F}[\beta])$ のとき，$\widetilde{\rho}(X) = \tau(\mathrm{tr}(X\,{}^tA))$ $(X \in \mathfrak{g})$ とすれば，$\widetilde{\rho}(X) = 0$ $(\forall X \in V)$ だから，命題 2.1.2 より

$$c_{\beta,\rho}(g,h) = \tau\left(2^{-1}\langle v_g, g v_h g^{-1}\rangle_\beta\right) = \tau\left(2^{-1}\mathrm{tr}(g X_h g^{-1}\,{}^tA)\right)$$

となる．

例 2.5.1 $n = 2$, $\beta = J_2(\alpha)$ で $\mathrm{ch}\,\mathbb{F} > 3$ のとき．

$$\rho = \rho_A \in \mathbb{F}[\beta]^\frown, \qquad A = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 \\ 0 & \rho_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[\beta]$$

とすると

$$g = \exp(\begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}), h = \exp(\begin{bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \in \mathbb{F}[\beta]^\times$$

に対して

$$\begin{aligned} c_{\beta,\rho}(g,h) &= \tau\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}(g X_h g^{-1}\,{}^tA)\right) = \tau\left(\frac{1}{2}\rho_1^2 \cdot (r^2 u + r u^2)\right) \\ &= \alpha_A(h)\alpha_A(gh)^{-1}\alpha_A(g). \end{aligned}$$

ここで

$$\alpha_A(g) = \tau\left(-\frac{1}{2\cdot 3}\rho_1^2 \cdot r^3\right).$$

例 2.5.2 $n = 3$, $\beta = J_3(\alpha)$ で $\mathrm{ch}\,\mathbb{F} > 5$ のとき．

$$\rho = \rho_A \in \mathbb{F}[\beta]^\frown, \qquad A = \begin{bmatrix} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 \\ 0 & \rho_0 & \rho_1 \\ 0 & 0 & \rho_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}[\beta]$$

とすると

$$g = \exp(\begin{bmatrix} 0 & r & s \\ 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}), h = \exp(\begin{bmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}) \in \mathbb{F}[\beta]^\times$$

に対して

$$c_{\beta,\rho}(g,h) = \tau\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}(g X_h g^{-1}\,{}^tA)\right) = \alpha_A(h)\alpha_A(gh)^{-1}\alpha_A(g)$$

である．ここで

$$\alpha_A(g)=\tau\left(-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\rho_1^2\cdot r^3+2\rho_1\rho_2\cdot r^2s+\rho_2^2\cdot\left(rs^2-\frac{1}{2^2\cdot 5}r^5\right)\right\}\right).$$

例 2.5.3 $n=4$, $\beta=J_4(\alpha)$ で $\mathrm{ch}\,\mathbb{F}>7$ のとき．

$$\rho=\rho_A\in\mathbb{F}[\beta]\widehat{,}\qquad A=\begin{bmatrix}\rho_0&\rho_1&\rho_2&\rho_3\\0&\rho_0&\rho_1&\rho_2\\0&0&\rho_0&\rho_1\\0&0&0&\rho_0\end{bmatrix}\in\mathbb{F}[\beta]$$

とすると

$$g=\exp(\begin{bmatrix}0&r&s&t\\0&0&r&s\\0&0&0&r\\0&0&0&0\end{bmatrix}),\ h=\exp(\begin{bmatrix}0&u&v&w\\0&0&u&v\\0&0&0&u\\0&0&0&0\end{bmatrix}\in\mathbb{F}[\beta]^\times$$

に対して

$$c_{\beta,\rho}(g,h)=\alpha_A(h)\alpha_A(gh)^{-1}\alpha_A(g).$$

ここで

$$\alpha_A(g)=\tau\left[-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}\rho_1^2\cdot r^3+2\rho_1\rho_2\cdot r^2s+\rho_2^2\cdot\left(2rs^2+r^2t-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}r^5\right)\\+\rho_1\rho_3\cdot\left(2rs^2+2r^2t+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}r^5\right)\\+\rho_2\rho_3\cdot\left(4rst+\frac{4}{3}s^3-\frac{1}{3}r^4s\right)\\+\rho_3^2\cdot\left(s^2t+rt^2+\frac{1}{2^2\cdot 3}r^4t-\frac{1}{3}r^3s^2+\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 7}r^7\right)\end{array}\right\}\right].$$

2.6 予想と問題

前節の結果と命題 2.2.1 から次の主張が成り立ちそうである；

予想 2.6.1 $G=GL_n$ において $\beta\in\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ が正則ならば，$\mathrm{ch}\,\mathbb{F}$ が十分大きいとき，任意の加法的指標 $\rho:Z_{\mathfrak{g}}(\beta)\to\mathbb{C}^\times$ に対して cohomology class $[c_{\beta,\rho}]\in H^2(G(\mathbb{F})^{(c)}_\eta,\mathbb{C}^\times)$ は自明である．

1.4 節にあるような O-部分群スキーム $G\subset GL_n$ に対して命題 2.3.2 を適用すれば，予想 2.6.1 より次の主張が成り立つ；

> $\beta\in\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ が GL_n で正則ならば，$\mathrm{ch}\,\mathbb{F}$ が十分大きいとき，任意の加法的指標 $\rho:Z_{\mathfrak{g}}(\beta)\to\mathbb{C}^\times$ に対して cohomology class $[c_{\beta,\rho}]\in H^2(G(\mathbb{F})^{(c)}_\beta,\mathbb{C}^\times)$ は自明である．

ところで命題 1.3.3 に注意すれば，上の命題は次の命題を導く；

> $G \subset GL_n$ が古典群で $\overline{\mathbb{F}}$ 上の Weyl 群が A-型のとき，$\beta \in \mathfrak{g}$ が正則ならば，ch $\mathbb{F}$ が十分大きいとき，任意の加法的指標 $\rho : Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \to \mathbb{C}^\times$ に対して cohomology class $[c_{\beta,\rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})^{(c)}_\beta, \mathbb{C}^\times)$ は自明である．

そこで次のような問題を考えることが出来る；

問題 2.6.2 $\beta \in \mathfrak{g}$ は正則であるとする．ch $\mathbb{F}$ が十分大きければ，任意の加法的指標 $\rho : Z_{\mathfrak{g}}(\beta) \to \mathbb{C}^\times$ に対して cohomology class $[c_{\beta,\rho}] \in H^2(G(\mathbb{F})^{(c)}_\beta, \mathbb{C}^\times)$ は自明となるか？

3 r が奇数の場合の基本的な構成方法

3.1 有限群の表現論の簡単な命題

有限群 G の正規部分群 $N \triangleleft G$ をとり G/N は可換であるとする．N から $\mathbb{C}^\times$ への群準同型写像 ψ をとり $\psi(gng^{-1}) = \psi(n)$ $(\forall g \in G, n \in N)$ であるとする．すると

$$D_\psi : G/N \times G/N \to \mathbb{C}^\times$$

が $D_\psi(\overline{x}, \overline{y}) = \psi([x, y])$ $([x, y] = xyx^{-1}y^{-1})$ により定義されて，$\overline{x} \mapsto D_\psi(\overline{x}, *)$ は G/N から双対群 $(G/N)^\wedge$ への群準同型写像である．このとき次の命題が成り立つ；

命題 3.1.1 D_ψ が非退化のとき（即ち，$\overline{x} \mapsto D_\psi(\overline{x}, *)$ が群の同型 $G/N \xrightarrow{\sim} (G/N)^\wedge$ を与えるとき），G の既約表現 π_ψ で $\langle \pi_\psi, \psi \rangle_N > 0$ なるものが同型を除いて唯一存在する．更に

$$\mathrm{Ind}_N^G \psi = \bigoplus^{\dim \pi_\psi} \pi_\psi$$

なる既約分解が成り立ち，任意の $n \in N$ に対して $\pi_\psi(n)$ は $\psi(n)$-倍写像である．

3.2 既約表現の構成法と必要な仮定

自然な全射

$$\heartsuit : K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r) \to K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^{r-1}) \to \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1}) \to \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \tag{2}$$

$$\left(\begin{array}{ll} 1 + \varpi^{l-1}X \pmod{\mathfrak{p}^r} & \mapsto 1 + \varpi^{l-1}X \pmod{\mathfrak{p}^{r-1}} \\ & \mapsto X \pmod{\mathfrak{p}^{l-1}} \mapsto X \pmod{\mathfrak{p}} \end{array} \right)$$

による $Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}(\widehat{\beta})$ の逆像を $Z(O/\mathfrak{p}^r,\beta)$ とおく．$K_l(O/\mathfrak{p}^r) \subset Z(O/\mathfrak{p}^r,\beta)$ だから $\psi|_{K_l(O/\mathfrak{p}^r)} = \psi_\beta$ なる群準同型写像 $\psi : Z(O/\mathfrak{p}^r,\beta) \to \mathbb{C}^\times$ の全体を $Y(\psi_\beta)$ とおく．$[Z(O/\mathfrak{p}^r,\beta), Z(O/\mathfrak{p}^r,\beta)] \subset \mathrm{Ker}(\psi_\beta)$ だから $Y(\psi_\beta) \neq \emptyset$ である．$\psi \in Y(\psi_\beta)$ とする．任意の $x \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r), y \in Z(O/\mathfrak{p}^r,\beta)$ に対して

$$\psi(xyx^{-1}y^{-1}) = \psi_\beta(xyx^{-1}y^{-1}) = 1$$

だから

$$D_\psi : K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)/Z(O/\mathfrak{p}^r,\beta) \times K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)/Z(O/\mathfrak{p}^r,\beta) \to \mathbb{C}^\times$$

が

$$D_\psi(\dot{g}.\dot{h}) = \psi(ghg^{-1}h^{-1}) = \tau\left(\varpi^{-1}B([X,Y],\beta)\right)$$

$(g = \overline{1+\varpi^{l-1}X}, h = \overline{1+\varpi^{l-1}Y} \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r))$ により定義され，これは非退化である．よって命題 3.1.1 より次の命題が成り立つ；

命題 3.2.1 任意の $\psi \in Y(\psi_\beta)$ に対して，$\langle \psi, \pi_\psi \rangle_{Z(O/\mathfrak{p}^r,\beta)} > 0$ なる $K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ の既約表現 π_ψ が同型を除いて唯一存在する．更に

$$\mathrm{Ind}_{Z(O/\mathfrak{p}^r,\beta)}^{K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)} \psi = \bigoplus^{\dim \pi_\psi} \pi_\psi$$

なる既約分解が成り立ち，任意の $n \in Z(O/\mathfrak{p}^r,\beta)$ に対して $\pi_\psi(n)$ は $\psi(n)$-倍写像である．

ここで次を仮定する；

仮定 3.2.2 仮定 1.4.1 の可換部分群 $\mathcal{C}$ は $G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta}$ の部分群

$$\left\{ \overline{g} \in G(O/\mathfrak{p}^r) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathrm{Ad}(g)\beta \equiv \beta \pmod{\mathfrak{p}^l}, \\ \mathrm{Ad}(\widehat{g})X = X \quad \forall X \in Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}(\beta) \end{array} \right\}$$

に含まれる．

注意 3.2.3 仮定 1.4.1 と同様に，$\widehat{\beta} = \beta \pmod{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{F})$ が GL_n で正則（1.3 参照）ならば注意 1.3.4 より $G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta}$ の可換部分群 $\mathcal{C} = G(O/\mathfrak{p}^r) \cap \left(O/\mathfrak{p}^r[\widetilde{\beta}]\right)^\times$ をとれば仮定 3.2.2 が成り立つ．

仮定 3.2.2 の下では任意の $g \in \mathcal{C}$ に対して，$\psi(g^{-1}xg) = \psi(x)$ $(\forall x \in Z(O/\mathfrak{p}^r,\beta))$ となるから，π_ψ の g-共役は π_ψ と同値である；即ち $U(g) \in GL_{\mathbb{C}}(V_\psi)$ (V_ψ は π_ψ の表現空間) があって

$$\pi_\psi(g^{-1}xg) = U(g)^{-1} \circ \pi_{psi}(x) \circ U(g) \qquad (\forall x \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r))$$

が成り立つ．π_ψ は $K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ の既約表現だから，任意の $g,h \in \mathcal{C}$ に対して $c_U(g,h) \in \mathbb{C}^\times$ があって

$$U(g) \circ U(h) = c_U(g,h) \cdot U(gh)$$

となる．ここで $\mathcal{C}$ は $\mathbb{C}^\times$ に自明に作用するとして次が成り立つ；

1) $c_U \in Z^2(\mathcal{C}, \mathbb{C}^\times)$,

2) cohomology class $c_\psi = [c_U] \in H^2(\mathcal{C}, \mathbb{C}^\times)$ は各 $U(g) \in GL_{\mathbb{C}}(V_\psi)$ の選択に依らない．

更に cohomology class $c_\psi \in H^2(\mathcal{C}, \mathbb{C}^\times)$ が自明ならば

1) 任意の $g \in \mathcal{C}, x \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ に対して $\pi_\psi(g^{-1}xg) = U_\psi(g)^{-1} \circ \pi_\psi(x) \circ U_\psi(g)$,

2) 任意の $h \in \mathcal{C} \cap K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ に対して $U_\psi(h) = 1$

なる群準同型写像 $U_\psi : \mathcal{C} \to GL_{\mathbb{C}}(V_\psi)$ が存在する．よって $\mathcal{C} \cap K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ 上では $\theta = \psi$ となる $\theta \in \widehat{\mathcal{C}}$ をとれば，$G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_\beta} = \mathcal{C} \cdot K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ の V_ψ 上の表現 $\pi_{\beta,\psi}$ が

$$\pi_{\beta,\psi}(gh) = \theta(g) \cdot U_\psi(g) \circ \pi_\psi(h) \qquad (g \in \mathcal{C}, h \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r))$$

により定義される．そこで $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ とおいて

$$\widehat{\mathcal{C}} \times_{\mathcal{C}'} Y(\psi_\beta) = \left\{ (\theta, \psi) \in \widehat{\mathcal{C}} \times Y(\psi_\beta) \mid \theta = \psi \text{ on } \mathcal{C}' \right\}$$

とおくと次の定理が成り立つ；

定理 3.2.4 任意の $\psi \in Y(\psi_\beta)$ に対して cohomology class $c_\psi \in H^2(\mathcal{C}, \mathbb{C}^\times)$ は自明であるとする．このとき $(\theta, \psi) \mapsto \pi_{\beta,\psi}$ は $\widehat{\mathcal{C}} \times_{\mathcal{C}'} Y(\psi_\beta)$ から $\mathrm{Irr}(G(O/\mathfrak{p}^r)_{\psi_{beta}}, \psi_\beta)$ への全単射を与える．

よって定理 1.2.1 より

系 3.2.5 定理 3.2.4 の仮定の下で $(\theta, \psi) \mapsto \mathrm{Ind}_{G(O/\mathfrak{p})_{\psi_\beta}}^{G(O/\mathfrak{p}r)} \pi_{\theta,\psi}$ は $\widehat{\mathcal{C}} \times_{\mathcal{C}'} Y(\psi_\beta)$ から $\mathrm{Irr}(G(O/\mathfrak{p}^r), \psi_\beta)$ への全単射を与える．

4 Weil 表現

4.1 既約表現 π_ψ の構成

自然な全射 (2) の核は $K_l(O/\mathfrak{p}^r)$ で 1.4 節の条件 (II) より同型

$$\diamondsuit : \mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1}) \tilde{\to} K_l(O/\mathfrak{p}^r) \quad \left(S \pmod{\mathfrak{p}^{l-1}} \mapsto 1 + \varpi^l S \pmod{\mathfrak{p}^r}\right)$$

が成り立つから，群拡大

$$0 \to \mathfrak{g}(O_{l-1}) \xrightarrow{\diamondsuit} K_{l-1}(O_r) \xrightarrow{\heartsuit} \mathfrak{g}(\mathbb{F}) \to 0 \tag{3}$$

を得る．この群拡大の cohomology class を計算するために

$$X = \lambda(X) \pmod{\mathfrak{p}} \text{ for } \forall X \in \mathfrak{g}(\mathbb{F})$$

かつ $\lambda(0)=0$ なる任意の写像 $\lambda:\mathfrak{g}(\mathbb{F})\to\mathfrak{g}(O)$ をとれば 1.4 節の条件 (III) から

$$l:\mathfrak{g}(\mathbb{F})\to K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)\quad \big(X\mapsto 1+\varpi^{l-1}\lambda(X)+2^{-1}\varpi^{2l-2}\lambda(X)^2\pmod{\mathfrak{p}^r}\big)$$

が (3) の切断となる．ここから $\mathfrak{g}(\mathbb{F})$ の $\mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1})$ への作用は自明であり，$\mu:\mathfrak{g}(\mathbb{F})\times\mathfrak{g}(\mathbb{F})\to\mathfrak{g}(O)$ を

$$\lambda(X)+\lambda(Y)-\lambda(X+Y)=\varpi\cdot\mu(X,Y)\ \text{for}\ \forall X.Y\in\mathfrak{g}(\mathbb{F})$$

により定めると，$Z^2(\mathfrak{g}(\mathbb{F}),\mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1}))$ の二つの元

$$c=[(\widehat{X},\widehat{Y})\mapsto 2^{-1}\varpi^{l-2}[X,Y]\pmod{\mathfrak{p}^{l-1}}],\quad \mu=[(X,Y)\mapsto\mu(X,Y)\pmod{\mathfrak{p}^{l-1}}],$$

$(\widehat{X}=X\pmod{\mathfrak{p}}\in\mathfrak{g}(\mathbb{F}))$ が定義されて cohomology class $[c{+}\mu]\in H^2(\mathfrak{g}(\mathbb{F}),\mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1})$ が群拡大 (3) の cohomology class となる．そこで cohomology class $[c],[\mu]\in H^2(\mathfrak{g}(\mathbb{F}),\mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1})$ に付随する群拡大を $\mathbb{G},\mathbb{M}$ とする．即ち $\mathbb{G}=\mathfrak{g}(\mathbb{F})\times\mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1})$ の群演算を

$$(X,\overline{S})\cdot(Y,\overline{T})=(X+Y,\overline{S+T+2^{-1}\varpi^{l-2}[X,Y]})$$

により定義し，$\mathbb{M}=\mathfrak{g}(\mathbb{F})\times\mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1})$ の群演算を

$$(X,\overline{S})\cdot(Y,\overline{T})=(X+Y,\overline{S+T+\mu(X,Y)})$$

により定義する．$\mathbb{G},\mathbb{M}$ から $\mathfrak{g}(\mathbb{F})$ への自然な射影によるファイバー積

$$\mathbb{G}\times_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}\mathbb{M}=\{(X;S,T)=((X,S),(X,T))\in\mathbb{G}\times\mathbb{M}\}$$

から $K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ への全射

$$(X;\overline{S},\overline{T})\mapsto l(X)\cdot(1+\varpi^l(S+T))\pmod{\mathfrak{p}^r}$$

ができる．準同型写像 $B(*,\overline{\beta}):\mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1})\to O/\mathfrak{p}^{l-1}$ による $[c]\in H^2(\mathfrak{g}(\mathbb{F}),\mathfrak{g}(O/\mathfrak{p}^{l-1})$ の像 $[c_\beta]\in H^2(\mathfrak{g}(\mathbb{F}),O/\mathfrak{p}^{l-1})$ に付随する群拡大を $\mathcal{H}_\beta$ とする．即ち $\mathcal{H}_\beta=\mathfrak{g}(\mathbb{F})\times O/\mathfrak{p}^{l-1}$ の群演算を

$$(\widehat{X},\overline{s})\cdot(\widehat{Y},\overline{t})=((X+Y)\widehat{\ },\overline{s+t+2^{-1}\varpi^{l-2}B([X,Y],\beta)})$$

により定義する．自然な全射

$$\mathbb{G}\times_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}\mathbb{M}\to\mathbb{G}\to\mathcal{H}_\beta\quad((X;S,T)\mapsto(X,S)\mapsto(X,B(X,\beta)))$$

が出来るが，基本的な着想を説明するために，これを簡単に

$$(!):K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)\dashrightarrow\!\!\!\!\to\mathcal{H}_\beta$$

と書くことにする．$\mathcal{H}_\beta$ の中心は直積群 $Z(\mathcal{H}_\beta) = Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}(\widehat{\beta}) \times O/\mathfrak{p}^{l-1}$ であり

$$\mathcal{H}_\beta / Z(\mathcal{H}_\beta) = \mathfrak{g}(\mathbb{F})/Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})} = \mathbb{V}_\beta$$

は $\langle \dot{X}, \dot{Y} \rangle_\beta = B([X,Y], \widehat{\beta})$ に関する $\mathbb{F}$ 上の斜交空間となる．一方 (!) を通して $Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta)$ は $Z(\mathcal{H}_\beta)$ に写される．このとき $\psi \in Y(\psi_\beta)$ は

$$\psi : Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta) \overset{(!)}{\dashrightarrow\!\!\!\!\rightarrow} Z(\mathcal{H}_\beta) = Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}(\widehat{\beta}) \times O/\mathfrak{p}^{l-1} \xrightarrow{\rho \otimes \tau} \mathbb{C}^\times$$

により加法的指標 $\rho : Z_{\mathfrak{g}(\mathbb{F})}(\widehat{\beta}) \to \mathbb{C}^\times$ を誘導する．このとき自然な写像

$$H^2(\mathbb{V}_\beta, Z(\mathcal{H}_\beta) \xrightarrow{\rho \otimes \tau} H^2(\mathbb{V}_\beta, \mathbb{C}^1) \qquad (\mathbb{C}^1 = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid |z| = 1\})$$

により群拡大

$$1 \to Z(\mathcal{H}_\beta) \to \mathcal{H}_\beta \to \mathbb{V}_\beta to 0$$

に対応する群拡大を

$$1 \to \mathbb{C}^1 \to H(\mathbb{V}_\beta) \to \mathbb{V}_\beta \to 0$$

とすると，$H(\mathbb{V}_\beta) = \mathbb{V}_\beta \times \mathbb{C}^1$ は $\mathbb{F}$ 上の斜交空間 $(\mathbb{V}_\beta, \langle , \rangle_\beta)$ に付随する Heisenberg 群となる．従って斜交空間の偏極 $\mathbb{V}_\beta = \mathbb{W}' \oplus \mathbb{W}$ をとって中心指標 $[z \mapsto z]$ の Schrödinger 表現 $(\pi_\beta, L^2(\mathbb{W}'))$ をとれば，(!) を通して $K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ の $L^2(\mathbb{W}')$ 上の既約表現 π_ψ が決まる；

$$\pi_\psi : K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r) \overset{(!)}{\dashrightarrow\!\!\!\!\rightarrow} \mathcal{H}_\beta \to H(\mathbb{V}_\beta) \xrightarrow{\pi_\beta} GL_{\mathbb{C}}(L^2(\mathbb{W}')).$$

更に任意の $z \in Z(O/\mathfrak{p}^r, \beta)$ に対して $\pi_\psi(z)$ は $\psi(z)$-倍写像である．

4.2 cohomology class c_ψ の明示公式

$g \in \mathcal{C}$ は共役により $K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ に作用する．その作用は

$$K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r) \overset{(!)}{\dashrightarrow\!\!\!\!\rightarrow} \mathcal{H}_\beta \to H(\mathbb{V}_\beta)$$

を通して $(v,s) \in H(\mathbb{V}_\beta)$ に $(v,s)^g = (v\sigma_{\widehat{g}}, \widehat{\tau}(\langle v, v_{\widehat{g}} \rangle_\beta))$ により作用する．ここで $\sigma_{\widehat{g}} \in Sp(\mathbb{V}_\beta)$ と $v_{\widehat{g}} \in \mathbb{V}_\beta$ は $\widehat{g} \in G(\mathbb{F})^{(c)}_{\widehat{\beta}}$ に対して 2.1 節で定義した通りである．一方，有限体上の Weil 表現の一般論より群準同型写像

$$\omega_\beta : Sp(\mathbb{V}_\beta) \to GL_{\mathbb{C}}(\mathbb{V}_\beta)$$

があって，任意の $\sigma \in Sp(\mathbb{V}_\beta)$ と $h \in H(\mathbb{V}_\beta)$ に対して

$$\pi_\beta(v\sigma, s) = \omega_\beta(\sigma)^{-1} \circ \pi_\beta(v,s) \circ \omega_\beta(\sigma)$$

となる．そこで $g \in \mathcal{C}$ に対して

$$U(g) = \pi_\beta(v_{\widehat{g}}, 1) \circ \omega_\beta(\sigma_{\widehat{g}}) \in GL_{\mathbb{C}}(L^2(\mathbb{W}'))$$

とおくと，任意の $g \in \mathcal{C}$ と $x \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ に対して

$$\pi_\psi(g^{-1}xg) = U(g)^{-1} \circ \pi_\psi(x) \circ U(g)$$

となり，更に任意の $g, h \in K_{l-1}(O/\mathfrak{p}^r)$ に対して

$$U(g) \circ U(h) = c_{\widehat{\beta},\rho}(\widehat{g}, \widehat{h}) \cdot U(gh)$$

となる．従って $c_\psi(g,h) = c_{\widehat{\beta},\rho}(\widehat{g}, \widehat{h})$ $(g, h \in \mathcal{C})$ となる．よって問題 2.6.2 に肯定的に答えることが出来れば次の命題が成り立つ；

> $\widehat{\beta} \in \mathfrak{g}(\mathbb{F})$ が正則なる $\beta \in \mathfrak{g}(O)$ に対して，ch $\mathbb{F}$ が十分大きければ，任意の $\psi \in Y(\psi_\beta)$ に対して cohomology class $c_\psi \in H^2(\mathcal{C}, \mathbb{C}^\times)$ は自明である．

従って系 3.2.5 により，$\widehat{\beta} \in \mathfrak{g}(\mathbb{F})$ が正則なる $\beta \in \mathfrak{g}(O)$ に対しては $\mathrm{Irr}(G(O/\mathfrak{p}^r), \psi_\beta)$ が決定される．

参考文献

[1] A.Borel : Linear Algebraic Groups (Second Enlarged Edition, Springer-Verlag, 1991)

[2] A.Borel, et alii : Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups (Lecture Notes in Math. 131, Springer-Verlag, 1970)

[3] P.Deligne, G.Lusztig : *Representations of reductive groups over finite field* (Ann. of Math. 103 (1976), 103–161

[4] M.Demazure, P.Gabriel : Groupes Algébriques (Masson, 1970)

[5] P.Gérardin : *Sur les représentations du groupe linéaire général sur un corp p-adique* (Sém. Delange-Pisot-Poitou, 14 (1972-1973), exp. 12

[6] P.Gérardin : *Weil representations associated to finite fields* (J.of Algebra, 46 (1977), 54–101)

[7] J.A.Green : *The characters of the finite general linear groups* (Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 402-447)

[8] G.Karpilovsky : The Schur Multiplier (Vlarendon Press, Oxford, 1987)

[9] G.Hill : *A Jordan decomposition of representations for* $GL_n(\mathcal{O})$ (Comm. Algebra 21 (1993), 3529-3534)

[10] G.Hill : *On the nilpotent representations of* $GL_n(\mathcal{O})$ (Manuscripta Math. 82 (1994), 293-311)

[11] G.Hill : *Semisimple and cuspidal characters of* $GL_n(\mathcal{O})$ (Comm. Algebra 23 (1995), 7-25)

[12] G.Hill : *Regular elements and regular characters of* $GL_n(\mathcal{O})$ (J. Algebra 174 (1995), 610-635)

[13] G.Karpilovsky : The Schur Multiplier (Oxford Univ. Press, 1987)

[14] A.J.Shalika : *Representation of the two by two unimodular group over local fields* (Thesis (Ph.D), The Johns Hopkins Univ. 1966, in Contributions to Automorphic Forms, Geometry, and Number Theory. Johns Hopkins Univ. Press, (2004),1-38)

[15] T.Shintani : *On certain square integrable irreducible unitary representations of some* $\mathfrak{p}$*-adic linear groups* (J. Math. Soc. Japan, 20 (1968), 522–565

[16] A.J.Silberger : PGL_2 over the p-adics: its Representations, Spherical Functions, and Fourier Analysis (Lecture Notes in Math. vol. 166 (1970), Springer-Verlag)

[17] T.A.Springer : *Generalization of Green's Polynomials* (P.S.P.M. vol. 21 (1971),149-153, Amer. Math. Soc.)

[18] K.Takase : *Regular characters of* $GL_n(O)$ *and Weil representations over finite fields* (Journal of Algebra 449 (2016) 184-213, arXiv:1510.04377)

[19] K.Takase : *Regular irreducible characters of a hyperspecial compact group and Weil representations over finite fields* (arXiv:1509.07573)

[20] J.Tits : *Reductive groups over local fields* (P.S.P.M. vol. 33 (1979), part I, 29–69, Amer.Math.Soc.)

e-mail : k-taka2@ipc.miyakyo-u.ac.jp