

ランダム速度場下での弾性乱流の発生とその統計性

名古屋工業大学大学院・物理工学専攻 渡邊 威, 後藤 俊幸

Takeshi WATANABE & Toshiyuki GOTOH
Department of Physical Science and Engineering,
Nagoya Institute of Technology

Abstract

高分子溶液の遅い流れで発生する不規則流動現象である弾性乱流は、平均流の流線が曲率を有することがその発生条件の一つであることが知られている。これは弾性乱流が流れ場が非一様で非等方な条件下でしか観測されないことを意味する。本研究では平均流が存在しない、統計的に一様でランダムな速度場下において弾性乱流と類似した乱流現象が観測されることを数値的に示す。このとき観測される”等方弾性乱流”の統計則と構造、関連研究で得られた等方粘弾性乱流の小スケールでの振る舞いと類似性について議論する。

1 はじめに

乱流の摩擦抵抗低減効果（トムズ効果）に代表されるように、高分子鎖を含有する流れは独特の乱流特性を示すことが古くから知られている [1, 2, 3]。伸長した高分子鎖が静止流体中で平衡状態に緩和する特性時間を τ 、乱流のマイクロな特性時間を τ_K とするとき、これらの比

$$W_i = \frac{\tau}{\tau_K} \quad (1)$$

は Weissenberg 数と呼ばれ、流れと高分子の相互作用を特徴づける重要な無次元パラメータである。高 W_i 数では、高分子鎖は流れの中で強く伸長して弾性ストレスの増大を引き起こし、これは流れ場の変形をもたらす。この性質は流れの状態を特徴づける Reynolds 数 Re が低い、層流状態の流れでも同様である。弾性乱流とは、 Re 数が低いが、 W_i 数が高い状態の高分子溶液の流れに特有の乱流現象である [4]。弾性乱流は、i) 弾性乱流の発生に伴う抵抗の増大、ii) 速度や圧力変動のパワースペクトルの冪的減衰、iii) 速度勾配の揺らぎの非ガウス統計分布、といった特徴を持ち、ニュートン流体の乱流現象で良く知られた性質と類似した性質を有する事が知られている [5]。またこれらの性質は、数百マイクロからミリスケールにおける物質混合に利用できるため、マイクロミキサーへの応用を見据えた研究も盛んにおこなわれている [6]。

層流の中で高分子鎖が伸長し、その結果流れ場が線型不安定化する「弾性不安定性」が発生するための条件として、平均流の流線が湾曲している必要があることが知られている [7]。これは例えばテイラー-クエット流れの場合、高分子伸長に伴って hoop ストレスと呼ばれる応力の角度方向成分 ($\theta\theta$) が増大し、これが揺らぎの動径方向成分とカップルして、速度擾乱の増幅を引き起こすと理解されている。基本場が湾曲した流れにおいては、実際に様々な弾性乱流が観測されており、これまで多くの研究が行われてきた [9, 10, 13]。一方で最近、直線状の流線を示す基本場においても弾性乱流が発生することが理論・数値的に示され [8, 11, 12]、またチャンネル流の実験においても弾性乱流への遷移が詳細に調べられている [14]。これは弾性乱流が多様な流れ場において普遍的に観測されることを示している。

弾性乱流の発生条件や統計則に関しては、流れ場の境界条件等の詳細に依らないある共通の性質が存在しているように思われる。例えばニュートン流体の乱流における Kolmogorov の

普遍平衡理論のような普遍的な法則が弾性乱流に存在するか?という疑問を持つのは自然であろう。先に述べたように、弾性乱流は基本場が曲率を有する流れにおいて多く観測される。これは必然的に流れ場は非一様でかつ非等方である事を意味しており、その程度は考える系の詳細に強く依存する。このような条件下で普遍的な性質を実験結果から抽出するのは難しいように思われる。また速度変動の統計性質を議論するとき、実験研究ではある観測点での流速や圧力変動のパワースペクトルの振る舞いに着目するが、流れ場が本質的に非等方・非一様であるため、変動の空間的な広がりとその相関性に関する議論は全くなされていない。

一方で弾性乱流と類似した研究として、粘弾性乱流の小スケールでの振舞いに着目した研究が挙げられる。Perlekerら [15, 16] は、テイラー長のレイノルズ数 R_λ が比較的小きな等方乱流(減衰, 強制)における高分子の影響について FENE-P モデルの直接数値計算 (DNS) を行ってそれぞれ調べ、エネルギースペクトルの遠散逸領域の振る舞いについて解析を行った。その結果、遠散逸領域におけるスペクトルは高分子を添加しない場合に比べて値は大きく増加し、またこの領域はべき則減衰に近い振舞であることを示している。Watanabe & Gotoh [17, 18, 19] は等方減衰乱流における高分子の影響についてオイラー・ラグランジュ計算を用いて調べ、エネルギースペクトルは明確なべき則減衰を示すこと、またそのべき指数は W_i の増加に伴って -5 から -4.2 程度まで増加することを示した。Nguyenら [20] は、比較的低い R_λ での FENE-P モデルの DNS を行い、様々な外力の条件でエネルギースペクトルの遠散逸領域での振舞いを詳細に調べた。その結果、この領域でのエネルギースペクトルは k^{-6} に近い減衰を示すこと、これが外力の詳細にはあまり影響を受けないことを示した。一方で高 R_λ 数で且つ高 W_i 数の領域に関して、Valenteら [21] は低波数領域への高分子の影響を DNS により詳細に調べ、エネルギースペクトルのべき指数が W_i 数の増加に伴って $-5/3$ から -3 に変化し、さらに増加すると $-5/3$ へ戻ることを示した。これらの結果は、いずれの場合にも高分子の影響により小スケールの揺らぎが励起されること、またスペクトルは特徴的なべき則減衰を示しているが、弾性乱流との関連性や類似性、あるいは統計則のパラメータ依存性や普遍性という点では不明な点が多い。

本研究の目的は、粘弾性乱流の小スケールでの振舞いと弾性乱流との関連性を明確にし、過去の研究で明らかになっている弾性乱流の特徴について、そのパラメータ依存性や普遍性を明らかにすることにある。具体的には、基本場がなく、流れ場の一様等方性を保証するランダムな速度場によって移流・変形する高分子鎖が引き起こす弾性乱流を数値計算で実現し、その性質を議論する。得られた乱流状態の統計性と W_i 数依存性を解析し、エネルギースペクトルの振る舞いや速度勾配の揺らぎの性質などを吟味し、過去の研究で良く知られた弾性乱流および粘弾性乱流の小スケールでの振る舞いと類似点や相違点を明らかにする。

本論文の構成は以下のものである。2節では本研究の数値計算手法であるオイラー・ラグランジュ計算について簡単に紹介し、3節では解析に用いる物理量と計算パラメータについて触れる。4節では得られた結果について議論し、5節では結果のまとめと今後の展望について触れる。

2 高分子溶液流れのオイラー・ラグランジュ計算

2.1 基礎方程式

希薄な高分子溶液の流れを考える。単一の高分子鎖の挙動はダンベルモデルにより記述し、溶媒の運動は Navier-Stokes (NS) 方程式に従う。希薄系を扱うので、異なるダンベルモデル間の相互作用は無視する。高分子鎖の慣性は十分小さいとして慣性を無視した単一のダンベル

の発展方程式は以下で与えられる.

$$\frac{d\mathbf{R}^{(n)}}{dt} = \mathbf{R}^{(n)} \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{2\tau} f \left(\frac{|\mathbf{R}^{(n)}|}{L_{max}} \right) \mathbf{R}^{(n)} + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \mathbf{W}^{(n)}, \quad (2)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_g^{(n)}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}_g^{(n)}(t), t) \quad (n = 1, \dots, N_t) \quad (3)$$

ここで $\mathbf{R}^{(n)}(t)$ は平衡長 r_{eq} で規格化されたダンベルの末端間ベクトル, $\mathbf{X}_g^{(n)}(t)$ はダンベルの重心ベクトルをそれぞれ表す. 溶媒の速度場は $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ である. 非線形バネとして, 本研究では finitely extensible nonlinear elastic (FENE) モデル $f(z) = 1/(1-z^2)$ を用いる [22, 23]. 式 (2) において, L_{max} はダンベルの最大伸び切り長を表す. また $\mathbf{W}^{(n)}(t)$ は溶媒中の粒子のブラウン運動を表す熱揺動力であり,

$$\langle W_i^{(n)}(t) \rangle = 0, \quad \langle W_i^{(n)}(t) W_j^{(m)}(s) \rangle = \delta_{ij} \delta_{nm} \delta(t-s), \quad (4)$$

のガウス統計に従う. ここで $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表す. 下付き文字 i, j, n, m はそれぞれ $(i, j) = 1, 2, 3, (n, m) = 1, 2, \dots, N_t$ の値をとる. δ_{ij} は Kronecker のデルタである. 定数 τ, r_{eq} はそれぞれ

$$\tau \equiv \frac{\zeta}{4k}, \quad r_{eq} \equiv \sqrt{\frac{k_B T}{k}}, \quad (5)$$

で定義され, 溶媒中のダンベルの緩和時間と平衡長を表す. ここで k はバネ定数, $\zeta \equiv 6\pi\nu_s \rho_s a$ はストークスの抵抗係数 (ρ_s は溶媒の密度, a は粒子半径) である.

溶媒は非圧縮性流体とする. 本研究では移流項に起因する非線形性の影響を除外し, 単に高分子の影響によるランダム運動の発生について考察するため, 溶媒の運動は連続の式と非定常ストークス近似方程式に従うとする.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \nu_s \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T}^p + \mathbf{F}. \quad (6)$$

ここで $p(\mathbf{x}, t)$ は圧力場であり, 溶媒の密度 ρ_s は小球の密度 ρ_d に等しく $\rho_s = \rho_d = 1$ に設定している. 高分子によるストレス場 $\mathbf{T}^p(\mathbf{x}, t)$ は次式で表される [17].

$$\mathbf{T}_{ij}^p(\mathbf{x}, t) = \frac{\nu_p}{\tau} \left(\frac{L_{box}^3}{N_t} \right) \sum_{n=1}^{N_t} t_{ij}^{(n)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_g^{(n)}), \quad (7)$$

$$t_{ij}^{(n)} \equiv R_i^{(n)} R_j^{(n)} f \left(\frac{|\mathbf{R}^{(n)}|}{L_{max}} \right) - \delta_{ij}. \quad (8)$$

ここで $\nu_p \equiv \nu_s \eta$ は高分子による粘度であり, 定数 $\eta \equiv (3r_{eq}/4a)^2 \Phi_V$ はゼロ剪断粘度比を表す. $\Phi_V \equiv (8\pi N_t/3)(a/L_{box})^3$ はダンベル集団の体積分率である. (6) 式中の \mathbf{F} は外力項であり, 本研究ではある低波数バンド $1 \leq |\mathbf{k}| \leq 2$ にのみ印加される. ガウス統計に従うソレノイダルなランダム場とする. この外力項の存在は系の統計的な定常状態と流れ場の一様等性の実現を保証するものであり, 弾性乱流の先行数値研究とは大きく異なる点でもある. ランダム外力によって駆動される流れもまたランダムになるが, この影響は外力が印加されるモードに限定される. より高波数側のフーリエモードの揺らぎは, ダンベルの伸長に伴う弾性ストレスの揺らぎによって生成され, 本研究ではこの弾性ストレス場の揺らぎによる乱れの性質に着目する.

3 計算条件とパラメータ

本節では計算手法と条件, 用いたパラメータ, 及び扱う統計量について簡単に説明する.

計算領域は一辺の長さが 2π の立方体とし, 領域の境界は周期境界条件に従うものとする. 本研究では流体計算に用いる格子点数は $N = 256^3$ とし, 微分演算はスペクトル法により波数空間で代数的に取り扱うものとする. 時間積分は弾性ストレス項のみ 2 次精度の RK 法で扱い, その他はオイラー法で扱った. 動粘度は各計算で共通に $\nu = 0.05$ とし, ランダム外力の強度も各計算で一定とした.

ダンベル集団に関しては, FENE バネの最大伸び切り長を $L_{max} = 100$, ゼロせん断粘度比を $\eta = 0.1$ と固定した. ダンベルの総数は $N_t = 5 \times 10^8$ であり, ダンベルの緩和時間 τ を変化させることで, 系の変化を調べた.

流体の単位体積あたりの運動エネルギーを E , ダンベルの平均弾性エネルギーを U とすると, これらは

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)^2 \rangle_V \quad (9)$$

$$U(t) = -\frac{\nu_s \eta}{2\tau} (L_{max})^2 \frac{1}{N_t} \sum_{n=1}^{N_t} \ln \left[1 - \left(\frac{|\mathbf{R}^{(n)}(t)|}{L_{max}} \right)^2 \right], \quad (10)$$

で定義される. E と U の時間発展方程式は

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\varepsilon(t) - \varepsilon_p(t) + \varepsilon_{in}(t), \quad (11)$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = \varepsilon'_p(t) - \varepsilon_S(t). \quad (12)$$

で与えられる. ここで ε は運動エネルギーの散逸率, ε_p はダンベル集団へのエネルギーの輸送率, ε_S は弾性エネルギーの消散率をそれぞれ表し, 次式で定義される.

$$\varepsilon(t) = 2\nu \langle S_{ij} S_{ij} \rangle_V, \quad (13)$$

$$\varepsilon_p(t) = \langle S_{ij} T_{ij}^p \rangle_V = \frac{\nu \eta}{\tau r_{eq}} \langle \delta \mathbf{u}^{(n)} \cdot \mathbf{R}^{(n)} f(R^{(n)}/L_{max}) \rangle_p, \quad (14)$$

$$\varepsilon_S(t) = \frac{\nu \eta}{2\tau^2} \langle (\mathbf{R}^{(n)} f(R^{(n)}/L_{max}))^2 \rangle_p, \quad (15)$$

ε_{in} はランダム外力による運動エネルギーの注入率を表す. ここで $\langle \dots \rangle_V, \langle \dots \rangle_p$ はそれぞれ計算領域に渡る体積平均とダンベル集団に対する平均を表す. また以下変数の上付きバーは時間平均を表す.

本研究ではダンベルの緩和時間 τ の変化による系の揺らぎの変化に着目する. Weissenberg 数 W_i は散逸時間 $\tau_K = (\nu_s/\bar{\varepsilon})^{1/2}$ を用いて $W_i = \tau/\tau_K$ と定義した. Table 1 に得られた統計量の時間平均値をまとめた.

4 結果

Figure 1 に流れの運動エネルギー E の時間変化を, Figure 2 に弾性エネルギー U の時間変化をそれぞれ示す. 運動エネルギーは W_i 数の増加に伴ってその平均値と揺らぎの大きさがともに減少している事がわかる. 一方で弾性エネルギーは W_i 数の増加に伴い増加する傾向が

Run	τ	\bar{E}	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon}_p$	$\bar{\varepsilon}_{in}$	τ_K	W_i	m_R	σ_R
1way	0.25	x	x	0	0.5811	x	z		
1	0.25	3.4290	0.5099	0.0678	0.5811	0.3131	0.7985	1.9165	1.0061
2	0.5	2.8196	0.4324	0.1327	0.5811	0.3401	1.4702	2.8720	2.6080
3	1	1.6073	0.2810	0.2987	0.5811	0.4218	2.3708	6.0468	7.1655
4	2	0.9039	0.2062	0.3809	0.5811	0.4924	4.0617	12.932	13.072
5	4	0.7459	0.2329	0.3544	0.5811	0.4633	8.6337	22.267	18.069
6	12	0.7171	0.2898	0.2985	0.5811	0.4154	28.888	36.814	23.404

Table 1: 直接数値計算とダンベル集団のブラウン動力学計算における計算パラメータ及び基本統計量を示す. 各変数の上線は時間平均した値を示している.

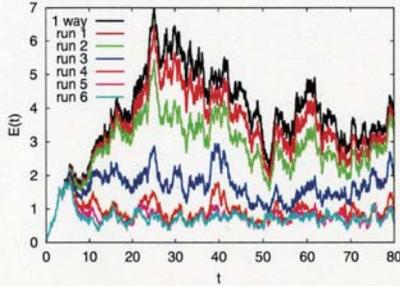


Figure 1: 運動エネルギー E の時間変化の様子を各 W_i 数の場合についてそれぞれ示す.

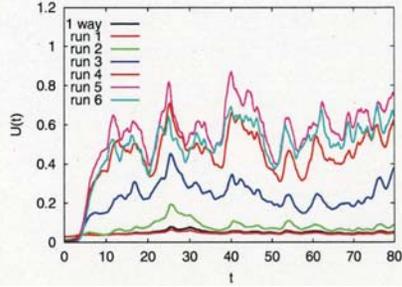


Figure 2: ダンベル集団の弾性エネルギー U の時間変化の様子を各 W_i 数の場合についてそれぞれ示す.

あるが, この増加傾向は W_i 数の増加に対して緩やかになる. 最も大きな W_i 数の場合では, 弾性エネルギー U と運動エネルギー E は同程度の大きさになることがわかる.

Figure 3 に $\varepsilon(t)$ の時間変化を, Figure 4 に $\varepsilon_p(t)$ の時間変化の様子をそれぞれ示す. 運動エネルギー E と同様に, W_i 数の増加に伴って ε の平均値や揺らぎの大きさが減少している様子がわかる. 一方で ε_p はその平均値や揺らぎは W_i 数の増加に伴って増加することがわかる. 即ち, ダンベルの伸長に伴って流れとダンベル集団との間にエネルギーの輸送が生じていることがわかる.

上述した量の W_i 数依存性を詳しくみるために, 時間平均をとった $\varepsilon, \varepsilon_p$ を W_i 数に対してプロットしたものを Figure 5 に示す. ここで各量は平均エネルギー注入率 $\bar{\varepsilon}_{in}$ で規格化した. この結果より, W_i 数の増加に伴って $\bar{\varepsilon}$ は減少していき, $W_i = 4$ 辺りで増加に転じる様子がわかる. これに対応して, $\bar{\varepsilon}_p$ は $W_i = 4$ 辺りまでは増加していき, それを超えると減少に転じる. つまり $W_i = 4$ 辺りで系の揺らぎの性質が変化していることが予想される. 等方乱流における高分子の影響を調べた過去の研究においては, 高分子添加によるエネルギー散逸率の減少が報告されている [15, 17]. これは $W_i < 4$ で得られた本研究の結果と同様の振る舞いである. 一方で弾性乱流への遷移を調べた数値研究においては, 物体に働く抵抗係数が W_i 数の増加とともに増大することがわかっている [13]. これは本研究における $W_i > 4$ の領域での散

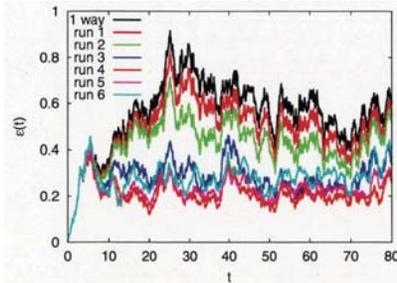


Figure 3: エネルギー散逸率 ε の時間変化を示す。

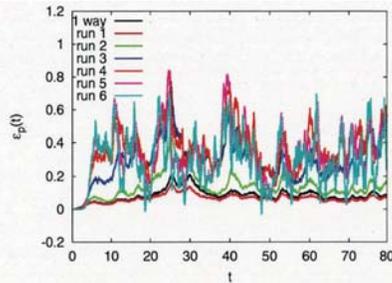


Figure 4: エネルギー交換率 ε_p の時間変化を示す。

逸率の増加と関連すると推察される。

高 W_i 数領域での流れ場の揺らぎが、ランダム外力ではなく、弾性ストレス場の強い揺らぎに起因するものであることを検証するために、 $E, \varepsilon, \varepsilon_p$ の揺らぎについて、以下の相関係数の値の W_i 数依存性を調べる。

$$C = \frac{\overline{X(t)X_{1\text{way}}(t)}}{\overline{X(t)^2}^{1/2} \overline{X_{1\text{way}}(t)^2}^{1/2}} \quad (16)$$

ここで X は $E, \varepsilon, \varepsilon_p$ を代表して書いた変数であり、その平均値を差し引いて定義する (即ち $X = E - \bar{E}$ 等)。また下付き $X_{1\text{way}}$ は、ダンベル集団による流れ場への影響を考慮せずに行った仮想実験から得られた量であることを示している。異なる τ 値の実験について、外力場の生成に用いた乱数列は同一であるので、もしダンベル集団の流れへの影響が小さい場合には上の式の相関係数は 1 に近い値をとる。Figure 6 に結果を示す。結果は $W_i = 2$ を超えたところで C は急激に小さくなり、 W_i 数の増加に伴ってその値は減少していることがわかる。即ち、高 W_i 数状態の流れ場の揺らぎは、ランダム外力によって直接励起されたものとは明確に区別されることを意味している。また弾性エネルギーがこの時支配的であることを併せて考慮すると、このパラメータ領域では弾性ストレスの強い揺らぎによる不規則流動が発生していると結論づけられる。

Figure 7,8 にダンベルの末端間距離 R の確率密度関数 (PDF)、および R の平均値と標準偏差の W_i 数依存性をそれぞれ示す。 W_i 数の増加に伴って、PDF の右端が徐々に増大していくことがわかる。これは流れによってダンベルが強く引き伸ばされていることを意味している。実際に平均値は W_i 数が 3 を超えたあたりから急激に増大する様子が確認できる。また R の標準偏差 σ_R と $\langle R \rangle$ の比の W_i 数依存性をみると、 $W_i = 3$ 辺りでそのピークを持つことがわかる。即ち、 $W_i = 3$ 近傍で揺らぎが大きくなる様子がわかり、いわゆるコイルストレッチ転移 [24, 25] がこの W_i 数の領域で存在していること、これが流れ場の状態の遷移と密接に関連していること、が推察される。

ここまでの解析によって、 W_i 数の増加に伴ってダンベルの伸長が強くなり、ランダム外力に起因するものとは異なる、弾性ストレスの揺らぎが支配する乱れが $W_i = 3-4$ 程度を境にして発生することを明らかにした。この乱れの様子の変化を具体的に観察するために、まず流れ場の構造の可視化を行った。Figure 9 は局所エネルギー散逸率 $\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 2\nu S_{ij} S_{ij}$ の等値面の可視化結果を示す。等値面のレベルは平均エネルギー注入率と一致させた。この結果よ

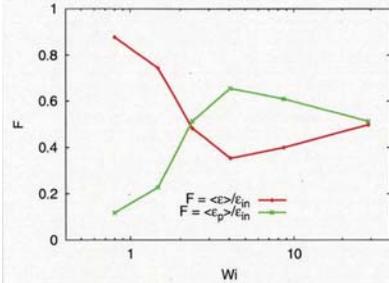


Figure 5: $\bar{\epsilon}_{in}$ で規格化された $\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}_p$ の W_i 数依存性を示す.

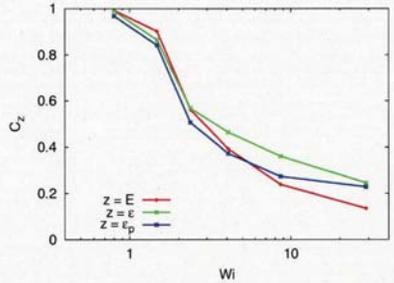


Figure 6: エネルギー, エネルギー散逸率の時間揺らぎの平均値, およびそれらの 1way 計算によるものとの相関係数の W_i 数依存性を示す.

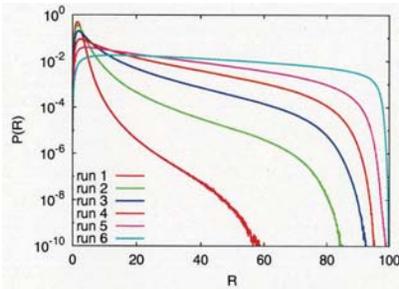


Figure 7: ダンベル末端間距離 R の PDF の W_i 数依存性.

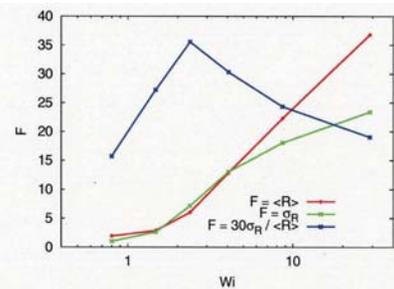


Figure 8: R の揺らぎの平均値と標準偏差 σ_R の W_i 数依存性

り, W_i 数が小さいときは等値面は領域全体に渡る単純な構造を示しており, 小さなスケールの揺らぎが励起されていないことがわかる. W_i 数が大きくなると, 大きな構造は崩れて, より小さなシート状の複雑な構造が支配的になることがわかる. これは流れ場がランダム外力により誘起される場とは異なった, 弾性乱流特有の乱れと構造が励起されていることを明確に示している.

乱流の特徴の一つに, 揺らぎの非ガウス性が挙げられる. 特に速度勾配の PDF は広い裾を持つ, 非ガウス分布になり, レイノルズ数が高いほどその裾は広がる. 弾性乱流においても, 速度勾配はニュートン流体の乱流と類似した PDF を有することが報告されている [5]. Figure 10 に縦速度微分 $\partial_1 u_1$ および横速度微分 $\partial_1 u_2$ の揺らぎの PDF の振る舞いを, 各 W_i 数について比較した結果を示す. W_i 数が 4 より小さいとき, PDF の最確値領域はガウス分布に近く, またその裾はガウス分布よりも下側にある. 即ち, 弾性乱流への遷移前では速度勾配の揺らぎの振幅は非常に小さいことがわかる. 一方で W_i 数が増加するにつれて, 速度勾配の揺らぎが極端に大きくなるイベントが発生している様子がわかる. PDF の最確値近傍は依然ガウシアンに近いが, W_i 数が大きいほど PDF の裾はガウス分布よりも上方に外れており, 等方乱流

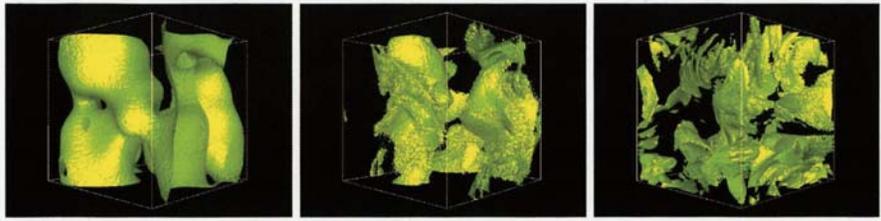


Figure 9: 局所エネルギー散逸率の等値面図. 左から run1, run3, run5 の結果を表し, 描いた等値面の値は平均エネルギー注入率 $\overline{\varepsilon_{in}}$ に一致している.

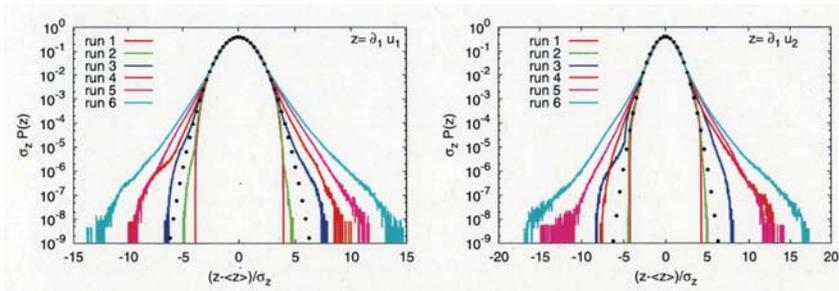


Figure 10: 縦速度微分および横速度微分の PDF の W_i 数依存性をそれぞれ示す.

で良く知られた速度勾配の PDF のレイノルズ数依存性に振る舞いは似ている [26]. よって本研究で得られた高分子鎖による弾性乱流は, 弾性ストレスの強い揺らぎに励起された, 間欠的な速度揺らぎを示す強い乱流状態にあると言える.

最後に, 運動エネルギースペクトル $E(k)$ の振る舞いを議論する. 弾性乱流の実験研究においては, 速度場の変動に関する波数スペクトルを議論する代わりに, 一点における時間揺らぎのパワースペクトルの振る舞いを議論している. 凍結乱流仮説が成り立つ問題では, 前者と後者のスペクトルは同一のもので解釈できるが, 弾性乱流において両者の関連性は定かではない. よって時間変動のパワースペクトルと空間変化の波数スペクトルに関する議論はわけた方がよいと考えられる. Figure 11 に 3次元エネルギースペクトル $E(k)$ の W_i 数依存性を示す. W_i 数が小さいときは, ランダム外力が印加される波数領域 ($1 \leq k \leq 2$) において, 運動エネルギーの大部分を保持していることがわかる. W_i 数の増加に伴い, 外力が印加される波数領域より高波数側のフーリエ成分が励起され, スペクトルは特徴的なべき則減衰をしていることがわかる. さらに興味深いことに, べき指数の値は W_i 数の増加に伴って減少していく傾向にあり, 最も大きな W_i 数の場合はおよそ 3.7 である. これは 2次元 Kolmogorov 流の弾性乱流の数値計算で得られたスペクトルに近い [11, 12]. この弾性乱流に特徴的なパラメータ領域では指数の値はおよそ 4 前後であり, これは減衰乱流における高分子の影響を調査した以前の我々の研究で得られたスペクトルの振る舞いと極めて類似している [19]. また弾性乱流へ遷移していない状態において (W_i 数が小さい場合でも), スペクトルはべき則減

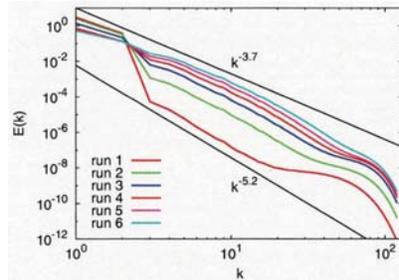


Figure 11: 運動エネルギースペクトルの W_i 数依存性

衰を示していることは注目に値する。本研究では最も小さい W_i 数の場合には 5.2 程度であり、これは W_i 数が比較的小さな粘弾性乱流におけるスペクトルの遠散逸領域の振る舞い k^{-6} と矛盾しないように思われる。

5 まとめ

本研究では、弾性乱流の基本性質の理解や粘弾性乱流の小スケールでの振舞と弾性乱流の関連性を明らかにするために、ランダム外力を伴う非定常ストークス近似方程式により作られるランダム速度場下での弾性乱流の発生とその性質を数値計算により調べた。多数の FENE ダンベルモデルによって構成される弾性ストレス項は、 W_i 数の増加に伴ってその寄与は大きくなり、エネルギーやエネルギー散逸率の減少を引き起こすが、ある特徴的な W_i 数を境にして、エネルギー散逸率は増大に転じることがわかった。このときの特徴的な W_i 数よりも大きな領域において、速度場はランダム外力に直接起因しない、特徴的な乱流状態にあることを示した。この乱流状態では速度勾配の揺らぎの PDF は、ニュートン流体の乱流で知られた非ガウス分布に類似した分布を示すこと、エネルギースペクトルはべき則減衰を示しその指数は -4 に近い振舞を示すことがわかった。ただし、エネルギースペクトルのべき則減衰に関しては、流れ場が弾性乱流にはない状態であっても観測されること、その時のスペクトルは -4 よりはかなり急峻であり、低 R_λ 数の粘弾性乱流の遠散逸領域におけるスペクトルの振る舞い [16, 20] に近いことがわかった。

本研究は科学研究費補助金（課題番号 26420106, 15H02218）の援助を受けて行われた。また、理化学研究所（HPCI: hp170189）、名古屋大学情報基盤センター（JHPCN: jh160012-NAJ, H29 年度 HPC 計算科学連携プロジェクト）に計算機資源を提供して頂いた。ここに記して感謝の意を表す。

References

- [1] J. L. Lumley, *J. Polymer Sci.: Macromolecular Reviews* **7**, 263–290 (1973).
- [2] K. R. Sreenivasan and C. M. White, *J. Fluid Mech.* **409**, 149–164 (2000).

- [3] I. Proccaccia, V. S. L'vov, and R. Benzi, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 225 (2008).
- [4] A. Groisman and V. Steinberg, *Nature* **405**, 53–55, (2000).
- [5] A. Groisman and V. Steinberg, *New J. Phys.*, **6**, 29 (2004).
- [6] A. Groisman and V. Steinberg, *Nature* **410**, 905–908, (2001)
- [7] R. G. Larson, Eric S. G. Shaqfeh, and S. J. Muller, *J. Fluid Mech.* **218**, 573–600 (1990).
- [8] G. Boffetta, A. Celani, A. Mazzino, A. Puliafito, and M. Vergassola, *J. Fluid Mech.* **523**, 161 (2005).
- [9] P. E. Arratia, C. C. Thomas, J. Diorio, and J. P. Gollub, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 144502 (2006).
- [10] T. Burghelea, E. Segre, and V. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 214502 (2006).
- [11] S. Berti, A. Bistagnino, G. Boffetta, A. Celani and S. Musacchio, *Phys. Rev. E* **77**, 055306 (2008).
- [12] S. Berti and G. Boffetta, *Phys. Rev. E* **82**, 036314 (2010).
- [13] M. Grilli, A. Vazquez-Quesada, and M. Ellero, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 174501 (2013).
- [14] L. Pan, A. Morozov, C. Wagner, and P. E. Arratia, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 174502 (2013).
- [15] P. Perlekar and D. Mitra and R. Pandit, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 264501 (2006).
- [16] P. Perlekar and D. Mitra and R. Pandit, *Phys. Rev. E* **82**, 066313 (2010).
- [17] T. Watanabe and T. Gotoh, *J. Fluid Mech.* **717**, 535 (2013).
- [18] T. Watanabe and T. Gotoh, *J. Phys.: Conf. Ser.* **454**, 012007 (2013).
- [19] T. Watanabe and T. Gotoh, *Phys. Fluids* **26**, 035110 (2014).
- [20] M. Q. Nguyen, A. Delache, S. Simoens, W. J. T. Bos, and M. E. Hajem, *Phys. Rev. Fluids* **1**, 083301 (2016).
- [21] P. C. Valente, C. B. da Silva, and F. T. Pinho, *Phys. Fluids* **28**, 075108 (2016).
- [22] R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymetric Liquids, Vol.2 Kinetic Theory*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1987).
- [23] M. Doi and S. F. Edwards, *The Theory of Polymer Dynamics*, (Oxford University Press, New York, 1986).
- [24] P. G. De Gennes, *J. Chem. Phys.* **60**, 5030–5042 (1974).
- [25] T. Watanabe and T. Gotoh, *Phys. Rev. E* **81**, 066301 (2010).
- [26] T. Watanabe and T. Gotoh, *J. Fluid Mech.* **590**, 117 (2007).