数理解析研究所講究録
第2065巻 2018年 126-130

On convergence of the fixed point iterations

秋田県立大学 システム科学技術学部 * 松下 慎也 †(Shin-ya Matsushita)
徐 粒 (Li Xu)
Department of Electronics and Information Systems
Akita Prefectural University

1 はじめに

次の問題を考える:

$$\text{find } u \in C \text{ s.t. } T(u) = u, \tag{1.1}$$

ただし、C はヒルベルト空間 H の閉凸集合、$T: C \to C$ は非拡大写像とする。非拡大写像の不動点集合を $\mathrm{Fix}(T)$ とあらわし、$\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ を仮定する。ここでは問題 (1.1) の解、つまり写像 T の不動点について考える。問題 (1.1) の不動点を見つける方法がこれまで研究されている [1, 8, 9]。本論文では、以下の方法で生成される点列 $\{x_n\}$ について考察する。

$$x_0 \in C, \quad x_{n+1} = (1-\alpha)x_n + \alpha T(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1.2}$$

ただし、$\alpha \in (0,1)$ とする。点列 (1.2) は Krasnosel'skiĭ [6] や Mann [7] によって研究された不動点近似法であり*1、(1.2) によって生成された点列 $\{x_n\}$ は $\mathrm{Fix}(T)$ の点に弱収束することが知られている ([9] 参照)。一方、極大単調作用素のリゾルベントやリフレクション (4 章参照) は非拡大写像となる為、近接点法 [1, 9] や Douglas-Rachford 法 [1] などの近似法は (1.2) の形で表現できることが知られている。

$\|x - T(x)\| = 0$ が成り立つことは、$T(x) = x$ が成り立つことと同値である。また、点列 $\{x_n\}$ を (1.2) から生成された点列とすると、$\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ のとき $\|x_n - T(x_n)\| \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ為、$\|x_n - T(x_n)\|$ の収束の速さを評価することは、点列 $\{x_n\}$ の不動点への収束の速さを評価する上で重要であると考えられる。最近、Cominetti, Soto, Vaisman [3] 等は以下の評価式を与えた。

$$\|x_n - T(x_n)\| \leq \frac{\inf_{y \in \mathrm{Fix}(T)} \|x_0 - y\|}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)(n+1)}} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.3}$$

(1.3) より $\|x_n - T(x_n)\|$ の収束の漸近的な上界を与えた事になる。(1.3) が成り立つとき、$\|x_n - T(x_n)\| = O(1/\sqrt{n+1})$ とあらわす。

本研究では Cominetti, Soto, Vaisman 等の研究に動機付けられて、$\|x_n - T(x_n)\|$ の収束の評価について研究する。特に Deng, Lai, Peng, Yin [4] 等の結果に注目し、$\|x_n - T(x_n)\| = o(1/\sqrt{n+1})$

* 〒015-0055 秋田県由利本荘市土谷字海老ノ口 84-4
† e-mail: matsushita@akita-pu.ac.jp home page: http://web.sc.eis.akita-pu.ac.jp/~matsushita/

*1 α の部分は点列 α_n で置きかえる事ができるが、ここでは固定した値を用いる

が成り立つことを示す。ここで $\|x_n - T(x_n)\| = o(1/\sqrt{n+1})$ は、

$$\sqrt{n+1}\|x_n - T(x_n)\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

が成り立つ事を意味する。すなわち、$\|x_n - T(x_n)\|$ に対する新しい評価を与えた事になる。

2 準備

本論文を通して H を実ヒルベルト空間とし、$\langle\cdot,\cdot\rangle$ と $\|\cdot\|$ をそれぞれ H の内積とノルムとする。集合 C は H の空でない閉凸集合とする。写像 $T : C \to C$ が非拡大とは、

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in C) \tag{2.1}$$

が成り立つときをいう。ヒルベルト空間では次の等式が成り立つ。

$$\|(1-\alpha)x + \alpha y\|^2 = (1-\alpha)\|x\|^2 + \alpha\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x-y\|^2 \ (\forall x, y \in H, \forall \alpha \in [0,1]). \tag{2.2}$$

主定理を得るため、次の結果は重要である。

補助定理 2.1 [4, Lemma 1.2] $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ とし、以下の条件を仮定する。

(1) $a_n \geq 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$;
(2) $\sum_{i=0}^{\infty} a_i < \infty$;
(3) $a_{n+1} \leq a_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

このとき、$a_n = o(1/(n+1))$ が成り立つ。

3 主結果

(1.2) によって生成された点列について、以下の結果が成り立つ。

定理 3.1 C を H の空でない閉凸集合、$T : C \to C$ を非拡大写像で $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$ とし、点列 $\{x_n\}$ を (1.2) によって生成する。このとき、$\|x_n - T(x_n)\| = o(1/\sqrt{n+1})$ が成り立つ。

証明の概略
$u \in \mathrm{Fix}(T)$ とする。(2.2) と T の非拡大性を用いると、

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - u\|^2 &= \|(1-\alpha)(x_n - u) + \alpha(T(x_n) - u)\|^2 \\ &= (1-\alpha)\|x_n - u\|^2 + \alpha\|T(x_n) - u\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x_n - T(x_n)\|^2 \\ &\leq \|x_n - u\|^2 - \alpha(1-\alpha)\|x_n - T(x_n)\|^2\end{aligned}$$

となり、

$$\alpha(1-\alpha)\|x_n - T(x_n)\|^2 \leq \|x_n - u\|^2 - \|x_{n+1} - u\|^2$$

が成り立つ。これより

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i - T(x_i)\|^2 < \infty$$

となる。また、

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - T(x_{n+1})\| &= \|(1-\alpha)(x_n - T(x_{n+1})) + \alpha(T(x_n) - T(x_{n+1}))\| \\
&\leq (1-\alpha)\|x_n - T(x_{n+1})\| + \alpha\|x_n - x_{n+1}\| \\
&\leq (1-\alpha)\|x_n - x_{n+1}\| + (1-\alpha)\|x_{n+1} - T(x_{n+1})\| + \alpha\|x_n - x_{n+1}\| \\
&= \|x_n - x_{n+1}\| + (1-\alpha)\|x_{n+1} - T(x_{n+1})\| \\
&= \alpha\|x_n - T(x_n)\| + (1-\alpha)\|x_{n+1} - T(x_{n+1})\|.
\end{aligned}$$

よって、

$$\|x_{n+1} - T(x_{n+1})\|^2 \leq \|x_n - T(x_n)\|^2 \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

を得る。ここで、補助定理 2.1 より、

$$\|x_n - T(x_n)\|^2 = o(1/(n+1))$$

が成り立つ。したがって、

$$\|x_n - T(x_n)\| = o(1/\sqrt{n+1})$$

を得る。 ■

4 応用

3 章の結果を Douglas-Rachford 法に応用する。

次の問題を考える:

$$\text{find } u \in H \text{ s.t. } 0 \in (A+B)(u), \tag{4.1}$$

ただし、$A, B : H \to 2^H$ は極大単調作用素とする。問題 (4.1) の解集合を $(A+B)^{-1}(0)$ とあらわし、$(A+B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ を仮定する。

問題 (4.1) はさまざまな問題を表現できる。例えば、$f, g : H \to (-\infty, \infty]$ を下半連続な真凸関数、$A := \partial f, B := \partial g$ とする。ここで、∂f と ∂g は f と g の劣微分をあらわす ([9] 参照)。このとき、問題 (4.1) は関数 $f+g$ の最小化問題、すなわち

$$\min_{x \in H} \ (f+g)(x), \tag{4.2}$$

と等価となる。また、問題 (4.2) は複数の閉凸集合の共通部分を見つける問題 (制約可能性問題) に応用できることが知られている ([1] 参照)。さらに最近の研究成果から、問題 (4.2) は圧縮センシングや画像復元問題等の工学の分野における問題と密接に関係していることが知られている ([2] 参照)。

ここで、$r > 0$ に対して A のリゾルベント J_r^A とリフレクション R_r^A は次のように定義する。

$$J_r^A := (I + rA)^{-1}, \ R_r^A := 2J_r^A - I,$$

ただし、I を H の恒等写像とする。次の性質が成り立つ。

(i) R_r^A は非拡大写像、つまり

$$\|R_r^A(x) - R_r^A(y)\| \leq \|x - y\| \ (\forall x, y \in H)$$

となる;

(ii)

$$\frac{1}{2}(I + R_r^B R_r^A) = J_r^B R_r^A + I - J_r^A \tag{4.3}$$

が成り立つ

([1] 参照)。

問題 (4.1) に対する Douglas-Rachford 法は以下のように点列を生成する。

$$y_0 \in H, \ y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}R_r^B R_r^A(y_n) \ \ (n = 0, 1, 2, \dots). \tag{4.4}$$

$\{y_n\}$ を (4.4) によって生成された点列とする。このとき、$\{y_n\}$ は $\mathrm{Fix}(R_r^B R_r^A)$ のある点 u に弱収束し、$\{J_r^A(y_n)\}$ は $J_r^A(u)(\in (A+B)^{-1}(0))$ に弱収束することが知られている ([1] 参照)。

定理 3.1 を応用することで、以下の定理を得ることができる。

定理 4.1 $A, B : H \to 2^H$ を極大単調作用素で $(A+B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ を仮定し、点列 $\{y_n\}$ を (4.4) によって生成する。このとき、$\|y_n - R_r^B R_r^A(y_n)\| = o(1/\sqrt{n+1})$ が成り立つ。

注意 4.1

(a) He と Yuan [5] は $\|y_n - R_r^B R_r^A(y_n)\| = O(1/\sqrt{n+1})$ を示した。定理 4.1 はそれよりも良い評価を与えたことになる。

(b) (4.3) から $\|J_r^A(y_n) - J_r^B R_r^A(y_n)\| = o(1/\sqrt{n+1})$ が得られる。$\|J_r^A(y) - J_r^B R_r^A(y)\| = 0$ のとき、$J_r^A(y) \in (A+B)^{-1}(0)$ が成り立つ為、点列 $\{J_r^A(y_n)\}$ に対する新しい評価を与えた事になる。

参考文献

[1] H. H. Bauschke and P. L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, New York, 2011.

[2] A. Beck and M. Teboulle, *A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems*, SIAM J. Imag. Sci. **2** (2009), 183-202.

[3] R. Cominetti, J. A. Soto and J. Vaisman, *On the rate of convergence of Krasnosel'skiĭ-Mann iterations and their connection with sums of Bernoullis*, Israel J. Math. **199** (2014), 757-772.

[4] W. Deng, M-J. Lai, Z. Peng and W. Yin, *Parallel multi-block ADMM with $o(1/k)$ convergence*, arXiv preprint arXiv:1312.3040, (2013).

[5] B. S. He and X. M. Yuan, *On the convergence rate of Douglas-Rachford operator splitting method*, Math. Program. **153** (2015), 715-722.

[6] M. A. Krasnosel'skiĭ, *Two remarks on the method of successive approximations*, Uspehi Mat. Nauk **10** (1955), 123-127.

[7] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506-510.

[8] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis. fixed points theory and its applications*, Yokohama Publishers, Yokohama 2000.

[9] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.