数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 31-37

距離空間における不動点定理

九州工業大学 鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. 序

本稿では, 距離空間における最新の2つの不動点定理を紹介する. 1つは, compact 距離空間における不動点定理であり, もう1つは, 完備距離空間における不動点定理である.

2. COMPACT 距離空間における不動点定理

compact 距離空間における不動点定理の中で, 真っ先に思いつくのは Edelstein の不動点定理である.

定理 1 (Edelstein [6]). Let (X, d) be a compact metric space and let T be a mapping on X. Assume

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad d(Tx, Ty) < d(x, y) \tag{1}$$

for any $x, y \in X$. Then T has a unique fixed point z. Moreover $\{T^n x\}$ converges to z for any $x \in X$.

この定理は非常に簡単に証明できる. 実際, 教科書の練習問題にもなっている. 証明を与えてみよう.

証明. We first note that T is continuous. So, a function f from X into $[0, \infty)$ defined by $f(x) = d(x, Tx)$ is continuous. Fix $u \in X$. Then since $\{f(T^n u)\}$ is nonincreasing, it converges to some $\beta \geq 0$. Since X is compact, there exists a subsequence $\{T^{n_k} u\}$ of $\{T^n u\}$ such that $\{T^{n_k} u\}$ converges to some $z \in X$. Then $\{T^{n_k+1} u\}$ converges to Tz. From the continuity of f, we obtain $f(z) = f(Tz) = \beta$. By (1), $\beta = 0$ holds, thus, z is a fixed point of T. Arguing

---

MSC (2010). 54H25.
キーワード. Edelstein's fixed point theorem, the Banach contraction principle, Ćirić's fixed point theorem, Bogin's fixed point theorem.
住所. 〒 804–8550 北九州市戸畑区 九州工業大学工学研究院.
電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

by contradiction, we assume that w is another fixed point of T. Then we have by (1)

$$d(z,w)=d(Tz,Tw)<d(z,w),$$

which implies a contradiction. Therefore the fixed point z is unique. □

一般の距離空間において, 条件 (1) は大変弱い条件である. しかしながら, 空間が compact であるため, 強い条件にもなっている. 実際には, Browder [3] の不動点定理に出現する縮小条件と同値になる. この条件は縮小条件より僅かに弱いだけの条件である. [7, 12] を参照のこと.

定理 1 の仮定は弱い仮定でありながら, 強い仮定でもある. そのため, 研究の余地が残されていないように思える. 先ほど「compact 距離空間における不動点定理の中で, 真っ先に思いつく...」と記述したが, Edelstein の定理以外を思いつくことは難しいかも知れない.

また, 定理 1 の結論部分は

- 不動点の唯一性
- $\{T^n x\}$ の不動点への収束

の 2 つから成っている. この部分に注目し, 2 つの結論を分離することで, 研究の余地が生まれた. 実際に, この節で紹介する 2 つの不動点定理の結論は, 前者のみ, または後者のみである. 従って, 厳密には, 定理 1 の拡張定理ではない. 不動点の存在にのみ注目した場合, 拡張定理と呼ぶことができる.

条件 (1) は以下のように書き換え可能である.

$$0\,d(x,Tx)<d(x,y) \quad\Rightarrow\quad d(Tx,Ty)<d(x,y) \tag{2}$$

条件 (1) に比べ, 条件 (2) は非常に分かりにくくなっている. 変化はそれだけではなく, 条件 (1) は定性的であるが, 条件 (2) には「0」という数値が入っているので, 定量的である. この数値が大きくなればなるほど, 仮定部分は強くなる. 結論部分は変化しないので, 全体として条件は弱くなる. では, どこまで弱くすることができるのであろうか？

定理 2 はこの問いの答えを与えている. 条件 (3) における 1/2 は best possible である. すなわち, 1/2 より大きくすると, 不動点を持たない反例が存在する. また結論部分は「不動点の唯一性」である. 反例が存在する [10] ため,「$\{T^n x\}$ の不動点への収束」は証明できない.

定理 2 ([10]). Let (X,d) be a compact metric space and let T be a mapping on X. Assume that

$$\frac{1}{2}\,d(x,Tx)<d(x,y) \quad\Rightarrow\quad d(Tx,Ty)<d(x,y) \tag{3}$$

for any $x, y \in X$. Then T has a unique fixed point.

最近, 次の定理が証明された.

定理 3 ([8]). Let (X, d) be a compact metric space and let T be a mapping on X. Assume that there exist a continuous, strictly increasing function η from $[0, \infty)$ into itself with $\eta(0) = 0$ and $r, s \in [0, 1)$ such that $r + 2s = 1$ and

$$\eta\big(d(Tx, Ty)\big) \le r\,\eta\big(d(x, y)\big) + s\,\eta\big(d(x, Ty)\big) + s\,\eta\big(d(Tx, y)\big) \tag{4}$$

for any $x, y \in X$. Then $\{T^n x\}$ converges to a fixed point of T for any $x \in X$.

Jachymski [7, 12] の結果により, 条件 (1) は

$$\eta\big(d(Tx, Ty)\big) \le r\,\eta\big(d(x, y)\big) \tag{5}$$

と同値になる. この書き換えをすることにより, 条件 (4) は条件 (5) よりも弱いことが分かる. また結論部分は「$\{T^n x\}$ の不動点への収束」である. 恒等写像が反例となるため, 「不動点の唯一性」は証明できない. 定理 3 は定理 1 の拡張定理ではないが, 不動点の存在にのみ着目すれば, 定理 3 は定理 1 の拡張定理である, と言うことができる.

3. 完備距離空間における不動点定理

完備距離空間における不動点定理の中で, 真っ先に思いつくのは, もちろん, Banach の縮小原理である.

定理 4 (Banach [1], Caccioppoli [4]). Let (X, d) be a complete metric space and let T be a *contraction* on X, that is, there exists $r \in [0, 1)$ such that

$$d(Tx, Ty) \le r\, d(x, y) \tag{6}$$

for any $x, y \in X$. Then T has a unique fixed point z. Moreover $\{T^n x\}$ converges to z for any $x \in X$.

$r < 1$ であることに注意. 本稿の 1 つのテーマが「< 1」と「$= 1$」の違いである. r は何乗かするといくらでも小さくできるが, 1 は何乗しても 1 のままである. 実際,

$$\lim_{q \to \infty} r^q = 0, \qquad \lim_{q \to \infty} 1^q = 1$$

である.

1960・1970 年代に, 定理 4 に関する, 多くの拡張定理が証明された.

定理 5 (Ćirić [5])**.** Let (X,d) be a complete metric space and let T be a quasi-contraction on X, that is, there exists $r \in [0,1)$ such that

$$(7) \quad d(Tx,Ty) \le r \max\left\{d(x,y), d(x,Ty), d(Tx,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\right\}$$

for any $x, y \in X$. Then T has a unique fixed point z. Moreover $\{T^n x\}$ converges to z for any $x \in X$.

定理 6 (Bogin [2])**.** Let (X,d) be a complete metric space and let T be a mapping on X. Assume that there exist $r \in [0,1)$ and $s, t \in (0, 1/2)$ satisfying $r + 2s + 2t = 1$ and

$$(8) \quad d(Tx,Ty) \le r\, d(x,y) + s\, d(x,Ty) + s\, d(Tx,y) + t\, d(x,Tx) + t\, d(y,Ty)$$

for any $x, y \in X$. Then T has a unique fixed point z. Moreover $\{T^n x\}$ converges to z for any $x \in X$.

仮定がとても似ているが, 定理5と定理6は独立した定理である. 最近, 両者の拡張定理が証明された.

定理 7 ([13]; see also [9, 11])**.** Let (X,d) be a complete metric space and let T be a mapping on X. Assume that there exist $q \in (0,\infty)$, $r \in [0,1)$ and $s, t \in (0,1/2)$ satisfying $r + 2s + 2t = 1$ and

$$(9) \quad \begin{aligned} d(Tx,Ty)^q \le{}& r\, d(x,y)^q + s\, d(x,Ty)^q + s\, d(Tx,y)^q \\ &+ t\, d(x,Tx)^q + t\, d(y,Ty)^q \end{aligned}$$

for any $x, y \in X$. Then T has a unique fixed point z. Moreover $\{T^n x\}$ converges to z for any $x \in X$.

定理4–定理7の結論部分はすべて同一である. 空間に関する条件もすべて同一である. 違いは, 写像 T に関する条件のみである. 定理4–定理7を比較検討してみよう.

3.1. **定理 4 と定理 5 の比較.** まず, 定理4と定理5の比較から始める. (6) と (7) の左辺が同一であることに注意する. 右辺同士を比較すると, あきらかに

$$r\, d(x,y) \le r \max\left\{d(x,y), d(x,Ty), d(Tx,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\right\}$$

が成り立つ. つまり, (6) の右辺より (7) の右辺のが大きい (正確には, 「以上である」). よって, (7) の方が条件として弱い. 従って, 定理5は定理4の拡張定理である.

3.2. **定理 4 と定理 6 の比較.** 次に, 定理 4 と定理 6 の比較をする. (6) と (8) の左辺が同一であることに注意する. 右辺同士を比較すると, あきらかに

$$r\,d(x,y) \le r\,d(x,y) + s\,d(x,Ty) + s\,d(Tx,y) + t\,d(x,Tx) + t\,d(y,Ty)$$

が成り立つ. つまり, (6) の右辺より (8) の右辺のが大きい (以上である). また

- $\exists\, s, t \in (0, 1/2) : r + 2\,s + 2\,t = 1$

に関しては, $r \in [0,1)$ を取った後で, $s := t := (1-r)/4$ とすればよい. よって, 定理 4 の仮定を満たすときは, 定理 6 の仮定を満たす. 従って, 定理 6 は定理 4 の拡張定理である.

3.3. **定理 5 と定理 6 の比較.** (7) と (8) を比較して, まず思いつくのは, Hölder の不等式である.

$$\sum_{j=1}^{5} a_j\,b_j \le \|a\|_1\,\|b\|_\infty$$

この式の左辺は (8) の右辺に似ていて, 右辺は (7) の右辺に似ている. (7) と (8) だけを比較すると, 定理 5 の仮定は定理 6 の仮定よりも弱く見えるかも知れない. しかし, $\|a\|_1$ の部分に着目すると様子が変わる. 定理 5 においては $\|a\|_1 = r < 1$, すなわち「< 1」であり, 定理6においては $\|a\|_1 = r{+}2\,s{+}2\,t = 1$, すなわち「$= 1$」である. つまり, Hölder の不等式の左辺を (8) の右辺と考えると, 右辺は (7) の右辺にはならない. 逆に Hölder の不等式の右辺を (7) の右辺と考えると, 左辺は (8) の右辺にはならない. 要するに, Hölder の不等式を通して, 定理 5 と定理 6 を比較することはできない. 実際, 以下の反例があるので, 定理 5 と定理 6 は独立した定理である.

例 8 ([9])**.** Define a subset X of a Banach space $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ by

$$X = \{0, 2, 3\}.$$

Define a mapping T on X by

$$\begin{aligned} T3 &= 2 \\ Ta &= 0 \quad \text{for } a \in \{0, 2\}. \end{aligned}$$

Then T satisfies the assumption of Theorem 5, but does not satisfy that of Theorem 6.

例 9 ([9])**.** Define a subset X of a Banach space $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ by

$$X = \{(0,0), (\pm 1, \pm 1)\}.$$

Define a mapping T on X by

$$
\begin{aligned}
&T(0,0) = (0,0) \\
&T(a,-1) = (a,1) \quad \text{for } a \in \{\pm 1\} \\
&T(a,1) = (0,0) \quad \text{for } a \in \{\pm 1\}.
\end{aligned}
$$

Then T satisfies the assumption of Theorem 6, but does not satisfy that of Theorem 5.

3.4. **定理 6 と定理 7 の比較.** 定理 5 と定理 7 の比較の前に, 定理 6 と定理 7 を比較する. 定理 7 において $q = 1$ とすれば, 定理 6 になる. 従って, 定理 7 は定理 6 の拡張定理である. なお, 定理 7 において, q の値を大きくすれば大きくなるほど, 仮定は弱くなる.

3.5. **定理 5 と定理 7 の比較.** 以下を証明することで, 定理 7 が定理 5 の拡張定理であることを示す.

命題 10 ([13])**.** Let T satisfy the assumption of Theorem 5. Then T satisfies the assumption of Theorem 7.

証明. Let $r \in [0,1)$ satisfy (7) for any $x, y \in X$. We also let $q \in (1, \infty)$ satisfy $r^q \leq 1/5$. Then we have

$$
\begin{aligned}
&d(Tx,Ty)^q \\
&\leq r^q \max\big\{d(x,y), d(x,Ty), d(Tx,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\big\}^q \\
&\leq (1/5) \max\big\{d(x,y), d(x,Ty), d(Tx,y), d(x,Tx), d(y,Ty)\big\}^q \\
&= (1/5) \max\big\{d(x,y)^q, d(x,Ty)^q, d(Tx,y)^q, d(x,Tx)^q, d(y,Ty)^q\big\} \\
&\leq (1/5) \big(d(x,y)^q + d(x,Ty)^q + d(Tx,y)^q + d(x,Tx)^q + d(y,Ty)^q\big)
\end{aligned}
$$

for any $x, y \in X$. Hence T satisfies the assumption of Theorem 7. □

1/5 という数を選んだのは, 足すと 1 になることからであって, いくらでも小さい値になることに注意したい. $r < 1$ の「< 1」という条件はかなり強い条件であることに, 改めて気付かされる.

参考文献

[1] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fund. Math., 3 (1922), 133–181.

[2] J. Bogin, *A generalization of a fixed point theorem of Goebel, Kirk and Shimi*, Canad. Math. Bull., 19 (1976), 7–12. MR0417866

[3] F. E. Browder, *On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 71=Indag. Math. 30 (1968), 27–35. MR0230180

[4] R. Caccioppoli, *Un teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*, Rend. Accad. Naz. Lincei, 11 (1930), 794–799.

[5] Lj. B. Ćirić, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc., 45 (1974), 267–273. MR0356011

[6] M. Edelstein, *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc., 37 (1962), 74–79. MR0133102

[7] J. Jachymski, *Remarks on contractive conditions of integral type*, Nonlinear Anal., 71 (2009), 1073–1081. MR2527526

[8] M. Kikkawa and T. Suzuki, *Fixed point theorems for new nonlinear mappings satisfying Condition* (CC), Linear Nonlinear Anal., 1 (2015), 37–52. MR3570780

[9] ———, *A direct proof of some resent generalization of both Ćirić's and Bogin's fixed point theorems*, Bull. Kyushu Inst. Technol., 64 (2017), 13–19.

[10] T. Suzuki, *A new type of fixed point theorem in metric spaces*, Nonlinear Anal., 71 (2009), 5313–5317. MR2560200

[11] ———, *Some notes on generalizations of both Ćirić's and Bogin's fixed point theorems*, to appear in Pure Appl. Funct. Anal.

[12] ———, *Generalizations of Edelstein's fixed point theorem in compact metric spaces*, submitted.

[13] T. Suzuki and M. Kikkawa, *Generalizations of both Ćirić's and Bogin's fixed point theorems*, J. Nonlinear Convex Anal., 17 (2016), 2183–2196. MR3597354