数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 72-76

Von Neumann-Jordan constant of ℓ_p-ℓ_q spaces

岡山県立大学・情報工学部　三谷健一 (Ken-Ichi Mitani)
Okayama Prefectural University
新潟大学・名誉教授　斎藤吉助 (Kichi-Suke Saito)
Niigata University
岡山県立大学・名誉教授　高橋泰嗣 (Yasuji Takahashi)
Okayama Prefectural University

1 序文

バナッハ空間 X の幾何学的性質を考察するために種々の幾何学的定数が導入されている．代表的な定数として，ヒルベルト空間の特徴づけを与える von Neumann-Jordan 定数 $C_{\mathrm{NJ}}(X)$(以下，NJ 定数) がある．この定数は様々な幾何学的性質を記述することができ，James 定数などの他の定数との相互関係についても現在活発に議論されている (cf. [1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11]).

本研究では，具体的なバナッハ空間，特に Day-James 空間 ℓ_p-ℓ_q における NJ 定数を Banach-Mazur distance を用いて計算することを目的とする．さらに，Day-James 空間と 2 次元内積空間との Banach-Mazur distance の値も決定する．

Definition 1 ([2]). The von Neumann-Jordan (NJ-) constant of a Banach space X, denoted by $C_{\mathrm{NJ}}(X)$, is the smallest constant C for which

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|x+y\|^2+\|x-y\|^2}{2(\|x\|^2+\|y\|^2)} \leq C$$

holds for all $x, y \in X$ not both 0.

Definition 2. For $1 \leq p, q \leq \infty$, the Day-James space ℓ_p-ℓ_q is the space $\mathbb{R}^2$ with the norm $\|\cdot\|_{p,q}$ defined by

$$\|(x,y)\|_{p,q} = \begin{cases} \|(x,y)\|_p & \text{if } xy \geq 0, \\ \|(x,y)\|_q & \text{if } xy \leq 0, \end{cases}$$

where $\|\cdot\|_p$ is the ℓ_p-norm on $\mathbb{R}^2$.

Yang-Wang [14] は幾何学的定数 $\gamma_X(t)$ を新たに導入し，これを用いて ℓ_2-ℓ_1 と ℓ_∞-ℓ_1 における NJ 定数を計算した．さらに，同様の方法により ℓ_p-ℓ_1 における NJ 定数の値が Yang などによって計算された．

Theorem 3 ([3, 12, 13, 15]). (i) Let $1 \leq p \leq 2$. Then $C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_1) = 1 + 2^{2/p-2}$.
(ii) Let $p > 2$. If $(p-2)2^{2/p-2} < 1$, then $C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_1) = 1 + 2^{2/p-2}$.
If $(p-2)2^{2/p-2} \geq 1$, then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_1) = \frac{1}{2} + \frac{1 - t_0^p}{2(t_0 - t_0^{p-1})},$$

where $t_0 \in (0,1)$ is the unique solution to the equation

$$\frac{(t - t^{p-1})(1 + t^p)^{2/p-1}}{1 - t^2} = 1.$$

In particular,

$$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_\infty\text{-}\ell_1) = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}.$$

本研究では，Banach-Mazur distance を用いた $C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_q)$ の計算方法を考える．

2 結果

Definition 4. For isomorphic Banach spaces X and Y, the Banach-Mazur distance between X and Y, denoted by $d(X,Y)$, is defined to be the infimum of $\|T\| \cdot \|T^{-1}\|$ taken over all bicontinuous linear operators T from X onto Y.

Lemma 5 ([5]). If X and Y are isomorphic Banach spaces, then

$$\frac{C_{\mathrm{NJ}}(X)}{d(X,Y)^2} \leq C_{NJ}(Y) \leq C_{\mathrm{NJ}}(X) d(X,Y)^2.$$

In particular, if X and Y are isometric, then $C_{\mathrm{NJ}}(X) = C_{\mathrm{NJ}}(Y)$.

Lemma 6 ([5]). Let $X = (X, \|\cdot\|)$ be a Banach space and let $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$, where $\|\cdot\|_1$ is an equivalent norm on X satisfying, for $\alpha, \beta > 0$,

$$\alpha\|x\| \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|, \quad x \in X.$$

Then

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} C_{\mathrm{NJ}}(X) \leq C_{\mathrm{NJ}}(X_1) \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2} C_{\mathrm{NJ}}(X).$$

Lemma 6 を用いて，$\mathbb{R}^2$ 上の absolute norm に関する NJ 定数の公式を与えることができる．簡単のため，$C_{\mathrm{NJ}}((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|))$ を $C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|)$ とかく．

Definition 7. A norm $\|\cdot\|$ on $\mathbb{R}^2$ is said to be absolute if $\|(|x|,|y|)\| = \|(x,y)\|$ for any $x, y \in \mathbb{R}$.

Theorem 8 (cf. [7, 8]). Let $\|\cdot\|, \|\cdot\|_H$ be absolute norms on $\mathbb{R}^2$. Assume that the following hold:
(i) $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_H)$ is an inner product space.
(ii) $\alpha\|(x,y)\|_H \le \|(x,y)\| \le \beta\|(x,y)\|_H$ for any $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (α, β are the best constants).
(iii) In (ii) it satisfies either $\alpha\|(1,0)\|_H = \|(1,0)\|$ and $\alpha\|(0,1)\|_H = \|(0,1)\|$, or $\beta\|(1,0)\|_H = \|(1,0)\|$ and $\beta\|(0,1)\|_H = \|(0,1)\|$.
Then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|) = \frac{\beta^2}{\alpha^2}.$$

この定理を用いて，ℓ_p-ℓ_q の NJ 定数を計算する．ℓ_p-ℓ_q と ℓ_q-ℓ_p は isometric より $C_{\mathrm{NJ}}(\ell_q\text{-}\ell_p) = C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_q)$. よって $1 \le q \le p < \infty$ の場合のみ考えればよい．

$1 \le q \le p < \infty$ に対して，$\mathbb{R}^2$ のノルム $\|\cdot\|_X$ を

$$\|(x,y)\|_X = \|T(x,y)\|_{p,q} = \begin{cases} \|T(x,y)\|_p & \text{if } |x| \ge |y|, \\ \|T(x,y)\|_q & \text{if } |x| \le |y| \end{cases}$$

と定義する．ここで

$$T(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y, x+y).$$

ℓ_p-ℓ_q と $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_X)$ は isometric より $C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_q) = C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|_X)$ である．$C_{\mathrm{NJ}}(\|\cdot\|_X)$ を計算することで $C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_q)$ の値を決定する．また，$\mathbb{R}^2$ のノルム $\|\cdot\|_H$ を

$$\|(x,y)\|_H = \sqrt{2^{2/p-1}x^2 + 2^{2/q-1}y^2} \quad (1 \le q \le p < \infty)$$

と定義する．$\|\cdot\|_X$ と $\|\cdot\|_H$ は absolute ノルムであり，$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_H)$ は内積空間である．これらのノルムを Theorem 8 に適用することにより次の結果を得る．

Theorem 9. If $1 \le q \le 2, q \le p < \infty$ and $2^{2/p-2/q}(p-1) \le 1$, then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_q) = \frac{2^{2/p}(t_0^2 + 2^{2/q-2/p})}{((1+t_0)^q + (1-t_0)^q)^{2/q}}, \tag{1}$$

where

$$t_0 = \sup\left\{t \in (0,1) : \frac{(2^{2/q-2/p} - t)(1+t)^{q-1}}{(2^{2/q-2/p} + t)(1-t)^{q-1}} \le 1\right\}.$$

In particular, if $1 \le q \le p \le 2$, then (1) holds.

Corollary 10 ([3, 12, 13, 15]). If either $1 \leq p \leq 2$, or $p > 2$ and $2^{2/p-2}(p-1) \leq 1$, then

$$C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_1) = 1 + 2^{2/p-2}.$$

$1 \leq q \leq 2$, $q \leq p < \infty$, $2^{2/p-2/q}(p-1) \leq 1$ とする．Theorem 8 より，すべての 2 次元内積空間 H に対して

$$d(\ell_p\text{-}\ell_q, H) = \sqrt{C_{\mathrm{NJ}}(\ell_p\text{-}\ell_q)}.$$

参考文献

[1] J. Alonso, P. Martín, P. L. Papini, *Wheeling around von Neumann-Jordan constant in Banach spaces*, Studia Math. **188** (2008), 135-150.

[2] J. A. Clarkson, *The von Neumann-Jordan constant for the Lebesgue space*, Ann. of Math. **38** (1937), 114-115.

[3] S. Dhompongsa, P. Piraisangjun, S. Saejung, *Generalized Jordan-von Neumann constants and uniform normal structure*, Bull. Austral. Math. Soc. **67** (2003), 225-240.

[4] A. Jiménez-Melado, E. Llorens-Fuster, S. Saejung, *The von Neumann-Jordan constant, weak orthogonality and normal structure in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 355-364.

[5] M. Kato, L. Maligranda, Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math. **144** (2001), 275-295.

[6] M. Kato, Y. Takahashi, *On the von Neumann-Jordan constant for Banach spaces*, Proc. Am. Math. Soc. **125** (1997), 1055-1062.

[7] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, Y. Takahashi, *On the von Neumann-Jordan constant of generalized Banaś-Frączek spaces*, Linear Nonlinear Anal. **2** (2016), 311-316.

[8] K.-S. Saito, M. Kato, Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl. **244** (2000), 515-532.

[9] Y. Takahashi, *Some geometric constants of Banach spaces-A unified approach*, Banach and function spaces II, 191-220, Yokohama Publ., Yokohama, 2008.

[10] Y. Takahashi, M. Kato, *Von Neumann-Jordan constant and uniformly non-square Banach spaces*, Nihonkai Math. J. **9** (1998), 155-169.

[11] Y. Takahashi, M. Kato, *A simple inequality for the von Neumann-Jordan and James constants of a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **359** (2009), 602-609.

[12] C. Yang, *An inequality between the James type constant and the modulus of smoothness*, J. Math. Anal. Appl. **398** (2013), 622-629.

[13] C. Yang, H. Li, *On the James type constant of* ℓ_p-ℓ_1, J. Inequal. Appl. **2015**: Article ID 79 (2015).

[14] C. Yang, F. Wang, *On a new geometric constant related to the von Neumann-Jordan constant*, J. Math. Anal. Appl. **324** (2006), 555-565.

[15] C. Yang, F. Wang, *The von Neumann-Jordan constant for a class of Day-James Spaces*, Mediterr. J. Math. **13** (2016), 1127-1133.