数理解析研究所講究録
第2083巻 2018年 137-145

Distributive Concrete Domains and Sheaves on DI-Domains

倉田俊彦
法政大学経営学部

Toshihiko Kurata
Faculty of Business Administration, Hosei University
kurata@hosei.ac.jp

1. 導入と準備

[5] において, distributive concrete domain を特別な位相空間上の sheaf として捉える試みを行った. その際に, 位相（開集合間の包含関係）に要請された条件は広く知られる DI-domain の定義と類似している. そこで, sheaf の構造自体を DI-domain 上に一般化しても同様の議論が展開できることを確認したい.

半順序集合 $\langle D, \sqsubseteq\rangle$ に関連する記法は [1, 4] などに従い, D のコンパクト元を全て集めた集合を $\mathsf{K}D$ で表し, $x \in D$ に対して $(\mathsf{K}D)_x = \{a \in \mathsf{K}D \mid a \sqsubseteq x\}$ と定義する. また, 任意の $x, y \in D$ に対して, $x \uparrow y$ で D 中に $\{x, y\}$ の上界が存在することを表す. また, $x \sqsubset y$ であり, 更に $x \sqsubseteq z \sqsubseteq y$ の時は $x = z$ または $y = z$ のどちらかが保証される時には $x \prec y$ と記述することにする. x から y までの interval は $[x, y] = \{z \in D \mid x \sqsubseteq z \sqsubseteq y\}$ として定義され, D 上の interval の集合を $\mathrm{I}(D)$ とする. そして, $\mathrm{I}(D)$ の上に擬順序 $\leq$ を

$$[x_1, y_1] \leq [x_2, y_2] \Longleftrightarrow x_1 = y_1 \sqcap x_2 \ \ \& \ \ y_2 = y_1 \sqcup x_2$$

のように導入して, この擬順序を含む最小の同値関係を $\sim$ と記述する.

任意の $x, y, z \in D, a \in \mathsf{K}D$ に対して

（性質 D） $y \uparrow z \Longrightarrow x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$

（性質 I） $(\mathsf{K}D)_a$ は有限集合

を満たす有界完備な algebraic domain $\langle D, \sqsubseteq\rangle$ は DI-domain と呼ばれる. DI-domain の基本的な性質として, （性質 D）の双対である分配則

$$x \uparrow y \ \ \& \ \ x \uparrow z \Longrightarrow x \sqcup (y \sqcap z) = (x \sqcup y) \sqcap (x \sqcup z)$$

や, D の任意の非空部分集合に下限が存在することなどが容易に確認できる. 更に, 任意の $x, y, z \in D$ に対して

(性質 C) $x \uparrow y \ \& \ x \sqcap y \prec x \Longrightarrow y \prec x \sqcup y.$

(性質 Q) $\neg(x \uparrow y) \ \& \ x \sqcap y \prec x \Longrightarrow \exists ! t \in D \ (\neg(x \uparrow t) \ \& \ x \sqcap y \prec t \sqsubseteq y).$

(性質 R) $x \prec y \ \& \ x \prec z \ \& \ [x, y] \sim [x, z] \Longrightarrow y = z.$

が成り立つようなDI-domainはdistributive concrete domain [3, 4, 6] と呼ばれ, 高階の計算体系 [2] における逐次評価の意味論の枠組として広く知られている.

D をDI-domainとする. この時, $x, y \in D$ に対して, $y \sqsubseteq x$ の時に限り y から x への射 $y \to x$ が只一つ存在することとして, D をcategoryとみなすことができる. すると, $x \in D$ に対して

$$y \to x \in S \ \Rightarrow \ \forall z \in \downarrow y \quad z \to x \in S$$

を満たす集合 $S \subseteq \{y \to x \mid y \in \downarrow x\}$ が x のsieveに相当する. 更に, 各 $x \in D$ に対して, $\bigsqcup\{y \mid y \to x \in S\} = x$[1] を満たす x のsieve S を全て集めた集合を $J(x)$ と定義すると, 任意の $x \in D$ に対して

(1) $\{y \to x \mid y \in \downarrow x\} \in J(x)$

(2) $\forall S \in J(x) \quad \forall y \in \downarrow x \quad \{z \to y \mid z \to x \in S\} \in J(y)$

(3) $\forall S \in J(x) \quad \forall R:$ x のsieve
$$(\forall y \to x \in S \quad \{z \to y \mid z \to x \in R\} \in J(y) \ \Rightarrow \ R \in J(x))$$

は何れも成り立つ. 例えば, (2) を確認するために $\bar{S} = \bigcup_{z \to x \in S} (\mathsf{K}D)_z$ とする. すると, 任意の $y \in \downarrow x$, $a \in (\mathsf{K}D)_y$ に対して, $a \sqsubseteq x = \bigsqcup^{\uparrow}\{b_1 \sqcup \cdots \sqcup b_n \mid n \in \mathbb{N}, b_1, \cdots, b_n \in \bar{S}\}$ が成り立つ. 従って, $a \sqsubseteq b_{a,1} \sqcup \cdots \sqcup b_{a,n_a}$ を満たす $n_a \in \mathbb{N}$, $b_{a,1}, \cdots, b_{a,n_a} \in \bar{S}$ が存在し,

$$a = a \sqcap (b_{a,1} \sqcup \cdots \sqcup b_{a,n_a}) = (a \sqcap b_{a,1}) \sqcup \cdots \sqcup (a \sqcap b_{a,n_a})$$

となる. 更に,

$$\begin{aligned} y &= \bigsqcup^{\uparrow}\{(a \sqcap b_{a,1}) \sqcup \cdots \sqcup (a \sqcap b_{a,n_a}) \mid a \in (\mathsf{K}D)_y\} \\ &\sqsubseteq \bigsqcup\{z \in \downarrow y \mid z \to x \in S\} \end{aligned}$$

従って, y のsieve $\{z \to y \mid z \to x \in S\}$ は $J(y)$ に属する.

---

[1] $\{y \mid y \to x \in S\}$ は上に有界なので上限を持つ.

こうして, D の順序構造のみに依存して定まる Grothendieck 位相 J が得られる. そこで, site (D, J) に対して presheaf $P \in \mathbf{Sets}^{D^{\mathrm{op}}}$ と $x \in D$, $S \in J(x)$ を考え, 任意の $y \in\downarrow x$, $z \in\downarrow y$ に対して

$$P(y \overset{\exists}{\to} z)(s_{y\to x}) = s_{z\to x}{}^{2}$$

が成り立つような $\langle s_{y\to x} : y \to x \in S\rangle \in \prod_{y\to x\in S} P(y)$ を S に関する P の matching family と呼ぶ. また, 任意の $y \to x \in S$ に対して

$$P(x \overset{\exists}{\to} y)(s) = s_{y\to x}$$

が成り立つような $s \in P(x)$ は matching family $\langle s_{y\to x} : y \to x \in S\rangle$ の合併と呼ぶ. その上で, 任意の matching family に対して, その合併が常に只一つ存在するような $P \in \mathbf{Sets}^{D^{\mathrm{op}}}$ を site (D, J) に関する sheaf と呼び, これらを対象とする $\mathbf{Sets}^{D^{\mathrm{op}}}$ の full subcategory を $\mathbf{Sh}(D)$ で表す.

2. Sheaf と Domain の対応について

上のように一般化された sheaf の概念と distributive concrete domain の間に双方向の変換を与えることができる.

先ず, distributive concrete domain から DI-domain 上の sheaf を構成する方向については, sheaf の定義のみが一般化されているので, ほぼ [5] の通りの議論で十分となる. 概要を纏めると, 表現定理によって, 任意の distributive concrete domain はある deterministic concrete data structure $\mathscr{M}$ 上に生成される state の集合 $D_{\mathscr{M}}$ を包含関係で順序付けた構造として定義することができる. そこで, [5] で与えた通りに, prime state の集合 $P_{\mathscr{M}}$ に基づいて集合 $X_{\mathscr{M}}$ を定義し, 更に, 各 $p \in P_{\mathscr{M}}$ に対して $B(p) \subseteq X_{\mathscr{M}}$ を定義する. その上で,

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \qquad p_i \uparrow p_j$$

であるような $n \in \mathbb{N}, p_1, \ldots, p_n \in P_{\mathscr{M}}$ に対して, $\bigcup_{i=1}^{n} B(p_i)$ の形で与えられる開集合を全て集めた集合を $\mathsf{K}C_{\mathscr{M}}$ とする. これらの開集合の間の包含関係に基づいて, 有向集合 $A \subseteq \mathsf{K}C_{\mathscr{M}}$ の上限 $\bigcup^{\uparrow} A$ の形をした開集合を全て集めて $C_{\mathscr{M}}$ とする. これは, [5] で与えられている位相 $\mathcal{O}X_{\mathscr{M}}$ から実際に section が存在する開集合のみを抽出した部分構造といってもよい.

---

[2] $y \overset{\exists}{\to} z$ は D における射 $z \to y$ に対応する D^{op} の射を表す.

こうして得られる順序構造 $\langle C_{\mathscr{M}}, \subseteq\rangle$ がDI-domainとなることが確認できる．そこで，任意の $U \in C_{\mathscr{M}}$ に対して

$$s \in F_{\mathscr{M}}(U) \iff U = \bigcup\{B(p) \mid p \in P_{\mathscr{M}}\ p \subseteq s\}$$

として $F_{\mathscr{M}} \in \mathbf{Sets}^{C_{\mathscr{M}}^{\mathrm{op}}}$ を定義する.[3] こうして得られる，$F_{\mathscr{M}}$ はDI-domain $C_{\mathscr{M}}$ 上のsheafの構造を持っていることが分かる．

今回の考察において本質的な部分は逆方向の変換であり，sheafの定義が一般化されたとしても，障害なくdistributive concrete domainの構造が生成されることを確認する必要がある．DI-domain $\langle D, \sqsubseteq\rangle$ 上のsheaf $P \in \mathbf{Sh}(D)$ に対して，

$$C(P) = \coprod_{x \in D} P(x)$$

とする．また，各 $s, t \in C(P)$ に対して

$$\exists x, y \in D\ (\,y \sqsubseteq x\ \&\ s \in P(x)\ \&\ t \in P(y)\ \&\ t = P(x \overset{\exists}{\to} y)(s)\,)$$

の時に $s \sqsubseteq t$ と定義して $C(P)$ 上に半順序を入れる．この半順序集合 $\langle C(P), \sqsubseteq\rangle$ において，$s \in P(x)$ と $t \in P(y)$ に上界が存在することは，D において $x \uparrow y$ であり $P(x \overset{\exists}{\to} x \sqcap y)(s) = P(y \overset{\exists}{\to} x \sqcap y)(t)$ が成り立つことと同値である．実際に，s, t の上限 $u \in P(z)$ が存在するとしたら

$$\begin{aligned}
P(x \overset{\exists}{\to} x \sqcap y)(s) &= P(x \overset{\exists}{\to} x \sqcap y) \circ P(z \overset{\exists}{\to} x)(u) \\
&= P(z \overset{\exists}{\to} x \sqcap y)(u) \\
&= P(y \overset{\exists}{\to} x \sqcap y) \circ P(z \overset{\exists}{\to} y)(u) \\
&= P(y \overset{\exists}{\to} x \sqcap y)(t)
\end{aligned}$$

である．逆については，

$$S = \{z_1 \to x \sqcup y \mid z_1 \in\downarrow x\} \cup \{z_2 \to x \sqcup y \mid z_2 \in\downarrow y\}$$

$$\forall z_1 \in\downarrow x \text{ に対して } u_{z_1 \to x \sqcup y} = P(x \overset{\exists}{\to} z_1)(s)$$

$$\forall z_2 \in\downarrow y \text{ に対して } u_{z_2 \to x \sqcup y} = P(y \overset{\exists}{\to} z_2)(t)$$

と定義すると $S \in J(x \sqcup y)$ であり，$\langle u_{z \to x \sqcup y} \mid z \to x \sqcup y \in S\rangle$ は S に関する P のmatching familyとなる．そして，このmatching familyの合併は s, t の上限となっている．

[3]射の対応に関しても，[5]と同様にsectionを制限する形で自然に定義を与えることができる．

また, $A \subseteq C(P)$ に対して, 任意の $s, t \in A$ が $C(P)$ において $s \uparrow t$ を満たす時は, A には上限が存在する. 実際に, $X = \{x \in D \mid \exists s \in A \;\; s \in P(x)\}$ は D の中で上限を持つことが分かる. そこで, $S = \{y \to \bigsqcup X \mid \exists x \in X \;\; y \in \downarrow x\}$ とすると $S \in J(\bigsqcup X)$ である. また, 各 $s \in A$, $s \in P(x)$, $y \in\downarrow x$ に対して $u_{y \to \bigsqcup X} = P(\bigsqcup X \overset{\exists}{\to} y)(s)$ として, S に関する matching family $\langle u_{y \to \bigsqcup X} \mid y \to \bigsqcup X \in S\rangle$ を定義すると, その合併は A の上限となっている. ここで示した性質から, 直ちに, $C(P)$ の有向完備性と有界完備性を導くことができる.

補題 1. 任意の $x \in D$, $s \in P(x)$ に対して, $x \in \mathsf{K}D$ と $s \in \mathsf{K}C(P)$ は同値である.

Proof. $s \in \mathsf{K}C(P)$ の時に, $x \sqsubseteq \bigsqcup^{\uparrow} X$ とする. この時, 任意の $a \in (\mathsf{K}D)_{x \sqcap (\bigsqcup^{\uparrow} X)}$ に対して, $a \sqsubseteq x$ であり, $a \sqsubseteq y$ を満たす $y \in X$ が存在するので

$$\begin{aligned}\textstyle\bigsqcup^{\uparrow}\{x \sqcap y \mid y \in X\} &\sqsubseteq x \sqcap (\textstyle\bigsqcup^{\uparrow} X)\\ &= \textstyle\bigsqcup^{\uparrow} (\mathsf{K}D)_{x \sqcap (\bigsqcup^{\uparrow} X)}\\ &\sqsubseteq \textstyle\bigsqcup^{\uparrow}\{x \sqcap y \mid y \in X\}\end{aligned}$$

が成り立つ. そこで, $S = \{z \to x \mid \exists y \in X \;\; z \in\downarrow(x \sqcap y)\}$ とすると, $\bigsqcup\{z \mid z \to x \in S\} = x \sqcap (\bigsqcup^{\uparrow} X) = x$ であり, $S \in J(x)$ となる. ここで, s は S に関する matching family

$$\langle P(x \overset{\exists}{\to} z)(s) : z \to x \in S\rangle$$

の合併となるので, $s = \bigsqcup^{\uparrow}\{P(x \overset{\exists}{\to} z)(s) \mid z \to x \in S\}$ となる. 従って, $s = P(x \overset{\exists}{\to} z)(s)$ となる $z \to x \in S$ が存在し, $x = z \sqsubseteq x \sqcup y \sqsubseteq y$ を満たす $y \in X$ の存在が保証される.

逆に, $x \in \mathsf{K}D$ の時に, $s \sqsubseteq \bigsqcup^{\uparrow} A$ とする. この時, $x \sqsubseteq \bigsqcup^{\uparrow}\{y \mid \exists t \in A \;\; t \in P(y)\}$ より, $x \sqsubseteq y$, $t \in P(y)$ となる $t \in A$ が存在する. この t に対して $P(y \overset{\exists}{\to} x)(t) = s$ が成り立っている. □

この補題により, $\mathsf{K}C(P) = \coprod_{a \in \mathsf{K}D} P(a)$ と特徴付けられる. そこで, 任意の $s \in C(P)$, $s \in P(x)$ に対して, $S = \{y \to x \mid \exists a \in (\mathsf{K}D)_x \;\; y \in\downarrow a\}$ とすると, $S \in J(x)$ であり, s は S に関する matching family $\langle P(x \overset{\exists}{\to} y)(s) : y \to x \in S\rangle$ の合併であるから,

$$\begin{aligned}s &= \textstyle\bigsqcup^{\uparrow}\{P(x \overset{\exists}{\to} y)(s) \mid y \to x \in S\}\\ &= \textstyle\bigsqcup^{\uparrow}(\mathsf{K}C(P))_s\end{aligned}$$

が得られる. 従って, $C(P)$ は algebraic domain であることが分かる.

以下では, $C(P)$ について, distributive concrete domain として要請される 5 つの性質を確認する. (性質 I) については, $s \in \mathsf{K}C(P)$, $s \in P(x)$ とした時に, 補題 1 から

$(\mathsf{K}C(P))_s = \{P(x \overset{\exists}{\to} a)(s) \mid a \in (\mathsf{K}D)_x\}$ であり, D が DI-domain であることから, これは明らかに有限集合となる.

補題 2. $C(P)$ は（性質 D）を満たす.

Proof. $s, t, u \in C(P)$ に対して, $t \uparrow u$, $t \in P(x)$, $u \in P(y)$ と仮定する. また, $v \in P(z)$ が $v \sqsubseteq s$ かつ $v \sqsubseteq t \sqcup u$ を満たすとする. この時, $P(z \overset{\exists}{\to} x \sqcap z)(v) \sqsubseteq v \sqsubseteq s$ であり,

$$\begin{aligned}
P(z \overset{\exists}{\to} x \sqcap z)(v) &= P(z \overset{\exists}{\to} x \sqcap z) \circ P(x \sqcup y \overset{\exists}{\to} z)(t \sqcup u) \\
&= P(x \sqcup y \overset{\exists}{\to} x \sqcap z)(t \sqcup u) \\
&= P(x \overset{\exists}{\to} x \sqcap z) \circ P(x \sqcup y \overset{\exists}{\to} x)(t \sqcup u) \\
&= P(x \overset{\exists}{\to} x \sqcap z)(t)
\end{aligned}$$

から $P(z \overset{\exists}{\to} x \sqcap z)(v) \sqsubseteq t$ である. 従って, $P(z \overset{\exists}{\to} x \sqcap z)(v) \sqsubseteq s \sqcap t \sqsubseteq (s \sqcap t) \sqcup (s \sqcap u)$ が得られる. また同様にして, $P(z \overset{\exists}{\to} y \sqcap z)(v) \sqsubseteq (s \sqcap t) \sqcup (s \sqcap u)$ も得られる. 以上のことから, $v = P(z \overset{\exists}{\to} x \sqcap z)(v) \sqcup P(z \overset{\exists}{\to} y \sqcap z)(v) \sqsubseteq (s \sqcap t) \sqcup (s \sqcap u)$ となり,

$$\begin{aligned}
s \sqcap (t \sqcup u) &= \bigsqcup\nolimits^{\uparrow} \{v \in C(P) \mid v \sqsubseteq s \ \&\ v \sqsubseteq t \sqcup u\} \\
&\sqsubseteq (s \sqcap t) \sqcup (s \sqcap u)
\end{aligned}$$

と順序付けられる. また, 逆の順序関係は明らかである. □

補題 3. 任意の $s, t \in C(P)$, $s \in P(x)$, $t \in P(y)$ に対して, $C(P)$ において $s \prec t$ ならば, D において $x \prec y$ であり, $\{d \in D \mid x \neq x \sqcup d = y\}$ の最小元が存在する.

Proof. 先ず, D において $x \sqsubset z \sqsubset y$ となる z が存在するとすると, $s \sqsubset P(y \overset{\exists}{\to} z)(t) \sqsubset t$ となり $s \prec t$ に反する. 従って, D において $x \prec y$ である.

任意の $a \in (\mathsf{K}D)_y$ に対して $x \sqcup a = x$ と仮定すると, $(\mathsf{K}D)_y \subseteq \downarrow x$ となり, $x = x \sqcup \bigsqcup^{\uparrow}(\mathsf{K}D)_y = x \sqcup y = y$ が得られるので矛盾する. 従って, $x \neq x \sqcup a = y$ となる $a \in (\mathsf{K}D)_y$ が存在する. この a について, $(\mathsf{K}D)_a$ が有限集合であることから,

$$B = \{b \in (\mathsf{K}D)_a \mid x \neq x \sqcup b = y\}$$

は非空有限集合となることが分かる. この B の下限を考えると

$$x \sqcup \bigsqcap B = \bigsqcap \{x \sqcup b \mid b \in B\} = y$$

が成り立つことが分かる.

次に，$\bigsqcap B$ の最小性を確認するために $x \sqcup z = y$ と仮定する．この時，任意の $b \in (\mathsf{K}D)_{a \sqcap z}$ に対して $x = x \sqcup b$ であれば，$x = x \sqcup (a \sqcap z) = (x \sqcup a) \sqcap (x \sqcup z) = y$ となり矛盾する．従って，$x \neq x \sqcup b = y$ となる $b \in (\mathsf{K}D)_{a \sqcap z}$ の存在が保証される．この b は必然的に B に属することになるので $\bigsqcap B \sqsubseteq b \sqsubseteq z$ が得られる． □

$s, t \in C(P)$, $s \in P(x)$, $t \in P(y)$ に対して，$s \prec t$ の時，上の補題における最小元を $z \in D$ として，s と t の間を補完する最小の section $u = P(y \overset{\exists}{\to} z)(t)$ が一意に定まる．そこで，場合によっては，この u を明示して $s \prec_u t$ と表記することとする．例えば，$s \prec_u t$ と書いた時には，u は $C(P)$ において $\{v \in C(P) \mid s \neq s \sqcup v = t\}$ の最小元である．

補題 4. 任意の $s, t, u \in C(P)$ に対して，$s \uparrow t$ の時，$s \sqcap t \prec_u s$ と $t \prec_u s \sqcup t$ は同値である．

Proof. $s \sqcap t \prec_u s$，つまり，u は

$$\{v \in C(P) \mid s \sqcap t \neq (s \sqcap t) \sqcup v = s\} \tag{1}$$

の最小元と仮定する．この時，$t = t \sqcup u$ とすると $s \sqcap t = (s \sqcup u) \sqcap (t \sqcup u) = (s \sqcap t) \sqcup u$ となり矛盾する．また，$s \sqcap (t \sqcup u) = (s \sqcup u) \sqcap (t \sqcup u) = s$ より，$s \sqsubseteq t \sqcup u$ であり，$s \sqcup t \sqsubseteq t \sqcup u$ が得られる．以上から，$t \neq t \sqcup u = s \sqcup t.$ が成り立つことが分かる．また，$v \in C(P)$ が $t \neq t \sqcup v = s \sqcup t$ を満たすと仮定する．この時，$s \sqcap t = (s \sqcap t) \sqcup (s \sqcap v)$ であれば，$s \sqcap v \sqsubseteq s \sqcap t \sqsubseteq t$ となり $t = t \sqcup (s \sqcap v) = (t \sqcup s) \sqcap (t \sqcup v) = t \sqcup v$ となるので矛盾する．また，$(s \sqcap t) \sqcup (s \sqcap v) \sqsubseteq s$ は明らかであり，$s \sqcap t \neq (s \sqcap t) \sqcup (s \sqcap v) = s$ となる．ここで，u は (1) の最小元であったので $u \sqsubseteq s \sqcap v \sqsubseteq v$ が得られる．以上から $t \prec_u s \sqcup t$ が保証される．

逆に，$t \prec_u s \sqcup t$，つまり，u は

$$\{v \in C(P) \mid t \neq t \sqcup v = s \sqcup t\} \tag{2}$$

の最小元と仮定する．この時，$s \sqcap t = (s \sqcap t) \sqcup u$ とすると $u \sqsubseteq s \sqcap t \sqsubseteq t$ であるから，$t = t \sqcup u$ となり矛盾する．また，s は (2) に属するので $u \sqsubseteq s$ であり，$(s \sqcap t) \sqcup u = (s \sqcup u) \sqcap (t \sqcup u) = s \sqcap (s \sqcup t) = s$ が成り立つ．以上から，$s \sqcap t \neq (s \sqcap t) \sqcup u = s$ が得られる．また，$v \in C(P)$ が $s \sqcap t \neq (s \sqcap t) \sqcup v = s$ を満たすと仮定する．この時，$v \sqsubseteq s$ であるから，$t = t \sqcup v$ と仮定すると，$s \sqcap t = (s \sqcup v) \sqcap (t \sqcup v) = (s \sqcap t) \sqcup v$ となり矛盾する．また，$v \sqsubseteq s \sqsubseteq s \sqcup t$ から $t \sqcup v \sqsubseteq s \sqcup t$ であり，$t \neq t \sqcup v = s \sqcup t$ となる．ここで，u は (2) の最小元であったので $u \sqsubseteq v$ が得られる．以上から $s \sqcap t \prec_u s$ が保証される． □

この補題から直ちに $C(P)$ に対して（性質 C）が保証される. 更に,

$$[s_1, t_1] \leq [s_2, t_2] \text{ もしくは } [s_2, t_2] \leq [s_1, t_1]$$

の時に, $s_1 \prec_u t_1$ であれば $s_2 \prec_u t_2$ となることが分かる. このことから, $s \prec_u t_1$ かつ $[s, t_1] \sim [s, t_2]$ の時に, $s \prec_u t_2$ であり $t_1 = s \sqcup u = t_2$ が成り立つ. 従って,（性質 R）も保証されることが分かる. 更に, 以下の補題により, 残りの（性質 Q）も確認することができる.

補題 5. $C(P)$ は（性質 Q）を満たす.

Proof. $s, t \in C(P)$, $s \sqcap t \in P(x)$, $s \in P(y)$, $t \in P(z)$ として, 更に, $\neg(s \uparrow t)$, $s \sqcap t \prec_u s$ と仮定する. この時, $x \prec y$, $x \sqsubseteq z$ であるから $y \sqsubseteq z$ であり, $v = P(z \overset{\exists}{\to} y)(t)$ と定義する.

このの v に対して, $s \uparrow v$ と仮定すると, $\{s, v\}$ の上界 $w \in P(d)$ に対して

$$s = P(d \overset{\exists}{\to} y)(w) = v = P(z \overset{\exists}{\to} y)(t) \sqsubseteq t$$

となり $\neg(s \uparrow t)$ に矛盾する. 従って, $\neg(s \uparrow v)$ が得られる.

更に, $u \in P(a)$ とすると, a は D における $\{d \in D \mid x \neq x \sqcup d = y\}$ の最小元となっている. この a に対して, $v \in P(y) = P(x \sqcup a)$ なので, $w = P(z \overset{\exists}{\to} a)(t)$ とすると, $s \sqcap t \prec_w v$ であることが容易に確認出来る. また $v \sqsubseteq t$ は定義から明らかである.

この v の一意性を示すために, $y' \in D$, $v' = P(z \overset{\exists}{\to} y')(t)$ に対して, $\neg(s \uparrow v')$ かつ $s \sqcap t \prec_{w'} v' \sqsubseteq t$, $w' \in P(a')$ と仮定する. この時, $a \sqcap a' \sqsubseteq x$ であれば

$$\begin{aligned}
P(y \overset{\exists}{\to} a \sqcap a')(s) &= P(x \overset{\exists}{\to} a \sqcap a') \circ P(y \overset{\exists}{\to} x)(s) \\
&= P(x \overset{\exists}{\to} a \sqcap a')(s \sqcap t) \\
&= P(x \overset{\exists}{\to} a \sqcap a') \circ P(z \overset{\exists}{\to} x)(t) \\
&= P(z \overset{\exists}{\to} a \sqcap a')(t)
\end{aligned}$$

となり, 両者の上限 $P(y \overset{\exists}{\to} a)(s) \sqcup P(z \overset{\exists}{\to} a')(t) \in P(a \sqcup a')$ が存在することとなる. 従って, $\{s, v'\}$ は上界 $(s \sqcap t) \sqcup P(y \overset{\exists}{\to} a)(s) \sqcup P(z \overset{\exists}{\to} a')(t)$ を持つこととなり矛盾する. これによって $x \neq x \sqcup (a \sqcap a') \sqsubseteq y \sqcap y'$ が得られる. ここで, a は $\{d \in D \mid x \neq x \sqcup d = y\}$ の最小元であったので, $a \sqsubseteq a \sqcap a' \sqsubseteq a'$ であり, a' は $\{d \in D \mid x \neq x \sqcup d = y'\}$ の最小元であったので, $a' \sqsubseteq a \sqcap a' \sqsubseteq a$ である. 以上から, $a = a'$ となるので, $y = x \sqcup a = x \sqcup a' = y'$ であり, $v = v'$ が結論付けられる. $\square$

定理 6. 任意の DI-domain D と D 上の sheaf P に対して, $\langle C(P), \sqsubseteq\rangle$ は distributive concrete domain となる.

参考文献

[1] S. Abramsky and A. Jung, Domain Theory, in *Handbook of Logic in Computer Science Volume 3 Semantic Structures*, Oxford Science Publications, 1994.

[2] H .P. Barendregt, *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics Volume 103, North-Holland, 1984.

[3] G. Berry and P.L. Curien, Sequential algorithms on concrete data structures, *Theoretical Computer Science* 20, pp. 265–321, 1982.

[4] G. Kahn and G.D. Plotkin, Concrete domains, *Theoretical Computer Science* 121, pp. 187–277, 1993.

[5] T. Kurata, On sheaves categorically equivalent to distributive concrete domains, 京都大学数理解析研究所講究録 1950, pp. 12–27, 2015.

[6] C. H. L. Ong, Correspondence between operational and denotational semantics: the full abstraction problem for PCF, in *Handbook of Logic in Computer Science Volume 4 Semantic Modeling*, Oxford Science Publications, 1995.