数理解析研究所講究録 第2112巻 2019年 99-105

SHRINKING PROJECTION METHOD WITH ALLOWABLE RANGES

許容範囲を持つ shrinking projection method

高橋非線形解析研究所　竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)
Takahashi Institute for Nonlinear Analysisl

1. 主題

2008 年に, Takahashi–Kubota と著者 [10] は写像族の共通不動点への iterative method を提案しました. 翌年, Kimura–Takahashi [6] は method を改良し適用できる写像の枠と空間を拡大しました; 先行研究と異なり原理の異なる証明による構造の見直しです. Type P と呼ばれる写像族の Banach 空間での不動点近似が典型的な例です. この method は現在 shrinking projection method と呼ばれています. 2014 年, Kimura [5] はこの method をベースに誤差も考慮した iterative method を提案しました. この方向で, Type P については, Ibaraki–Kimura [4] による iterative method が存在します. これらの研究に刺激されて, 著者は許容範囲を持つ shrinking projection method を提案しました. この過程で, 茨木先生と高阪先生から多くを教わりました. この method は, ある意味で Kimura [5] のアイデアのもう 1 つの解釈と考えることもできます. 本稿は, この method の基本構造の解説を主眼とし, Type P に関連する典型的な例のみを考察します.

C, Q を $Q \subset C$ を満たす Banach 空間の閉凸部分集合とし, $w \in C$ から $z = n_{xt}(w) \in C$ を生成する method と対応する数値計算を考えます. $x_1 \in C$ から $x_{n+1} = n_{xt}(x_n)$ として, 理論的には $\{x_n\}$ が生成されます. $\{x_n\}$ は Q の点へ強収束することが保証されているとします. $x_1 = z_1 = y_1$ とし, $z_2 = n_{xt}(y_1) \in C$ とします. 数値計算に移ると, 通常は現実の制限によって, z_2 とは少しだけ異なる $y_2 \in C$ が得られます. $z_3 = n_{xt}(y_2) \in C$ とします. この様にして, 現実には $\{y_n\}$ だけが得られます; $\{z_n\}$ も理論上の存在です.

$\|z_n - y_n\|$ を step n の error と呼びます. $\|z_n - y_n\| \le b_n$ と $b_n \le M$ を満たす $b_n, M \in [0, \infty)$ が存在すると考えてかまいません. b_n はこの error の上界です. このとき, $\|x_n - y_n\|$ が充分小さい保証はなく, $\{y_n\}$ は収束するかどうかさへ分かりません. 以前は, $\sum_{n\in N} b_n < \infty$ を仮定し, $\{y_n\}$ の Q の点への強収束を保証できる case が考察されました. しかし, $\sum_{n\in N} b_n < \infty$ や $\lim_n b_n = 0$ という条件は error の性質に馴染みません. このため, この条件を避けて, "$\{y_n\}$ の Q の点への強収束" の代替を考察する研究が現れています. この様に, 現状では, error の考察は満足すべきものではないと著者は考えます.

一方, 許容範囲 (allowable range) A_n とは method に付随する C の部分集合であり, $y_n \in A_n$ for $n \in N$ ならば, $\{y_n\}$ がある $u \in Q$ に理論的には強収束することを要請します. 現実の制限によって, $y_{n_0+1} \in A_{n_0+1}$ が得られないときには, 数値計算は続行できません. それでも, この method について, たとへ $\|y_{n_0} - u\|$ の評価が分からないとしても, y_{n_0} を u の最良の近似点の 1 つと考えることができます.

2. 準備

本稿に必要な事項と記号を簡単に説明します. N と R は正整数と実数の集合です. $k \in N$ について, $N_k = \{j \in N : 1 \le j \le k\}$ とします. E は実 Banach 空間, E^* は E の双対空間です. $x \in E$ と $y^* \in E^*$ について $y^*(x)$ を $\langle x, y^* \rangle$ と表記します. $|\langle x, y^* \rangle| \le \|x\| \|y^*\|$ が成立します. B_E は閉単位球 S_E はその表面とします. C は常に非空集合を表し, "non–empty" という表記は省略されます. 次の主張が成立します:

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H05, 47H09, 47J25.
Key words and phrases. Shrinking projection method with allowable ranges.

- ◦ Suppose C is a closed convex subset of E. Then C is weakly closed.

E から E^* への正規双対写像 J(normalized duality mapping) は次の様に定義されます:

$$Jx = \{x^* \in E : \langle x, x^* \rangle = \|x\|\|x^*\|,\ \|x^*\| = \|x\|\} \quad \text{for} \ \ x \in E.$$

Hahn–Banach の定理より $Jx \neq \emptyset$ です. また, $J(ax) = aJx$ $(a \in R)$ の確認は容易です.

E の部分集合 C から R への写像 f が coercive とは, $\lim_n \|x_n\| = \infty$ を満たす点列 $\{x_n\} \subset C$ が常に $\lim_n f(x_n) = \infty$ を満たすことです. C から E への写像 T の不動点集合を $F(T)$ と表記します.

Banach 空間 E は, 標準的な埋め込みによって, E^{**} の部分集合と考えられます. 特に, $E = E^{**}$ とみなせるとき E は回帰的 (reflexive) と呼ばれます. このとき, E^* の weak topology と weak* topology は一致するため, "weak topology" のみを使用します. $x, y \in S_E$ について, $\lim_{t\to 0}(\|x + ty\| - \|x\|)/t$ が存在するとき, E は滑らか (smooth) と呼ばれます. E が狭義凸 (strictly convex) とは, $\|\cdot\|^2$ が狭義凸になるときです; $x, y \in E (x \neq y)$ と $a \in (0, 1)$ について, $\|(1-a)x + ay\|^2 < (1-a)\|x\|^2 + a\|y\|^2$. E の点列 $\{x_n\}$ が $x \in E$ に弱収束し $\{\|x_n\|\}$ が $\|x\|$ に収束するならば $\{x_n\}$ が x に強収束とき, E は Kadec–Klee property を持つといいます. E を回帰 Banach 空間とすれば, 次の主張が成立します:

- ◦ Any bounded sequence $\{x_n\}$ in E has a weakly convergent subsequence.

多くの重要な結果が次の凸解析の基本的な主張から導かれます.

Lemma 2.1. *Let C be a closed convex subset of a reflexive Banach space E. Let f be a lower semi–continuous strictly convex function from C into R. Suppose f is coercive. Then there is a unique $u \in C$ satisfying $f(u) = \inf_{x\in C} f(x) \in R$.*

C を狭義凸回帰 Banach 空間 E の閉凸集合とします. このとき, $\|\cdot\|$ が weakly lower semi–continuous かつ狭義凸と Lemma 2.1 より, $x \in E$ ごとに, $\|x - z_x\| = \inf_{z\in C} \|x - z\|$ を満たす $z_x \in C$ が唯 1 つ存在します. E から C の上への距離射影 (metric projection) P_C を $P_C x = z_x$ for $x \in E$ で定義します.

本稿では, 種々の理由から, 滑らかな狭義凸回帰 Banach 空間 (smooth strictly convex reflexive Banach space) を主として扱います. E を滑らかな狭義凸回帰 Banach 空間とします. この空間での基本事項を, より弱い条件で成立する事項もありますが, 簡潔に述べます. この空間では, 次の (1)–(4) が成立します:

(1) E^* is smooth, strictly convex and reflexive.

(2) J is a bijection from E onto E^*; we can regard J as a mapping from E onto E^*.

(3) J is norm to weak continuous.

(4) The normalized duality mapping J^* from E^* onto E and J^{-1} are coincide.

写像 ϕ を次の様に定義します: $\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2$ for $x, y \in E$. この ϕ は $E \times E$ から R への Alber の bi–function [1] と呼ばれます. ϕ^* を $E^* \times E^*$ から R への Alber の bi–function とすれば, $\|y\| = \|Jy\|$ と $x = J^*Jx$ より, $\phi(x, y) = \|Jy\|^2 - 2\langle J^*Jx, Jy\rangle + \|Jx\|^2 = \phi^*(Jy, Jx)$ を得ます.

E の部分集合 C から E^* への写像 A が単調 (monotone) とは, 次の条件を満たすことです:

$$\langle x - y, Ax - Ay\rangle \geq 0 \quad \text{for} \ \ x, y \in C.$$

特に, $\langle x - y, Ax - Ay\rangle = 0$ ならば $x = y$ となるとき狭義単調 (strictly monotone) と呼びます.

ϕ, ϕ^* と J の定義及び上記 J の性質から, 以下のことが容易に確認できます:

(5) $\phi(x, y) = \phi^*(Jy, Jx) \geq (\|x\| - \|y\|)^2 \geq 0$ for $x, y \in E$.

(6) $\phi(\,\cdot, y)$ is weakly lower semi–continuous and strictly convex.

(7) $\phi(x, y) = 0$ if and only if $x = y$.

$x, y \in E$ とすれば, (5) より $\frac{1}{2}\phi(y, x) \geq \frac{1}{2}(\|y\| - \|x\|)^2 \geq 0$. 更に, 次の不等式が得られます:

$$\langle x - y, Jx\rangle - \tfrac{1}{2}(\|x\|^2 - \|y\|^2) = \tfrac{1}{2}\|x\|^2 + \tfrac{1}{2}\|y\|^2 - \langle y, Jx\rangle = \tfrac{1}{2}\phi(y, x). \tag{2.1}$$

このことから, 次の不等式が成立することも明らかでしょう: For $x, y \in E$,

$$\text{(2.2)} \qquad \langle x-y, Jy\rangle \leq \tfrac{1}{2}\|x\|^2 - \tfrac{1}{2}\|y\|^2 \leq \langle x-y, Jx\rangle,$$
$$\langle x-y, Jx-Jy\rangle = \tfrac{1}{2}\phi(y,x) + \tfrac{1}{2}\phi(x,y) \geq (\|x\|-\|y\|)^2 \geq 0.$$

後者と (5) によって, 次の (8) が成立します:

(8) Suppose a sequence $\{x_n\}$ in E satisfies $\lim_n\langle x_n - y, Jx_n - Jy\rangle = 0$. Then,
$\lim_n \|x_n\| = \|y\| = \lim_n \|Jx_n\| = \|Jy\|$,
$\lim_n \phi(y, x_n) = \lim_n \phi(x_n, y) = \lim_n \phi^*(Jy, Jx_n) = \lim_n \phi^*(Jx_n, Jy) = 0$.

もちろん, $\langle x-y, Jx-Jy\rangle = 0$ ならば $\phi(y,x) = 0$ と $x = y$ が成立します. よって,

(9) J is strictly monotone.

C に閉凸を仮定します. このとき, $z = P_C x$ と $z \in C$ and $\inf_{y\in C}\langle y-z, J(z-x)\rangle \geq 0$ は同値です:

(10) $\inf_{y\in C}\langle y - P_C x, J(P_C x - x)\rangle \geq 0$.

3. 写像族

滑らかな狭義凸回帰 Banach 空間 E で議論します. C を E の部分集合とします. $\mathcal{F}^C_{E^*}$ を C から E^* への総ての写像の族とし, $\mathcal{F}^C$ を C から E への総ての写像の族とします. 次の様な部分族を考えます:

$$\mathcal{M}^C_{E^*} = \{A \in \mathcal{F}^C_{E^*} : A \text{ is norm to weak continuous and monotone}\},$$
$$\mathcal{M}^C_R = \{U \in \mathcal{F}^C : JU \text{ is norm to weak continuous and monotone}\},$$
$$\mathcal{M}^C_P = \{S \in \mathcal{F}^C : J(I-S) \text{ is norm to weak continuous and monotone}\},$$
$$\mathcal{T}^C_R = \{U \in \mathcal{F}^C : \langle (x-Ux)-(y-Uy), JUx - JUy\rangle \geq 0 \quad \text{for} \quad x, y \in C\},$$
$$\mathcal{T}^C_P = \{S \in \mathcal{F}^C : \langle Sx - Sy, J(x-Sx) - J(y-Sy)\rangle \geq 0 \quad \text{for} \quad x, y \in C\}.$$

$\mathcal{T}^C_P, \mathcal{T}^C_R$ を Type P, Type R と呼びます. C 上の自己写像からなる部分族を, $\mathcal{M}^{Cs}_R$ の様に, s を加えて表記します. Type P, (Type Q) と Type R の詳細については, Aoyama and co–authors [2] を参照してください. Hilbert 空間で, $\langle (x-y)-(Tx-Ty), Tx-Ty\rangle \geq 0$ for $x, y \in C$ を満たす $T \in \mathcal{F}^C$ を firmly nonexpansive と呼びます. この空間では, これら 4 つの族は一致します. しかし, 私たちの設定では, Type P と (Type Q) の性質はかなり異なります; 本稿では Type Q を扱いません. また, $\mathcal{M}^C_{E^*}, \mathcal{M}^C_R, \mathcal{M}^C_P$ を導入する意味については, 主題から離れるので言及しません. この条件下で, $\mathcal{M}^C_{E^*} = \{JU : U \in \mathcal{M}^C_R\}$ の確認は容易です. 多くの重要な結果が $J \in \mathcal{M}^C_{E^*} (I \in \mathcal{M}^C_R)$ から導かれます; (3), (9).

必要な事項を [2] に順じて準備します. Type P と Type R はある意味で双対的です:

(p_1) $S \in \mathcal{T}^C_P$ $(\mathcal{M}^C_P)$ if and only if $U = I - S \in \mathcal{T}^C_R$ $(\mathcal{M}^C_R)$.

S, U の一方について 1 つの性質を確認すれば, 他方も対応する性質を持ちます. 次のことだけ確認します. $S \in \mathcal{F}^C$ とし $U = I - S$ とすれば, $S = I - U$ なので, $x, y \in C$ について,

$$\langle Sx - Sy, J(I-S)x - J(I-S)y\rangle = \langle (I-U)x - (I-U)y, JUx - JUy\rangle.$$

重要な次の関係が成立します.

(p_2) $\mathcal{T}^C_R \subset \mathcal{M}^C_R$, $\quad \mathcal{T}^C_P \subset \mathcal{M}^C_P$, $\quad$ ($I \in \mathcal{T}^C_R \cap \mathcal{T}^C_P$ は自明).

$U \in \mathcal{T}^C_R$ とします. このとき, JU は単調です: J が単調より, $U \in \mathcal{F}^C$ と $x, y \in C$ について,

$$\text{(3.1)} \qquad \langle x-y, JUx - JUy\rangle - \langle (x-Ux)-(y-Uy), JUx - JUy\rangle = \langle Ux - Uy, JUx - JUy\rangle \geq 0.$$

JU が norm to weak continuous を確認することもさほど面倒ではありません. 事前に $\|Ux\| = \|JUx\|$ for $x \in C$ を再確認します. C の点列 $\{x_n\}$ が $u \in C$ に強収束するとし, $a_n = \|Ux_n\| + \|Uu\|$ とします.

任意に $n \in N$ を固定します. (3.1), (2.2) と $U \in \mathcal{T}_R^C$ より,

$$\begin{aligned}\|x_n - u\|(\|Ux_n\| + \|Uu\|) &= \|x_n - u\|(\|JUx_n\| + \|JUu\|) \geq \|x_n - u\|\|JUx_n - JUu\| \\ &\geq \langle x_n - u, JUx_n - JUu\rangle \geq \langle Ux_n - Uu, JUx_n - JUu\rangle \geq (\|Ux_n\| - \|Uu\|)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

$Uu = 0$ のとき, $\|Ux_n\| \leq \|x_n - u\|$ は自明です. $\{Ux_n\}$ は $Uu = 0$ に強収束し, $\{JUx_n\}$ は $JUu = 0^*$ に強収束します. $Uu \neq 0$ とします. $a_n \geq \|Uu\| > 0$ と上記不等式より,

$$\begin{aligned}\|x_n - u\| &\geq \tfrac{1}{a_n}\langle Ux_n - Uu, JUx_n - JUu\rangle \geq \tfrac{1}{a_n}(\|Ux_n\| - \|Uu\|)^2 \\ &= \tfrac{1}{a_n}(\|Ux_n\| + \|Uu\| - 2\|Uu\|)^2 = a_n\left(1 - \tfrac{2\|Uu\|}{a_n}\right)^2 \geq \|Uu\|\left(1 - \tfrac{2\|Uu\|}{a_n}\right)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

この不等式と $\lim_n \|x_n - u\| = 0$ より, $\{a_n\}$ は $2\|Uu\| > 0$ に収束しなければなりません. このことから, 再びこの不等式によって, $\lim_n\langle Ux_n - Uu, JUx_n - JUu\rangle = 0$ を得ます.

したがって, (8) より, $\lim_n \|Ux_n\| = \|Uu\| = \lim_n \|JUx_n\| = \|JUu\|$ と次の関係を得ます:

$$\lim_n \phi(Ux_n, Uu) = \lim_n \phi^*(JUx_n, JUu) = 0.$$

$\{Ux_n\}$ は有界ですから弱収束する部分列を持ちます. 部分列 $\{Ux_{n_j}\}$ が $v \in E$ に弱収束するとします. $\phi(\cdot, Uu)$ が weakly lower semi–continuous より,

$$0 = \lim_j \phi(Ux_{n_j}, Uu) = \liminf_j \phi(Ux_{n_j}, Uu) \geq \phi(v, Uu).$$

この様にして, $\phi(v, Uu) = 0$, 即ち, $v = Uu$ を得ます. $\{Ux_n\}$ の弱収束する部分列は Uu に弱収束することを確認しました. したがって, $\{Ux_n\}$ 自身が Uu に弱収束します. この $\{Ux_n\}$, Uu と ϕ を $\{JUx_n\}$, JUu と ϕ^* に置き換えれば, $\{JUx_n\}$ が JUu に弱収束することが分かります. JU は norm to weak continuous です. $S \in \mathcal{T}_P^C$ と $U = I - S \in \mathcal{T}_R^C$ は同値ですから, ここまでの議論と (p_1) によって, (p_2) を得ます.

更に, E が Kadec–Klee property を持つとします. このとき, (p_3) が成立します:

(p_3) U and S are continuous if $U \in \mathcal{T}_R^C$ and $S \in \mathcal{T}_P^C$.

$U \in \mathcal{T}_R^C$ について, $\{x_n\} \subset C$ が $u \in C$ に強収束するとき, $\{Ux_n\}$ は Uu に弱収束し $\lim_n \|Ux_n\| = \|Uu\|$ は確認済みです. よって, $\{Ux_n\}$ は Uu に強収束し, $U \in \mathcal{T}_R^C$ は連続な写像になります. したがって, $S \in \mathcal{T}_P^C$ も連続です. E^* が Kadec–Klee property を持つならば, 同様に (p_4) を確認できます.

(p_4) JU and $J(I - S)$ are norm to norm continuous if $U \in \mathcal{T}_R^C$ and $S \in \mathcal{T}_P^C$.

C を滑らかな狭義凸回帰 Banach 空間 E の部分集合とします. 簡潔に記述するため, $V \in \mathcal{F}^C$ について, 次の A, D_x を使用します. A, D_x は V に依存しますが, V の記載を省いても混乱はないでしょう.

$$A = J(I - V), \quad D_x = \cap_{x \in C}\{y \in C : \langle Vx - y, Ax\rangle \geq 0\} \quad \text{for} \quad x \in C.$$

$S \in \mathcal{T}_P^C$ とします. $z \in \cap_{x \in C} D_x$ とすれば, $\langle Sx - z, J(x - Sx)\rangle \geq 0$ for $x \in C$. ここで $x = z$ とすると $-\|z - Sz\|^2 \geq 0$, したがって $\cap_{x \in C} D_x \subset F(S)$ を得ます. 定義より, $F(S) \subset \cap_{x \in C} D_x$ もほぼ自明です.

(p_5) $F(S) = \cap_{x \in C} D_x$ for $S \in \mathcal{T}_P^C$.

C に閉凸を仮定すれば, D_x も明らかに閉凸です. このとき (p_5) から, 次の主張は自明です:

(p_6) $F(S)$ is closed and convex for $S \in \mathcal{T}_P^C$.

$B \in \mathcal{F}^C$ が連続で $\cap_{x \in C} D_x = \cap_{x \in C}\{y \in C : \langle Bx - y, Ax\rangle \geq 0\} \neq \emptyset$ を満たすとき, 簡潔に $B \in \mathcal{C}^C$ と表現します. $B \in \mathcal{F}^C$ が連続ならば, J が norm to weak continuous より, $A = J(I - B)$ も norm to weak continuous です. $\cap_{x \in C} D_x \neq \emptyset$ は性質ではなく条件なので, $\mathcal{C}^C$ を族と呼ぶのは少し抵抗があります. $B \in \mathcal{C}^C$ について, $v \in \cap_{x \in C} D_x$ ならば $v \in F(B)$ ですが, $u \in F(B)$ でも $u \in \cap_{x \in C} D_x$ とは限りません.

E が Kadec–Klee property を持つとします. このとき, (p_3) と (p_5) より, 次の主張は明らかです:

(p_7) $S \in \mathcal{T}_P^C$ が $F(S) \neq \emptyset$ を満たせば, $S \in \mathcal{C}^C$.

一方, $B \in \mathcal{C}^C$ かつ $B \notin \mathcal{T}_P^C$ となる B を探すのは容易です. $Bx = x^2$ for $x \in C = [0,1]$ とすれば, B は連続, $F(B) = \{0,1\}$, かつ $\langle Bx - 0, Ax\rangle = (x^2 - 0)(x - x^2) \geq 0$ for $x \in C$. したがって, $B \in \mathcal{C}^{Cs}$ です. $B \notin \mathcal{T}_P^C$ は明らかです: $\langle By - Bz, Ay - Az\rangle = (\frac{1}{4} - 1)((\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) - (1-1)) < 0$, ただし, $y = 1/2$, $z = 1$. $B \notin \mathcal{M}_P^C$ も明らかでしょう. 次の条件を満たす $B \in \mathcal{C}^C$ の例を与えました:

$$F(B) \not\subset \cap_{x\in C} D_x,\ \ F(B) \text{ is not convex, and } A = J(I - B) \text{ is not monotone.}$$

4. 基本構造

この節の 3 つの lemma が, 私たちの method の基本構造を記述します.

Lemma 4.1. *Let E be a strictly convex reflexive Banach space. Let D be a non–empty closed convex subset of E. Let $x_0 \in E$ and let $\{x_n\}$ be a sequence in E satisfying*

$$\|x_0 - x_n\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\| \leq \|x_0 - P_D x_0\| \qquad \text{for } \ n \in N. \tag{4.1}$$

Then $\{x_n\}$ has a weakly convergent subsequence. Furthermore the following hold:

(1) *Suppose a subsequence $\{x_{n_j}\}$ of $\{x_n\}$ converges weakly to $u \in D$.*
Then, $u = P_D x_0$; $\{x_{n_j}\}$ converges weakly to $P_D x_0$.
When E has the Kadec–Klee property, $\{x_{n_j}\}$ converges strongly to $P_D x_0$.

(2) *Suppose every subsequence of $\{x_n\}$ converges weakly to a point of D.*
Then, $\{x_n\}$ converges weakly to $P_D x_0$.
When E has the Kadec–Klee property, $\{x_n\}$ converges strongly to $P_D x_0$.

解説. $\{\|x_0 - x_n\|\}$ は $\|x_0 - P_D x_0\|$ を 1 つの上界とする非減少列です. この性質が $\{\|x_0 - x_n\|\}$ の部分列に遺伝することは自明です. $\{x_n\}$ は弱収束する部分列を持ち, 任意の部分列は (4.1) を満たします.

部分列 $\{x_{n_j}\}$ が $u \in D$ に弱収束するとします. 仮定から, $\{x_{n_j}\}$ は (4.1) を満たし, $\{x_0 - x_{n_j}\}$ は $x_0 - u$ に弱収束します. $\|\cdot\|$ が weakly lower semi–continuous, $u \in D$ と (4.1) より, 次の不等式も明らかです:

$$\|x_0 - u\| \leq \liminf_j \|x_0 - x_{n_j}\| \leq \limsup_j \|x_0 - x_{n_j}\| \leq \|x_0 - P_D x_0\| \leq \|x_0 - u\|.$$

したがって, $\|x_0 - u\| = \|x_0 - P_D x_0\| = \lim_j \|x_0 - x_{n_j}\|$ が従います. この条件下で $P_D x_0$ は一意ですから, $u = P_D x_0$ を得ます. $\{x_{n_j}\}$ は $P_D x_0$ に弱収束します. $\{x_{n_j}\}$ は任意ですから, $\{x_n\}$ が $P_D x_0$ に弱収束します. ここまでの議論から, E が Kadec–Klee property を持てば, $\{x_0 - x_n\}$ は $x_0 - P_D x_0$ に強収束し, $\{x_n\}$ は $P_D x_0$ に強収束します. (1) を確認しました. (2) を示します. $\{x_n\}$ の弱収束する部分列の収束先が総て D の点とします. (1) より, 総ての弱収束する部分列の収束先は $P_D x_0$ です. したがって, $\{x_n\}$ が $P_D x_0$ に弱収束します. E が Kadec–Klee property を持てば, 再び (1) より, この収束は強収束です.

Lemma 4.2 は Lemma 4.1 から容易に導かれます. この lemma は Tsukada の lemma [11] と密接な関係を持ちます. しかし, この証明に Tsukada の lemma を使うのはやや大袈裟です.

Lemma 4.2. *Let E be a strictly convex reflexive Banach space. Let $x_0 \in E$ and let $\{D_n\}$ be a sequence of closed convex subsets of E satisfying $D_{n+1} \subset D_n$ for $n \in N$ and $D = \cap_n D_n \neq \emptyset$. Let $x_1 = P_{D_1} x_0$. For $n \in N$, define x_{n+1}, K_n and z_n respectively by*

$$x_{n+1} = P_{D_{n+1}} x_0, \quad K_n = \{y \in D_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|\}, \quad z_n \in K_n.$$

Then $\{x_n\}$ and $\{z_n\}$ converge weakly to $P_D x_0$.

Furthermore, when E has the Kadec–Klee property, $\{x_n\}$ and $\{z_n\}$ converge strongly to $P_D x_0$.

解説. 任意の $n \in N$ について $\emptyset \neq D \subset D_{n+1} \subset D_n$ と距離射影の性質から, $\{x_n\}$ は (4.1) を満たし有界です. $\{x_n\}$ は弱収束する部分列を持ちます. $\{x_{n_j}\}$ を $u \in E$ に弱収束する部分列, $m \in N$ とすれば, $\{x_{n_j}\}_{n_j \geq m} \subset D_m$ と D_m が弱閉より, $u \in D_m$ を得ます; $u \in D$ です. $\{z_n\}$ の定義から, $n \in N$ について,

$$\|x_0 - z_n\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\| \leq \|x_0 - z_{n+1}\| \leq \|x_0 - x_{n+2}\| \leq \|x_0 - P_D x_0\|.$$

したがって, $\{z_n\}$ も (4.1) を満たします. $m \in N$ ごとに $\{z_k\}_{k \geq m} \subset A_m \subset D_m$ より, 同様に弱収束する部分列の収束先は D の点です. Lemma 4.1 (2) より, 直ちに結論を得ます.

Remark 4.3. Lemma 4.2 で, $\{D_n\}$ に必要なのは次のことだけです: $\{D_n\}$ は E の閉凸集合の列で $D_{n+1} \subset$

D_n for $n \in N$ と $D = \cap_n D_n \neq \emptyset$ を満たす．Lemma 4.2 の主張は $\{D_n\}$ の生成規則と無縁です．また, $\{D_n\}$ の任意の部分列 $\{D_{n_k}\}$ に, この性質は遺伝します; $D_{n_{k+1}} \subset D_{n_k}$ for $k \in N$, $D = \cap_k D_{n_k}$. 私たちの method において, この事実は非常に重要です; 例えば, shrinking projection method においては, 1 つの写像の不動点への近似と写像族の共通不動点への近似の差異はごく僅かです．Kimura–Takahashi [6] は, 射影と $\{D_n\}$ の生成規則の独立性として, 既にこの事実に言及しています．

Lemma 4.3. *Let E be a smooth strictly convex reflexive Banach space. Let C be a closed convex subset of E and let $B \in \mathcal{C}^C$. Then,*

(1) *For $x \in C$, D_x is non–empty, closed and convex.*

Furthermore, for a sequence $\{y_n\}$ in C, the following hold:

(2) *Each $D_n = \cap_{j \in N_n} D_{y_j}$ and $D = \cap_{n \in N} D_n = \cap_{n \in N} D_{y_n}$ are non–empty, closed and convex.*

(3) *Suppose $\{y_n\}$ converges strongly to some $v \in D$. Then, $v \in F(B)$.*

解説. 任意の $x \in C$ について, $B \in \mathcal{C}^C$ より, $\emptyset \neq \cap_{y \in C} D_y \subset D_x$. また, C は閉凸ですから, D_x の定義と双対積の性質より, D_x も閉凸です．したがって, (1) と (2) は明らかです．この条件下で, J は norm to weak continuous ですから．B が連続より, $A = J(I - B)$ も norm to weak continuous です．

$\{y_n\}$ が $v \in D$ に強収束し B が連続なので, $\{Ay_n\}$ が有界になることが次の式からわかります:

$$\begin{aligned}\big|\|Ay_n\| - \|Av\|\big| &= \big|\|J(I-B)y_n\| - \|J(I-B)v\|\big| = \big|\|(I-B)y_n\| - \|(I-B)v\|\big| \\ &\leq \|(y_n - v) - (By_n - Bv)\| \leq \|y_n - v\| + \|By_n - Bv\|.\end{aligned}$$

$n \in N$ について, $v \in D = \cap_{n \in N} D_n = \cap_{n \in N} D_{y_n} \subset D_{y_n}$ より, $0 \leq \langle By_n - v, Ay_n \rangle$ であり,

$$\begin{aligned}0 \leq &\langle By_n - v, Ay_n \rangle = \langle By_n - v, Ay_n - Av \rangle + \langle By_n - v, Av \rangle, \\ &\langle By_n - v, Av \rangle \leq \|By_n - Bv\|\|Av\| + \langle Bv - v, Av \rangle, \\ &\langle By_n - v, Ay_n - Av \rangle \leq \|By_n - Bv\|\|Ay_n - Av\| + \langle Bv - v, Ay_n - Av \rangle\end{aligned}$$

が成立しています．したがって, $\{y_n\}$ が $v \in D$ に強収束することから, (3) を得ます:

$$0 \leq \langle Bv - v, Av \rangle = \langle Bv - v, J(v - Bv) \rangle = -\|v - Bv\|^2, \quad \text{that is,} \quad v \in F(B).$$

5. 許容範囲をもつ不動点近似法

Theorem 5.1. *Let E be a smooth strictly convex reflexive Banach space which has the Kadec–Klee property. Let C be a closed convex subset of E and let $B \in \mathcal{C}^C$.*

Let $x_0 \in E$, $w_1 \in C$, $D_1 = D_{w_1}$ and $x_1 = P_{D_1} x_0$. Let $A_1 = C \backslash (D_1 \cup \{w_1\})$ and let $y_1 \in A_1$. For $n \in N$, generate $D_{n+1}, x_{n+1}, A_{n+1}$ and y_{n+1} as below: $D_{n+1} = D_n \cap D_{y_n}$, $\quad x_{n+1} = P_{D_{n+1}} x_0$,

$$A_{n+1} = \{y \in D_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|, y \neq y_n\} \quad \text{and} \quad y_{n+1} \in A_{n+1}.$$

Then, either of the following holds:

(1) *$A_n \neq \emptyset$ for $n \in N$.*
In this case, $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ converge strongly to $P_D x_0 \in F(B)$, where $D = \cap_{n \in N} D_{y_n}$.

(2) *$A_k = \emptyset$ for some $k \in N$; the procedure is stopped.*
In this case, either $y_{k-1} \in F(B)$ or $w_1 \in F(B)$ holds.

解説. $x \in C$ について, $B \in \mathcal{C}^C$ と Lemma 4.3 (1) より, D_x は非空閉凸です．よって, C, $\{w_1\}$ と $D_1 = D_{w_1}$ は非空閉凸です．$x_1 = P_{D_1} x_0$ が存在します．$A_1 = \emptyset$ かもしれません．$A_1 \neq \emptyset$ ならば, $y_1 \in A_1$ をとり, D_2, x_2 と A_2 を生成できます．D_2 は非空閉凸です．しかし, $A_2 = \emptyset$ かもしれません．$A_2 \neq \emptyset$ ならば, $y_2 \in A_2$ をとり, 手続きを続行できます．この手続きは $A_k = \emptyset$ となる $k \in N$ に出会うと停止します．

(1) を示します．帰納的に $\{D_n\}$, $\{x_n\}$, $\{A_n\}$ と $\{y_n\}$ を生成でき, 生成規則から, $\{D_n\}$ は $D_{n+1} \subset D_n$ for $n \in N$ と $D = \cap_n D_n \neq \emptyset$ を満たす C の閉凸集合の列です．Lemma 4.2 で定義した K_n を考えます; $K_n = \{y \in D_n : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{n+1}\|\}$, $y_{n+1} \in A_{n+1} \subset K_n$, です．Lemma 4.2 より, $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は $P_D x_0$ に強収束します．$\{y_n\}$ が $P_D x_0$ に強収束するので, Lemma 4.3 (3) から, $P_D x_0 \in F(B)$ を得ます．

(2) を示します. C は凸集合ですから連結です. $\{w_1\}$ と D_1 は非空閉凸です. $A_1 = C\setminus(D_1 \cup \{w_1\}) = \emptyset$ を仮定します. $C = D_1 \cup \{w_1\}$ より, $w_1 \in D_{w_1}$ が従います; $-\|Bw_1 - w_1\|^2 = \langle Bw_1 - w_1, Aw_1\rangle \geq 0$. $w_1 \in F(B)$ を得ます. ある $k \in N$ について, D_{k+1}, x_{k+1} と $A_{k+1} = \emptyset$ が生成されたとします; D_k と D_{k+1} は非空閉凸です. $K_k = \{y \in D_k : \|x_0 - y\| \leq \|x_0 - x_{k+1}\|\}$ より, $x_k, x_{k+1} \in K_k$ と $K_k \neq \emptyset$ を得ます. $\emptyset = A_{k+1} = K_k\setminus\{y_k\}$ より, $y_k \in K_k$ であり, K_k は一点集合です. $y_k = x_k = x_{k+1}$ が従います. $y_k = x_{k+1} \in D_{k+1} \subset D_{y_k}$ より, $-\|By_k - y_k\|^2 = \langle By_k - y_k, Ay_k\rangle \geq 0$, したがって $y_k \in F(B)$ が分かります.

$B \in \mathcal{T}_P^C$ and $F(B) \neq \emptyset$ とすれば, $F(B) = \cap_{x\in C} D_x \subset D$ が閉凸より, $P_D x_0 = P_{F(B)} x_0$ が $P_D x_0 \in F(B)$ から導かれます. また, Theorem 5.1 の伝統的な表現や写像族への適用例を得ることは難しくありません.

1 節で述べた様に, 数値計算を考えるとき, 現実の制限から D_n の境界や $P_{D_n} x_0$ の位置は不明瞭 (数値計算の値と理論上の精確な値が異なる) と考えるべきです. $P_{D_n} x_0$ は理論上の存在にすぎず, 数値計算上 D_{n+1} を生成できません. したがって, 許容範囲 A_n を設定しています. A_n の境界も不明瞭ですが, 一定の大きさを持つなら, 数値計算が許容する $y_n \in A_n$ を選べるでしょう; この y_n から計算上の D_{n+1} を生成します.

1 節で $u \in Q$ を探す method を考え, $\sum_{n\in N} b_n < \infty$ や $\lim_n b_n = 0$ という仮定は, b_n を step n の誤差の上界と考えるなら, 誤差の性質と矛盾することを指摘しました. 例えば $A_n = \{y \in C : \|y - z_n\| \leq b_n\}$ を許容範囲として取れたとします; z_n は target point です. このとき, $\{b_n\}$ は $\sum_{n\in N} b_n < \infty$ や $\lim_n b_n = 0$ を満たしてもかまいません. ただし, step n_0 で $y_{n_0+1} \in A_{n_0+1}$ が得られないとき手続きは停止します; $\{b_n\}$ の条件は method の有効性に影響します. 理論上 $\{y_n\}$ が u に強収束することが保証されていても, 現実の制限から $y_{n_0+1} \in A_{n_0+1}$ を得られず, 数値計算手続きは停止することがあります.

*****

This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. 東京工業大学 高橋 渉 先生には平素からの丁寧なご教示に感謝いたします. 千葉大学 青山 耕治 先生には, この論稿を発表する機会をいただいたことにお礼申し上げます.

References

[1] Y. Alber, Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 178, Dekker, New York, 1996.
[2] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: their relations and continuity properties, Journal of Nonlinear and Convex Analysis 10 (2009), 131 – 147.
[3] T. Ibaraki and S. Kajiba, A shrinking projection method for generalized firmly nonexpansive mappings with non-summable errors, Josai Mathematical Monographs, 11 (2018), 105 – 120.
[4] T. Ibaraki and Y. Kimura, Approximation of a fixed point of generalized firmly nonexpansive mappings with non-summable errors, Linear Nonlinear Anal. 2 (2016), 301 – 310.
[5] Y. Kimura, Approximation of a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings with nonsummable errors in a Hilbert space, J. Nonlinear Convex Anal. 15 (2014), 429 – 436.
[6] Y. Kimura and W. Takahashi, On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space, J. Math. Anal. Appl. 357 (2009), 356 – 363.
[7] F. Kohsaka, Ray's theorem revisited: a fixed point free firmly nonexpansive mapping in Hilbert spaces, Journal of Inequalities and Applications (2015).
[8] S. Saejung, Ray's Theorem for Firmly Nonexpansive-Like Mappings and Equilibrium Problems in Banach Spaces, Fixed Point Theory and Applications 1 (2010): 806837.
[9] W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
[10] W. Takahashi, Y. Takeuchi and R. Kubota, Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces, J. Math. Anal. Appl. 341 (2008), 276 – 286.
[11] M. Tsukada, Convergence of best approximations in a smooth Banach space, J.Approx. Theory 40 (1984), 301–309.