数理解析研究所講究録 第2085巻 2018年 150-155

尖辺と燕尾の局所微分幾何学

福井 敏純 (埼玉大学)

2018 年 3 月 31 日

尖辺 (cuspidal edge) と燕尾 (swallowtail) は波面に現れる典型的な特異点である．波面の典型例として平行曲面があるが，筆者はかつて長谷川大氏と 3 次元ユークリッド空間における正則曲面の平行曲面の特異点を調べた ([2])．そこでは元の正則曲面の微分幾何的情報で特異点の情報を記述したのであった．当時は波面の微分幾何的情報をどのように記述するかというところまでは考えが至らず，特異点型のみに注目していたが，波面の特異点の微分幾何的情報は必要十分な形で記述されて然るべきである．そこで，尖辺と燕尾をダイレクトに扱い局所微分幾何的不変量を考察してみたというのが，今回の話である．細かい計算は preprint ([3]) に譲り，ざっくりアイデアを説明しようというのが，本稿の趣旨である．

1 尖辺

弧長 s で表示された $\mathbb{R}^3$ の非特異曲線 $\gamma(s)$ を考え，$\boldsymbol{t}=\gamma'$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{t}'/|\boldsymbol{t}'|$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$ をフレネ枠とすると次の公式はフレネ・セレの公式としてよく知られている．

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}'\\ \boldsymbol{n}'\\ \boldsymbol{b}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\kappa&0\\ -\kappa&0&\tau\\ 0&-\tau&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{b}\end{pmatrix}$$

ここで $\gamma(s)$ を特異点とするような特異曲面 (C^∞ 写像 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^3,0)$)

$$f(s,t)=\gamma(s)+\boldsymbol{f}_2(s)\frac{t^2}{2}+\boldsymbol{f}_3(s)\frac{t^3}{6}+\cdots+\boldsymbol{f}_m(s)\frac{t^m}{m!}+o(t^m)$$

を考える．ここで $\boldsymbol{f}_2(s)$, $\boldsymbol{f}_3(s)$, $\ldots$ はすべて法平面 $\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\rangle_{\mathbb{R}}$ に入っているとしている．s を固定するとこれは，法平面 $\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}\rangle_{\mathbb{R}}$ 内の曲線を定めるが，原点で特異点を持っていることがわかる．この特異点が $(2,3)$ カスプであれば，カスプが動いて特異曲面ができること

になり，尖辺になるだろうからそれを微分幾何的に解析しようというのが本節のアイデアである．

まず γ に沿って特異曲面 f を尊重した枠を作る．s を固定して t を動かしたとき $f(s,t)$ がカスプを定める条件は $\boldsymbol{f}_2(s)$ と $\boldsymbol{f}_3(s)$ が 1 次独立であることであり，このときは $t^2/2$ が弧長であると仮定して一般性を失わない．すると $\|\boldsymbol{f}_2(s)\| = 1$ であり $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{t}, \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{f}_2$ で γ に沿った枠ができる．特異曲面を尊重した枠である．

$$\boldsymbol{f}_k(s) = a_k(s)\boldsymbol{a}_2 + b_k(s)\boldsymbol{a}_3, \quad k = 2, 3, \ldots$$

と書くと $t^2/2$ が弧長変数であることから $a_2 = 1$, $b_2 = 0$ であり，b_3, b_4, ... を与えれば，a_3, a_4, ... は自動的に定まってしまう．$\boldsymbol{f}_2 = \cos\theta\,\boldsymbol{n} - \sin\theta\,\boldsymbol{b}$ を満たす角度 $\theta(s)$ を決めればフレネ・セレ枠と特異曲面を尊重した枠 $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ の間の変換公式は記述されるので，

特異点軌跡 $\gamma(s)$ の曲率 $\kappa(s)$ と捩率 $\tau(s)$, 角度 $\theta(s)$ と $b_3(s)$, $b_4(s)$, ...

が特異曲面 $f(s,t)$ の微分幾何的な不変量であることがわかる．これで $f(s,t)$ のテイラー展開の係数を見て定められる微分幾何的不変量が全て記述されたことになる．

なお尖辺の場合にはテイラー展開の 3 次までで決まるこのような不変量は既に定義されていて，

- 佐治・梅原・山田 ([7]) による法曲率 κ_ν 特異曲率 κ_s
- 佐治・梅原・山田・Martins([6]) による尖曲率 κ_c
- 佐治・Martins([5]) による尖向捩率 κ_t, 辺屈折曲率 κ_i

が，知られている．これらは次の様に記述される．

$$\begin{aligned}
\kappa_s =& \kappa\cos\theta, \\
\kappa_\nu =& \kappa\sin\theta, \\
\kappa_c =& b_3, \\
\kappa_t =& \tau - \theta', \\
\kappa_i =& \kappa\tau\cos\theta + \kappa'\sin\theta.
\end{aligned}$$

特異軌跡を除いて定義されている $\frac{f_s \times f_t}{\|f_s \times f_t\|}$ を延長して作った特異曲面 $f(s,t)$ の単位法ベクトルを $\boldsymbol{\nu}$ とすると，$b_3(0) \neq 0$ のとき $(f, \boldsymbol{\nu}) : (\mathbb{R}^2, (0,0)) \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ は嵌め込みで，特異点型は尖辺，$b_3(0) = 0$ のとき $(f, \boldsymbol{\nu}) : (\mathbb{R}^2, (0,0)) \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ は嵌め込みでなく，さらに $b_3'(0) \neq 0$ と仮定すると特異点型は尖交差帽子であることもわかる．

この座標を使って，種々の微分幾何学的量を計算することができる．例えばガウス曲率

と平均曲率を計算すると次式のような漸近的公式を得る.

$$
\begin{aligned}
K =&\frac{1}{t}\left(\frac{b_3\kappa\sin\theta}{2}+\left[\kappa\left(\frac{b_4\sin\theta}{3}-\frac{b_3^2\cos\theta}{4}\right)-(\tau-\theta')^2\right]t+O(t^2)\right),\\
H =&\frac{1}{t}\left(\frac{b_3}{4}+\left(\frac{b_4}{6}+\frac{\kappa\sin\theta}{2}\right)t+O(t^2)\right).
\end{aligned}
$$

2　燕尾

燕尾の特異点はカスプをもつ空間曲線であるから $\gamma(u)$ をカスプを持つ空間曲線とし，$u^2/2$ がその弧長である仮定しておく．C^∞ 写像 $f:(\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R}^3,0)$ が

$$
f(u,v)=\gamma(u)+\boldsymbol{g}_1(u)v+\boldsymbol{g}_2(u)\frac{v^2}{2}+\cdots+\boldsymbol{g}_m(u)\frac{v^m}{m!}+o(v^m),
$$

なる表示をもち，特異軌跡が $v=0$ で表わせ，f の特異軌跡への制限が余階数 1 のヤコビ行列をもつとすると，適当に座標を取り替えると $\|\boldsymbol{g}_1(u)\|=1$, $\boldsymbol{g}_0(u)=u\boldsymbol{g}_1(u)$ と仮定して良い.

$$
\boldsymbol{g}_k(u)=\sum_{i=1}^{m}\begin{pmatrix}a_{k,i}\\ b_{k,i}\\ c_{k,i}\end{pmatrix}\frac{u^i}{i!}+o(u^m),\quad k=2,3,\ldots
$$

として，適当に回転を合成して $\boldsymbol{g}_1(0)=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ とできる．$b_{1,1}\neq 0$ の仮定の下，適当に $\mathbb{R}^3$ の回転を合成すると f の 2 ジェットは次の形としてよい.

$$
\begin{pmatrix}v+u^2/2\\ b_{1,1}uv\\ c_{2,0}v^2/2\end{pmatrix}
$$

実は，帰納法で任意の m に対して次を満たす座標の存在を示すことが出来る.

$$
\begin{aligned}
\langle f_u,f_u\rangle =&u^2+v^2\varphi^2+o(|(u,v)|^m),\\
\langle f_u,f_v\rangle =&u+o(|(u,v)|^m),\\
\langle f_v,f_v\rangle =&1+o(|(u,v)|^m)
\end{aligned}
$$

ここで φ は $\varphi(0,0)\neq 0$ となる C^∞ 関数である．もし，次式を満たせば，曲線 $u=$(定数) は測地線である.

$$
\begin{aligned}
\langle f_u,f_u\rangle =&u^2+v^2\varphi^2,\\
\langle f_u,f_v\rangle =&u,
\end{aligned}
$$

$$\langle f_v, f_v\rangle = 1.$$

よって，我々の計算結果は，特異点集合に到達する測地線の存在を示唆していると言える．このとき次の数が特異曲面 $f(u,v)$ の局所微分幾何的不変量になる．

$$\begin{array}{ccccc} & b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & \cdots \\ & & c_{1,2} & c_{1,3} & \cdots \\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & \cdots \\ c_{3,0} & c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

$a_{i,j}$ 達や $b_{i,j}$ $(i \geq 2)$ 達はこれらから決まってしまうのである．なお燕尾に対してはテイラー展開の 3 次までで決まるこのような不変量は既に佐治・梅原・山田・Martins([6]) によって定義されていて，それらは極限法曲率 κ_ν, 正規尖曲率 μ_c, 極限特異曲率 τ_s であり，次の様に表される．

$$\kappa_\nu = -c_{2,0}, \quad \mu_c = \frac{c_{1,2} - c_{2,0}}{b_{1,1}^2}, \quad \tau_s = 2b_{1,1}.$$

特異軌跡を除いて定義されている $\frac{f_u \times f_v}{\|f_u \times f_v\|}$ を延長して作った特異曲面 $f(u,v)$ の単位法ベクトルを $\boldsymbol{\nu}$ とすると，$c_{1,2} \neq c_{2,0}$ のとき $(f, \boldsymbol{\nu}) : (\mathbb{R}^2, (0,0)) \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ は嵌め込みで，特異点型は燕尾，$c_{1,2} = c_{2,0}$ のとき $(f, \boldsymbol{\nu}) : (\mathbb{R}^2, (0,0)) \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ は嵌め込みでないこともわかる．

この座標でガウス曲率と平均曲率を計算すると次式を得る．

$$\begin{aligned} K =& \frac{1}{v}\Big[\frac{c_{2,0}(c_{2,0} - c_{1,2})}{b_{1,1}^2} + \Big(\frac{3c_{2,0}b_{1,2}(c_{2,0} - c_{1,2})}{b_{11}^3} + \frac{c_{2,0}c_{1,3} + c_{2,1}c_{1,2} - \frac{7}{2}c_{2,0}c_{2,1}}{b_{1,1}^2}\Big)u \\ &-\Big(\frac{c_{2,0}^2(c_{2,0} - c_{1,2})^2}{b_{1,1}^4} - \frac{b_{1,2}c_{2,0}c_{2,1}}{2b_{1,1}^3} - \frac{c_{2,1}^2 - 2c_{2,0}c_{2,2} - 4c_{1,2}c_{3,0} + 6c_{2,0}c_{3,0}}{4b_{1,1}^2} + c_{2,0}^2\Big)v \\ &+ o(|(u,v)|)\Big], \\ H =& \frac{1}{v}\Big[\frac{c_{2,0} - c_{1,2}}{2b_{1,1}^2} + \Big(\frac{3b_{1,2}(c_{1,2} - c_{2,0})}{2b_{1,1}^3} + \frac{5c_{2,1} - 2c_{1,3}}{4b_{1,1}^2}\Big)u \\ &+ \Big(\frac{-c_{2,0}(c_{1,2} - c_{2,0})^2}{2b_{1,1}^4} + \frac{b_{1,2}c_{2,1}}{4b_{1,1}^3} + \frac{c_{3,0} - c_{2,2}}{4b_{1,1}^2} - c_{2,0}\Big)v + o(|(u,v)|)\Big]. \end{aligned}$$

燕尾のすぐそばに尖辺が存在するが，前節で定めた尖辺の不変量は燕尾の近傍でどの様に振る舞うであろうか? この問に答えるのが次の漸近公式である．

$$\kappa = \frac{1}{|u|}\left[b_{1,1} + b_{1,2}u + \left(b_{1,3} + b_{1,1}^3 + \frac{c_{1,2}^2}{b_{1,1}}\right)\frac{u^2}{2} + O(u^3)\right],$$

$$\tau = \frac{1}{u}\Big[\frac{c_{1,2}}{b_{1,1}} + \frac{b_{1,1}c_{1,3} - 2b_{1.2}c_{1,2}}{2b_{1,1}^2}u$$
$$+\Big(\frac{2c_{1,2}(3b_{1,2}^2 - c_{1,2}^2)}{b_{1,1}^3} - \frac{3(b_{1,3}c_{1,2} + b_{1,2}c_{1,3})}{b_{1,1}^2} + \frac{c_{1,4}}{b_{1,1}} - 2b_{1,1}c_{1,2}\Big)\frac{u^2}{2} + O(u^3)\Big],$$
$$\cos\theta = -1 + \frac{c_{2,0}^2}{b_{1,1}^2}\frac{u^2}{2} - \frac{c_{2,0}(b_{1,2}c_{2,0} - b_{1,1}c_{2,1})}{b_{1,1}^3}u^3 + O(u^4),$$
$$b_3 = \frac{-1}{|b_{1,1}u|^{\frac{1}{2}}}\Big(\frac{2(c_{1,2} - c_{2,0})}{b_{1,1}} + \Big(\frac{5c_{2,1} - 2c_{1,3}}{b_{1,1}} + \frac{b_{1,2}(c_{2,0} - c_{1,2})}{b_{1,1}^2}\Big)u + O(u^2)\Big).$$

3 今後の課題

最後に今後考えるべき問題を幾つか述べておく．

Preprint([3]) では漸近線や曲率線の特異点も考察している．しかしながら尖辺の近傍に放物点軌跡が現れる場合は，漸近線の方程式が退化してしまうので考察の対象から外している．この場合の考察を最初の問題として挙げておく．

本稿に述べた微分幾何的不変量は曲面の埋め込みに依存する不変量で外在的不変量である．しかしながら，よく知られているようにガウス曲率は第 1 基本形式のみからきまる不変量で埋め込みに依存しない．このような不変量を内在的不変量と呼ぶのであるが，内在的不変量をすべて決定せよという問題は未解決である．ガウス曲率から導出される不変量は内在的不変量であるので，ガウス曲率の表示式を精査するのは内在的不変量の候補を挙げる際は参考になるであろう．またある不変量が内在的不変量でないことを示すのは，適切な等長変形を構成しその不変量が考えている等長変形に沿って変わる事を示すのが常套手段と思われる．

論文 [2] にも述べたように，正則曲面の平行曲面には尖辺や燕尾より退化した特異点も現れる．それらの微分幾何的不変量を考察するのも手がついていない問題である．

参考文献

[1] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, Singularities of maximal surfaces, Math. Z., **259** (2008), 827–848.

[2] T. Fukui and M. Hasegawa, Singularities of parallel surfaces, Tohoku Math. J., **64** (2012) 387–408.

[3] T. Fukui, Local differential geometry of cuspidal edge and swallowtail, preprint, `http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/Fukui/ListofPapers.html`

[4] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space, Pac. J. Math., **221** (2005), 303–351.

[5] L. Martins and K. Saji, Geometric invariants of cuspidal edges, Canad. J. Math., **68** (2016), 445–462.

[6] L. Martins, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamda, Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts, A. Futaki et al. (eds.), Geometry and Topology of Manifolds, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **154**, 247–281.

[7] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, The geometry of fronts, Ann. of Math., **169** (2009), 491–529.