数理解析研究所講究録
第2077巻 2018年 1-9

等質空間上の軌道が無限個存在する場合の退化主系列表現の重複度について

Multiplicity of a degenerate principal series for homogeneous spaces with infinite orbits

東京大学 数理科学研究科　田内 大渡 *

Taito Tauchi

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

概要

G を実簡約代数群, P をその極小な放物型部分群, H を G の実代数部分群とする. このとき P 開軌道が等質多様体 G/H 上に存在する, もしくはそれと同値なことであるが G/H 上の P 軌道の個数が有限であるならば, 正則表現 $C^\infty(G/H)$ が G の各既約表現を高々有限回ずつしか含まないことが小林・大島により代数解析を用いる手法で証明された. また小林は一般放物型部分群 Q に対しても, もし Q が G/H 上に開軌道を持たなければ $C^\infty(G/H)$ は Q から誘導されたある退化主系列表現を重複度無限で含むというより精密な結果を, ポアソン変換の一般化を用いることで証明している. この論文ではこれらを踏まえ G/H 上に Q 開軌道が存在したとしても, もし G/H 上に Q 軌道が無限個存在するならば Q から誘導されたある退化主系列表現を $C^\infty(G/H)$ が重複度無限で含むことを向け付けに関するある仮定のもとで, ドラームのカレントの理論を用いて証明する.

Abstract

Let X be a homogeneous space of a real reductive Lie group G. Then it is proved by T. Kobayashi and T. Oshima that the regular representation $C^\infty(X)$ contains each irreducible representation of G at most finitely many times if a minimal parabolic subgroup P of G has an open orbit in X, or equivalently, if the number of P-orbits on X is finite. Moreover, T. Kobayashi proved that for a general parabolic subgroup Q of G, there is a degenerate principal representation induced from Q contained in $C^\infty(X)$ with infinite multiplicity if there is no open Q-orbit on X. In this article, we prove that there is a degenerate principal representation induced from Q contained in $C^\infty(X)$ with infinite multiplicity if the number of orientable (or transversally-oritentable) Q-orbits on X is infinite even when there exists an open Q-orbit on X.

* 本研究は JSPS 科研費 17J00596 の助成を受けたものである.

1 導入

この論文では次の定理を証明する．記号については後述する．

定理 1.1　G を実簡約代数群とし H をその実代数部分群とする．また Q を G の放物型部分群とし N を Q の冪零根基とする．

(1) もし向け付け可能な p 次元の H 軌道が G/Q 上に無限個存在すれば次が成り立つ．

$$\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q, \wedge^p \mathfrak{n}), C^\infty(G/H)) = \infty.$$

(2) もし横断的に向き付け可能な (定義 3.7 参照) p 次元の H 軌道が G/Q 上に無限個存在すれば次が成り立つ．

$$\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q, \wedge^p \mathfrak{n} \otimes or), C^\infty(G/H)) = \infty.$$

注釈 1.2　一般旗多様体 G/Q 上に H が開軌道を持たない場合には後述の事実 1.8 が適用できるため実際に定理 1.1 を適用したいのは G/Q 上に開軌道が存在するが $\#(H\backslash G/Q) = \infty$ となる場合である (4 節参照)．そのような例が存在することを 4 節で具体的に構成して証明する．また上の定理において H が代数的という仮定は本質的である．実際，代数的という仮定を落とした場合には定理 1.1 には反例が存在する [8, Example 3.6]．

次に上記の定理 1.1 の背景について説明する．H を実簡約代数群 G の実代数部分群とする. このとき重複度の有限性に関する次の判定法が小林–大島により証明された．

事実 1.3 ([8, Theorem A])　次の (G, H) に関する二条件は同値である．

(i) 任意の $(\pi, \tau) \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{f}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ が成り立つ．
(ii) G/H が実球多様体である．

ここで $\hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ は G の滑らかな緩増加既約許容表現の同型類全体を，$\hat{H}_{\mathrm{f}}$ は H の代数的有限次元既約表現の同型類全体をそれぞれ表す．さらに $C^\infty(G/H, \tau)$ で同変ベクトル束 $G \times_H \tau \to G/H$ の可微分な切断全体の成す Fréchet 空間を表した．また実球多様体という用語は小林 [6] により導入された．

定義 1.4 ([6, 8])　実簡約リー群 G の極小放物型部分群 P が等質多様体 $X = G/H$ 上に開軌道を持つとき X を実球多様体であるという．

さらに Kimelfeld の実ランク 1 での分類 [5] と松木の実ランク 1 リダクション [11] を合わせることにより次のような事実も知られている．

事実 1.5 ([1]) 事実 1.3 の (ii) は次の (iii) と同値である.

(iii) $\#(H\backslash G/P) < \infty$.

P が極小放物型部分群である場合は条件 (i), (ii), (iii) が全て同値であることが事実 1.3 と事実 1.5 から従う (図 1 参照). では P の代わりに一般放物型部分群 Q を考えたとき (i), (ii), (iii) の関係はどのようになるのかということが自然に疑問になる. しかし条件 (i) には P の情報が含まれていないのでこの疑問を定式化するために次の定義をする.

定義 1.6 ([7, Definition 6.6]) ある $\tau \in \hat{Q}_{\mathrm{f}}$ が存在して π が $C^\infty(G/Q, \tau)$ の部分商と同型になるとき $\pi \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ は Q シリーズに属するという.

P : 極小放物型部分群

$$\begin{tikzcd}
& \text{(i)} \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\
\text{(ii)} \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \text{(iii)}
\end{tikzcd}$$

図 1.1

Q : 一般放物型部分群

$$\begin{tikzcd}
& (\mathrm{i}_Q) \arrow[dl, Rightarrow, shift left] & \\
(\mathrm{ii}_Q) \arrow[ur, Rightarrow, shift left, "\times" description, "定理\ 1.1"] \arrow[rr, Rightarrow, shift left, "\times" description] & & (\mathrm{iii}_Q) \arrow[ll, Rightarrow, shift left] \arrow[ul, Rightarrow, "\times" description, "定理\ 1.1"']
\end{tikzcd}$$

図 1.2

$\hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}} := \{\pi \in \hat{G}_{\mathrm{smooth}} \mid \pi$ は Q シリーズに属する $\}$ とおく. この時 $Q \subset Q'$ ならば $\hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}} \supset \hat{G}^{Q'}_{\mathrm{smooth}}$ である. また Harish-Chandra の部分商定理 [2] により $Q = P$ (極小放物型部分群) ならば $\hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}} = \hat{G}_{\mathrm{smooth}}$ が従う. さらに定義から $Q = G$ ならば $\hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}} = \hat{G}_{\mathrm{f}}$ となることがわかる.

定義 1.7 一般放物型部分群 $Q \subset G$ に対し条件 (i_Q), (ii_Q), (iii_Q) を次で定める.

(i_Q) 任意の $(\pi, \tau) \in \hat{G}^Q_{\mathrm{smooth}} \times \hat{H}_{\mathrm{f}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ が成り立つ.

(ii_Q) Q が等質多様体 G/H に開軌道を持つ.

(iii_Q) $\#(H\backslash G/Q) < \infty$.

Q が極小放物型部分群 P であるとき三条件 (i_Q), (ii_Q), (iii_Q) はそれぞれ (i), (ii), (iii) と同値なので上ですでに見たようにその関係は次のようになる (図 1.1 参照).

$$(\mathrm{i}_Q) \iff (\mathrm{ii}_Q) \iff (\mathrm{iii}_Q) \qquad Q = P \text{ のとき}.$$

さらに $Q = G$ のときは Frobenius の相互律より条件 (i_Q) が成り立つことがわかる. また (ii_Q) と (iii_Q) が常に成り立つことは明らかなので次を得る.

$$(\mathrm{i}_Q) \iff (\mathrm{ii}_Q) \iff (\mathrm{iii}_Q) \qquad Q = G \text{ のとき}.$$

一般の設定でも $(\mathrm{iii}_Q) \Rightarrow (\mathrm{ii}_Q)$ は真であるが, 極小ではない放物型部分群に対してはその逆 $(\mathrm{ii}_Q) \Rightarrow (\mathrm{iii}_Q)$ が成り立つとは限らない. 一方 $(\mathrm{i}_Q) \Rightarrow (\mathrm{ii}_Q)$ が真であることは次のより強い結

果から従う．ここで H の既約表現で $\hat{G}_{\mathrm{f}}$ の元の商として得られる元全体の集合を $\hat{H}_{\mathrm{f}}(G)$ と書いた．H が G の簡約な代数部分群ならば $\hat{H}_{\mathrm{f}}(G) = \hat{H}_{\mathrm{f}}$ が成り立つ．

事実 1.8 ([7, Corollary 6.8]) ある $\tau \in \hat{H}_{\mathrm{f}}(G)$ が存在して任意の $\pi \in \hat{G}^{Q}_{\mathrm{smooth}}$ に対し $\dim \mathrm{Hom}_G(\pi, C^\infty(G/H, \tau)) < \infty$ を満たすならば H 開軌道が G/Q 上に存在する，すなわち条件 (ii_Q) が成り立つ．

また $(\mathrm{iii}_Q) \Rightarrow (\mathrm{i}_Q)$ と $(\mathrm{ii}_Q) \Rightarrow (\mathrm{i}_Q)$ のどちらも成り立たないことを筆者は証明した [12]. 定理 1.1 は残りの $(\mathrm{ii}_Q) \Rightarrow (\mathrm{i}_Q)$(図 2.2 参照) が向き付けに関する仮定のもとでは正しいことを証明するものになっている．

2 諸性質

Q を実簡約リー群 G の放物型部分群とし $Q = MAN$ をその Langlands 分解とする．Q の Levi 部分群 $L := MA$ は N のリー環 $\mathfrak{n}$ に随伴表現により作用する．N を自明に作用させることで L のこの表現を $Q = LN$ の表現へと拡張する．$n := \dim \mathfrak{n}$ とおき $\mathfrak{n}$ の n 次外積表現 $Q \to GL(\wedge^n \mathfrak{n})$ と $\mathrm{sign}\colon GL(\wedge^n \mathfrak{n}) \simeq \mathbb{R}^\times \to \{\pm 1\}$ の合成により Q の表現 $or\colon Q \to \{\pm 1\}$ を定義する．すると $C^\infty(G/Q, \wedge^p \mathfrak{n})$ と $C^\infty(G/Q, \wedge^p \mathfrak{n} \otimes or)$ はコンパクト台を持つ p 形式全体の空間 $\mathcal{D}^p(G/Q)$ とコンパクト台を持つ捩れ p 形式全体の空間 $\underline{\mathcal{D}}^p(G/Q)$ にそれぞれ同型となる．またそれらの位相的双対である $(n-p)$ 次捩れカレント全体の空間と $(n-p)$ 次カレント全体の空間をそれぞれ $\underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(G/Q)$ と $\mathcal{D}'_{n-p}(G/Q)$ で表すことにする．このとき下の事実 2.1 により任意の G の閉部分群 H に対し次の同型が存在する．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q, \wedge^p \mathfrak{n}), C^\infty(G/H)) &\simeq \mathcal{D}'(G/Q, (\wedge^p \mathfrak{n})^\vee \otimes \wedge^n \mathfrak{n} \otimes or)^H \\
&\simeq \mathcal{D}'(G/Q, \wedge^{n-p} \mathfrak{n} \otimes or)^H \\
&\simeq \underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(G/Q)^H, \qquad (2.1) \\
\mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q, \wedge^p \mathfrak{n} \otimes or), C^\infty(G/H)) &\simeq \mathcal{D}'_{n-p}(G/Q)^H. \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

ここで $(\wedge^p \mathfrak{n})^\vee$ は $\wedge^p \mathfrak{n}$ の反傾表現を表した．

事実 2.1 ([9, Proposition 3.2]) G を実リー群，G' と H を G の閉部分群，H' を G' の閉部分群とし $\tau \in \hat{H}_{\mathrm{f}}, \tau' \in \hat{H}'_{\mathrm{f}}$ とする．このとき次が成り立つ．

1. 次の単射が存在する．

$$\mathrm{Hom}_{G'}(C^\infty(G/H, \tau), C^\infty(G'/H', \tau')) \hookrightarrow \left(\mathcal{D}'(G/H, \tau^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \otimes \tau'\right)^{H'}. \qquad (2.3)$$

ここで $\mathbb{C}_{2\rho}$ は $h \mapsto |\det(\mathrm{Ad}(h)\colon \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h})|^{-1}$ で定まる H の一次元表現を，

$(\mathcal{D}'(G/H, \tau^\vee \otimes \mathbb{C}_{2\rho}) \otimes \tau')^{H'}$ は H' の対角的作用により不変な元全体をそれぞれ表す．

2. H が余コンパクト (例えば G の放物型部分群) ならば (2.3) は全単射となる．

3 定理 1.1 の証明

この 3 節では最初に定理 1.1 の向き付け可能な場合である (1) を証明し，その後横断的に向き付け可能な場合の (2) を証明する．そのためにまず次の命題を証明する．

命題 3.1　H を実簡約代数群 G の実代数部分群とする．また一般旗多様体 G/Q 上の向け付け可能な p 次元の H 軌道が無限個存在すると仮定する．このとき次が成り立つ．

$$\dim \underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(G/Q)^H = \infty.$$

定理 1.1 の (1) は (2.1) によりこの命題 3.1 から従う．

次の二つの補題は命題 3.1 の証明に用いる．

補題 3.2　実代数群 H が滑らかな n 次元実代数多様体 M に作用しているとし $\mathcal{O}$ を M 上の向き付け可能な p 次元の H 軌道とする．このとき任意の $\alpha \in \mathcal{D}^p(M)$ に対し，

$$T_{\mathcal{O}}(\alpha) := \int_{\mathcal{O}} \alpha$$

は収束し $0 \neq T_{\mathcal{O}} \in \underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(M)^H$ が成り立つ．

補題 3.3　実代数群 H が滑らかな実代数多様体 M に作用しているとし $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ を M 上の相異なる同次元の H 軌道の列とする．このとき部分列 $\{\mathcal{O}_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と M の (Euclid 位相に関しての) 開集合の列 $\{U_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ であって $\mathcal{O}_{i_k} \cap U_{i_k} \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{O}_{i_k} \cap U_{i_{k'}} = \emptyset \ (i_k \neq i_{k'})$ を満たすものが存在する．

先にこれら二つの補題を認めて命題 3.1 を証明する．

命題 3.1 の証明　向き付け可能な p 次元の相異なる H 軌道の列 $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ をとる．すると補題 3.3 により部分列 $\{\mathcal{O}_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ と M 上の (Euclid 位相に関しての) 開集合の列 $\{U_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ であって $\mathcal{O}_{i_k} \cap U_{i_k} \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{O}_{i_k} \cap U_{i_{k'}} = \emptyset \ (i_k \neq i_{k'})$ を満たすものが存在する．このとき補題 3.2 により各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $T_{\mathcal{O}_{i_k}}$ は 0 でない $\underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(G/Q)^H$ の元を定めることを注意しておく．よってこれら $\{T_{\mathcal{O}_{i_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が線形独立であることを示せば題意が従う．ϕ_{i_k} を $\mathcal{D}^p(G/Q)$ の元であって $\operatorname{supp}(\phi_{i_k}) \subset U_{i_k}$ かつ $T_{\mathcal{O}_{i_k}}(\phi_{i_k}) \neq 0$ を満たすものとする．すると U_{i_k} の取り方より $i_k \neq i_{k'}$ ならば $T_{\mathcal{O}_{i_k}}(\phi_{i_{k'}}) = 0$ が成り立つ．これより $\{T_{\mathcal{O}_{i_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ の線形独立性が従うので $\dim \underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(G/Q)^H = \infty$ が示された．　$\square$

以下補題 3.2 と補題 3.3 を証明する．

補題 3.2 **の証明**　$T_{\mathcal{O}}$ の H 不変性は $\mathcal{O}$ が H 軌道であることからすぐにわかるのでこの補題は下の事実 3.5 より従う． $\square$

定義 3.4　M を実解析多様体とする．M の部分集合 N が半解析的集合であるとは M の各点 $m \in M$ に対してその開近傍 $U \ni m$ と U 上の有限個の実解析関数 $\{f_{j,k}\}, \{g_{j,l}\}$ が存在して次が成り立つときにいう．

$$U \cap N = \bigcup_{j=1}^{J} \{x \in U \mid f_{j,1}(x) = \cdots = f_{j,k_j}(x) = 0, g_{j,1}(x) > 0, \ldots, g_{j,l_j}(x) > 0\}.$$

また半解析的集合 N が M の p 次元部分多様体になっているとき N は正則 p 次元半解析的集合であると定義する．

事実 3.5 ([4, Theorem 2.1])　M を実解析多様体とし N を M の向き付け可能な正則 p 次元半解析的集合とする．このとき任意の $\alpha \in \mathcal{D}^p(M)$ に対し，

$$T_N(\alpha) := \int_N \alpha$$

は収束し $0 \neq T_N \in \underline{\mathcal{D}}'_{n-p}(M)$ が成り立つ．

補題 3.3 の証明には次の代数群に関する事実を用いる．

事実 3.6 ([8, Lemma 6.2])　実代数群 H が滑らかな n 次元実代数多様体 M に作用しているとする．$p := \max\{\dim H \cdot x \mid x \in M\} \in \mathbb{N}$ とおき $p < n$ を仮定する．さらに $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ を M 上の p 次元の相異なる H 軌道の列とする．このとき部分列 $\{\mathcal{O}_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ と M の (Euclid 位相に関しての) 開集合の列 $\{U_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ であって $\mathcal{O}_{i_k} \cap U_{i_k} \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{O}_{i_k} \cap U_{i_{k'}} = \emptyset \, (i_k \neq i_{k'})$ を満たすものが存在する．

これは [8, Lemma 6.2] の証明から従う．

補題 3.3 **の証明**　$p := \dim \mathcal{O}_i$ とおく．M の閉代数多様体 M_{p+1} を次で定める．

$$M_{p+1} := \{x \in M \mid \dim H \cdot x \leq p + 1\}.$$

このとき H は M_{p+1} に作用することに注意する．また実代数多様体の連結成分の個数は有限 [13] なので，ある M_{p+1} の連結成分 M_{p+1}° であって $\#(\{i \in \mathbb{N} \mid \mathcal{O}_i \cap M_{p+1}^{\circ} \neq \emptyset\}) = \infty$ を満たすものが存在する．$M'_{p+1} := H \cdot M_{p+1}^{\circ}$ とおく．このとき実代数群の作用による開軌道の個数は有限個であることより M'_{p+1} は H 開軌道を持たない．よって事実 3.6 より部分列 $\{\mathcal{O}_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ と $M'_{p+1} \backslash Sing(M'_{p+1})$ の (Euclid 位相に関しての) 開集合の列 $\{V_{i_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ であって $\mathcal{O}_{i_k} \cap V_{i_k} \neq \emptyset$ かつ $\mathcal{O}_{i_k} \cap V_{i_{k'}} = \emptyset \, (i_k \neq i_{k'})$ を満たすものが存在する．各 $k \in \mathbb{N}$ に対して

$U_{i_k} \cap M'_{p+1} = V_{i_k}$ となる M の (Euclid 位相に関する) 開集合 U_{i_k} をとる．すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{O}_{\imath_k} \subset M'_{p+1}$ に注意すれば，このとき $\mathcal{O}_{i_k} \cap U_{\imath_{k'}} = \mathcal{O}_{\imath_k} \cap M'_{p+1} \cap U_{i_{k'}} = \mathcal{O}_{\imath_k} \cap V_{i_{k'}}$ となるのでこの $\{U_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ が題意を満たす． □

最後に定理 1.1 の (2) を示す．先に横断的に向き付け可能という用語を定義しておく．

定義 3.7 ([3, 3.4b]) M を多様体とし N をその部分多様体とする．このとき N が横断的に向き付け可能であるとは N の法束が向き付け可能であるときにいう．

定理 1.1 (2) **の証明** 一般に多様体上の捩れ微分形式は，任意の横断的に向き付け可能な部分多様体上に引き戻すことができる [3, 3.4b]．また n 次元多様体 M 上の捩れ n 形式は多様体 M の向き付け可能性に関わらず M 上での積分を定義することができる [3, 3.4a]．よって (2.2) に注意すればこれらを用いることにより (1) の場合と同様の証明で定理 1.1 の (2) も証明される． □

4 開軌道が存在するが次元の低い軌道が無限個ある例

一般旗多様体 G/Q 上に H 開軌道が存在しない場合には事実 1.8 を適用することができる．よって定理 1.1 を実際に適用したい状況は G/Q 上に H 開軌道が存在するが次元の低い H 軌道が無限個存在する場合である．この 4 節ではそのような例で H が簡約群である例を紹介する．$H := SL(2,\mathbb{R})$ とし 2×2 行列全体 $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ に左からの掛け算で作用させる．この作用で $H \subset G := SL(4,\mathbb{R})$ とみなす．

命題 4.1 Q を $G = SL(4,\mathbb{R})$ の極大放物型部分群であって G/Q が実射影空間 $\mathbb{RP}^3$ と同型になるものとする．このとき G/Q 上には H 開軌道が存在するが $\#(H\backslash G/Q) = \infty$ となる．特に向き付け可能な一次元の H 軌道が無限個存在する．

証明 $M_2(\mathbb{R})$ の部分集合を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
Y_4 &:= \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det X \neq 0\}, \\
Y_2^\gamma &:= \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \neq 0 \right\} \quad (\gamma \in \mathbb{R}), \\
Y_2^\infty &:= \left\{ X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq 0 \right\}.
\end{aligned}$$

$GL(2,\mathbb{R})$ を左からの掛け算で $M_2(\mathbb{R})$ に作用させるとその軌道分解は次のようになる．

$$GL(2,\mathbb{R})\backslash M_2(\mathbb{R}) = \{0\} \cup Y_4 \cup \bigcup_{\gamma \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}} Y_2^\gamma.$$

ここで $GL(2,\mathbb{R})\backslash M_2(\mathbb{R}) \simeq SL(2,\mathbb{R})\backslash M_2(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times$ を注意しておく．よって $\pi\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times$ とすると同型 $(M_2(\mathbb{R})\backslash\{0\})/\mathbb{R}^\times \simeq \mathbb{RP}^3 \simeq G/Q$ より

$$H\backslash G/Q = \pi(Y_4) \cup \bigcup_{\gamma\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}} \pi(Y_2^\gamma)$$

となる．明らかに $\pi(Y_4)$ は H 開軌道である．また各 $\gamma \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ に対して $\pi(Y_2^\gamma)$ が向き付け可能であることは次のようにしてわかる．P_H を $H = SL(2,\mathbb{R})$ の極小放物型部分群とし $P_H = M_H A_H N_H$ をその Langlands 分解とする．固定部分群を計算することで $\pi(Y_2^\gamma) \simeq H/P_H \simeq \mathbb{RP}^1$ となることがわかる．さらにこれが向き付け可能なことも P_H の $\mathfrak{n}_H$ への作用の計算により従う．以上により題意が示された． □

定理 1.1 を適用すると次が言える．

系 4.2 Q を $G := SL(4,\mathbb{R})$ の極大放物型部分群であって $G/Q \simeq \mathbb{RP}^3$ となるものとする．また $H := SL(2,\mathbb{R})$ を $M_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4$ に左からの掛け算で作用させることで $H \subset G = SL(4,\mathbb{R})$ とみなす．このとき次が成り立つ．

$$\dim \mathrm{Hom}_G(C^\infty(G/Q, \wedge^2\mathfrak{n}), C^\infty(G/H)) = \infty.$$

証明 上の例は定理 1.1 の仮定を満たすことが命題 4.1 よりわかる． □

参考文献

[1] F. Bien, Orbit, multiplicities, and differential operators, Contemp. Math. **145** (1993), Amer. Math. Soc. 199–227.

[2] Harish-Chandra, Representations of semisimple Lie groups. II, Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 26–65.

[3] T. Frankel, The Geometry of Physics, Cambridge University Press (2004), Cambridge, UK, lxii+686 pp.

[4] M. E. Herrera, Integration on a semianalytic set, Bull. Soc. Math. France **94** (1966), 141-180.

[5] B. Kimelfeld, Homogeneous domains in flag manifolds of rank 1, J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 506–588.

[6] T. Kobayashi, Introduction to harmonic analysis on real spherical homogeneous spaces, Proceedings of the 3rd Summer School on Number Theory "Homogeneous Spaces and Automorphic Forms" in Nagano (F. Sato, ed.), 1995, 22–41 (in Japanese).

[7] T. Kobayashi, Shintani functions, real spherical manifolds, and symmetry breaking operators, Developments in Mathematics **37** (2014), 127–159.

[8] T. Kobayashi, T. Oshima, Finite multiplicity theorems for induction and restriction, Adv. Math. **248** (2013), 921–944.

[9] T. Kobayashi, B. Speh, Symmetry Breaking for Representations of Rank One Orthogonal Groups, Mem. Amer. Math. Soc. **238** (2015).

[10] T. Kobayashi, T. Yoshino, Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces-revisited, Pure and Appl. Math. Quartcrly **1** (2005), 603–684.

[11] T. Matsuki, Orbits on flag manifolds, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto 1990, Vol. II (1991), Springer-Verlag, 807–813.

[12] T. Tauchi, Dimension of the space of intertwining operators from degenerate principal series, arXiv:1708.00610.

[13] H. Whiteney, Elementay structure of real algebraic varieties, Ann. of Math. **66** (1957), 545–556.