

# 超対称的量子ウォーク

信州大学・工学基礎教育部門 鈴木 章斗

Akito Suzuki

Division of Mathematics and Physics, Shinshu University

## 1 はじめに

昨年の RIMS 共同研究「量子場の数理とその周辺」の講究録 [17] では、量子ウォークにおけるスペクトル写像定理の概要と、その応用例が豊富であることを述べた。本稿では、このスペクトル写像定理の背後に超対称性が潜んでいることを示した拙著 [18] の概略と応用例を述べる。

はじめに、スペクトル写像定理の要点を掻い摘んで言えば、次のようになる。まず、この定理が適用できるのは、2つのユニタリかつ自己共役な作用素  $S$  と  $C$  を用いて、 $U = SC$  と表せるユニタリ作用素である。次に、 $C = 2d^*d - 1$  と表せるような境界作用素  $d$  を用いて、判別子  $T = dSd^*$  を定義すると、 $T$  は自己共役かつ  $\|T\| \leq 1$  となる。いま、

$$M_{\pm} = \dim \ker d \cap \ker(S \pm 1)$$

とし、Jukowsky 変換 (の  $1/2$  倍) を  $\varphi(z) = (z + z^{-1})/2$  ( $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ) で表すと、 $U$  のスペクトル  $\sigma(U)$  と  $T$  のスペクトル  $\sigma(T)$  の間に、次の関係が成立する。

**Theorem 1.1** (スペクトル写像定理 [7]).

$$\sigma(U) = \varphi^{-1}(\sigma(T)) \cup \{1\}^{M_+} \cup \{-1\}^{M_-}$$

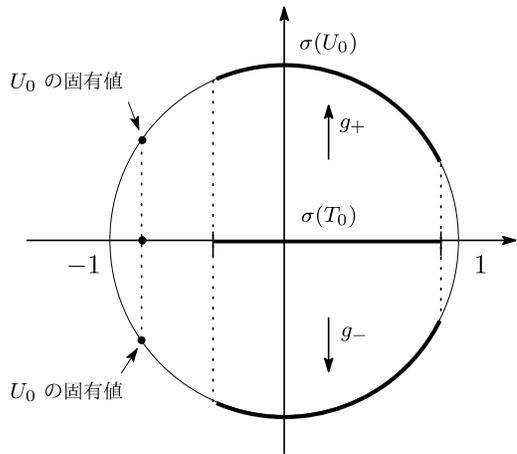


図1  $\sigma(U_0)$  の概形. 関数  $g_{\pm}$  は、区間  $[-1, 1]$  の部分集合  $\sigma(T_0)$  を単位円周  $S^1$  の部分集合  $\sigma(U_0)$  に写す. このとき、 $\sigma(U_0)$  は実軸対称となる.

ここで,  $\{a\}^b$  は集合  $\{a\}$  の濃度が  $b \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$  であることを表し,  $b = 0$  ならば空集合,  $b = \infty$  ならば可算無限であることを意味する. スペクトル写像定理では, 固有値の集合  $\sigma_p(U)$  と  $\sigma_p(T)$  の間にも同様の関係が成り立つこともいえる. また,  $m_{\pm} = \dim \ker(T \mp 1)$  とすると,  $\pm 1$  の固有値については次が成り立つ.

$$\dim \ker(U \mp 1) = M_{\pm} + m_{\pm} \quad (1.1)$$

この定理を精密化するために,  $U$  と  $T$  を  $\pm 1$  の固有空間の直交補空間に制限した作用素  $U_0 = U|_{\ker(U^2-1)^{\perp}}$ ,  $T_0 = T|_{\ker(T^2-1)^{\perp}}$  を導入する.  $\varphi$  の逆が 2 価となることに注意して,  $g_{\pm}(\xi) = e^{\pm i \arccos \xi}$  ( $\xi \in [-1, 1]$ ) とおくと, 図 1 にみるようなスペクトルに関する対称性が示せる [4, 5, 13, 18].

**Corollary 1.2.**

$$\sigma(U_0) = g_+(\sigma(T_0)) \cup g_-(\sigma(T_0))$$

以下本稿では, このスペクトルの対称性が, 超対称性と関係していることを順を追ってみていく. ほとんどの議論は, 拙著 [18] によっているため, 証明などはそちらを参照して頂きたい. スペクトル写像定理に関しては, [7, 13, 17] を参照されたい.

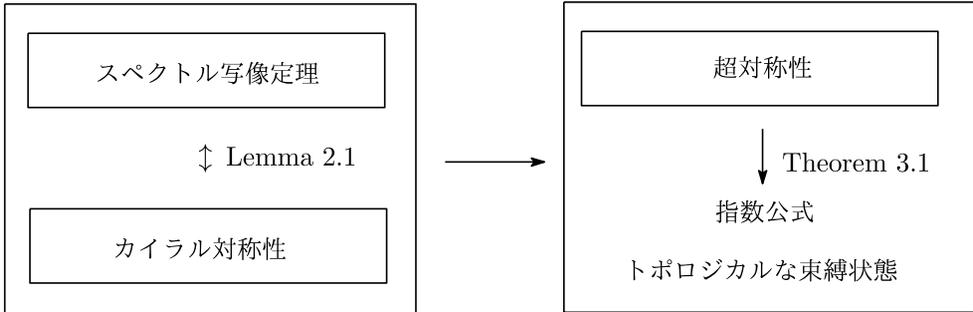


図 2 超対称性とスペクトル写像定理の関係

まず, 2 節ではユニタリ作用素に対するカイラル対称性とスペクトル写像定理を使うための条件が同値であることをみる. また, カイラル対称性から, 超対称性が現れることを示し, ユニタリ作用素に対する指数を定義する. 3 節では, 超対称性をスペクトル写像定理の観点から調べ, 主結果である指数公式を述べる. 4 節では, 主結果の考察を行い, トポロジカルに保護された束縛状態が現れることをみる. 具体例として, スプリット・ステップ量子ウォークを取り上げる. これらの構造を表す概念図は, 図 2 のようになる. 本

稿では、具体的なモデルの指数を計算することはしなかったが、拙著 [18] では有限次元の例やグローバーの探索アルゴリズムに対する指数が計算されている。また、本稿ではあまり多くの例を扱えなかったが、拙著 [17] に登場するスペクトル写像定理が使える例は、すべて超対称的構造をもち、本稿の一般論が適用可能な例となっている。興味があれば、そちらを参照して頂きたい。

## 2 超対称性と指数

以下、本稿では  $\mathcal{H}$  は可分なヒルベルト空間とする。

### 2.1 カイラル対称性

まず、ユニタリ作用素に対するカイラル対称性を次で定義する。

**Definition 2.1.**  $\mathcal{H}$  上のユニタリ作用素  $U$  に対して、 $\mathcal{H}$  上のユニタリかつ自己共役な作用素  $\Gamma$  が存在して、

$$\Gamma U \Gamma = U^{-1} \quad (2.1)$$

を満たすとき、 $U$  はカイラル対称性をもつという。

**Remark 2.1.** ユニタリ作用素のカイラル対称性 (2.1) は、自己共役作用素  $H$  に対するカイラル対称性

$$\Gamma H \Gamma = -H \quad (2.2)$$

と次の意味で自然な対応関係がある。 $U_H = e^{iH}$  とするとき、(2.2) より

$$\Gamma U_H \Gamma = e^{i\Gamma H \Gamma} = e^{-iH} = U_H^{-1}$$

となり、 $U_H$  は (2.1) を満たす。

次の補題は、カイラル対称性をもつユニタリ作用素に対するひとつの特徴づけを与える。

**Lemma 2.1.**  $\mathcal{H}$  上のユニタリ作用素  $U$  について、次は同値である。

- (1)  $U$  はカイラル対称性をもつ。
- (2)  $U$  は 2 つのユニタリかつ自己共役な作用素の積で表される。

*Proof.* まず、(1) ならば (2) を示す。そのために、 $U$  が (2.1) を満たすとする。このとき、 $\Gamma$  はユニタリかつ自己共役なので、 $\Gamma^* = \Gamma = \Gamma^{-1}$  が成り立ち、 $\Gamma^2 = 1$  もいえる。ゆえ

に,  $C := \Gamma U$  とおくと,  $U = \Gamma C$  と表せるので,  $C$  が自己共役であることをいえばよい. 実際,  $C^* = U^* \Gamma$  であり,  $\Gamma^2 = 1$  と (2.1) より,  $C^* = C$  が示せる. これにより,  $C$  はユニタリかつ自己共役となる.

逆に, ユニタリかつ自己共役な作用素  $\Gamma$  と  $C$  が存在して,  $U = \Gamma C$  と表せるとする. このとき,  $\Gamma U \Gamma = C \Gamma = U^{-1}$  なので, (2) ならば (1) が示される.  $\square$

**Remark 2.2.** この稿の冒頭で述べたように, スペクトル写像定理 (Theorem 1.1) が使えるための条件は, Lemma 2.1 (2) と同値であった. ゆえに,  $U$  に対してスペクトル写像定理の適用するための必要十分条件は,  $U$  がカイラル対称性をもつことである.

## 2.2 超対称性とウィッテン指数

以下,  $U$  はカイラル対称性を持ち, ユニタリかつ自己共役な作用素  $\Gamma$  と  $C$  の積

$$U = \Gamma C$$

で表せると仮定する. このとき, 自己共役作用素

$$R := \frac{1}{2}\{\Gamma, C\}, \quad Q := \frac{1}{2i}[\Gamma, C]$$

を考える. ここで,  $\{X, Y\} = XY + YX$  は反交換子,  $[X, Y] = XY - YX$  は交換子である. 次の補題は直接計算によって確かめられる.

**Lemma 2.2.** 次が成り立つ.

- (1)  $[\Gamma, R] = \{\Gamma, Q\} = 0$ .
- (2)  $U = R + iQ$ .
- (3)  $R = \operatorname{Re}U := (U + U^*)/2, \quad Q = \operatorname{Im}U := (U - U^*)/(2i)$ .

いま,  $\Gamma_{\pm} = (1 \pm \Gamma)/2$  とすると,  $\Gamma_{\pm}$  は  $\ker(U \mp 1)$  への正射影作用素で,  $\Gamma = \Gamma_+ - \Gamma_-$  と表せる. 分解  $\mathcal{H} = \ker(\Gamma - 1) \oplus \ker(\Gamma + 1)$  に対する  $\Gamma$  の行列表示を

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とし,  $R_+ = \Gamma_+ R \Gamma_+, \quad R_- = \Gamma_- R \Gamma_-, \quad \alpha = \Gamma_- Q \Gamma_+$  とすると, Lemma 2.2 から,

$$R = \begin{pmatrix} R_+ & 0 \\ 0 & R_- \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^* \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

と表せる. 上の  $Q$  のような表示をもつ作用素を超対称的量子力学の文脈では, 超対称荷というので,  $Q$  に対してもその名を流用する. 同様の理由で,  $H := Q^2$  をハミルトニアンと呼ぶ. 以下の議論は, 超対称的量子力学の標準的な議論である [1, 19, 20].  $Q$  の行列表示から容易に計算されるように

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

と表せる. ただし,  $H_+ = \alpha^* \alpha$  かつ  $H_- = \alpha \alpha^*$  である. ここで, 超対称的量子力学で重要な役割をするウィッテン指数を

$$\Delta(H) = \dim \ker H_+ - \dim \ker H_-$$

で定義する.  $\alpha$  がフレドホルムであるとき,  $\alpha$  のフレドホルム指数は

$$\text{Index}_F(\alpha) = \dim \ker \alpha - \dim \ker \alpha^*$$

で定義され, コンパクト作用素による摂動に対して不変であることが知られている. また,  $\ker \alpha^* \alpha = \ker \alpha$  なので,

$$\Delta(H) = \text{Index}_F(\alpha) \quad (2.4)$$

が成り立つ. ここで, 閉作用素  $A$  がフレドホルムであるとは,  $\dim \ker A < \infty$  かつ  $\dim \ker A^* < \infty$  で,  $\text{Ran} A$  が閉集合であることをいう.

## 2.3 ユニタリ作用素に対する指数

前節でみた超対称性を利用して, カイラル対称性なユニタリ作用素の指数を以下のように定義する.

**Definition 2.2.**  $\mathcal{H}$  上のユニタリ作用素  $U$  とユニタリかつ自己共役な作用素  $\Gamma$  は, (2.1) を満たすとす.

- (1)  $\alpha$  がフレドホルム作用素であるとき,  $(U, \Gamma)$  はフレドホルム対であるという.
- (2)  $(U, \Gamma)$  がフレドホルム対であるとき,  $U$  の指数を

$$\text{ind}_\Gamma(U) = \text{index}_F(\alpha)$$

で定義する.

**Remark 2.3.**  $\alpha$  がフレドホルムであることと, ハミルトニアン  $H = Q^2$  がフレドホルムであることは同値である. これは, 超対称的量子力学でよく知られた事実である [1].

$\alpha = \Gamma_- Q \Gamma_+$  なので、ユニタリ作用素の指数を  $\text{ind}_\Gamma(U)$  と書いているが、(2.4) より、 $\text{ind}_\Gamma(U) = \Delta(H)$  なので、 $\Gamma$  に依らないのではないかと、この疑問をもつかも知れない。確かに、フレドホルム性については  $\Gamma$  に依存しない。これは、 $H = Q^2 = (\text{Im}U)^2$  よりすぐわかる。ところが、 $H$  の行列表示 (2.3) は  $\Gamma$  の行列表示によって定まるため、 $\ker H_+$  と  $\ker H_-$  は  $\Gamma$  に依存する。実際、そのような例が [18] で構成されている。

### 3 スペクトル写像定理と指数公式

前節では、カイラル対称性をもつことは、スペクトル写像定理が適用できるための必要十分条件であることと、ユニタリ作用素に対するカイラル超対称性から、自然に超対称的量子力学へ移行できることをみた。この節では、スペクトル写像定理の観点から超対称性を顧みる。前節同様、 $U = \Gamma C$  のようにユニタリかつ自己共役な作用素の積で表されるカイラル対称なユニタリ作用素を考える。このとき、境界作用素  $d$  が次のようにして導入できる。 $\{\chi_j\}_{j \in V}$  を  $\ker(C - 1)$  の CONS とするとき、 $\mathcal{K} = \ell^2(V)$  とする。いま、 $d: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$  の  $\psi \in \mathcal{H}$  に対する作用を

$$(d\psi)(j) = \langle \chi_j, \psi \rangle, \quad j \in V$$

で定義する。このとき、 $d$  は余等長作用素となる。すなわち、 $dd^*$  は  $\mathcal{K}$  上の恒等作用素である。また、その共役  $d^*: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$  は等長作用素となり、 $d^*d$  は  $\ker(C - 1)$  への正射影作用素となる。ゆえに、 $C$  のスペクトル分解は

$$C = 2d^*d - 1 \tag{3.1}$$

で与えられる。逆に、もし余等長作用素  $d$  に対して、(3.1) で  $C$  を定義すれば、 $C$  はユニタリかつ自己共役になる。こうして、カイラル対称なユニタリ作用素  $U$  は、ユニタリかつ自己共役な  $\Gamma$  と余等長作用素  $d$  を用いて、常に

$$U = \Gamma(2d^*d - 1)$$

と表せることがわかる。この場合、判別子は

$$T = d\Gamma d^*$$

によって定義され、 $U$  と  $T$  の間にスペクトル写像定理 (Theorem 1.1, Corollary 1.2, (1.1) など) が成り立つ。図 3 は、スペクトル写像定理から求められる  $U$  と  $H$  のスペクトルの関係を表す。

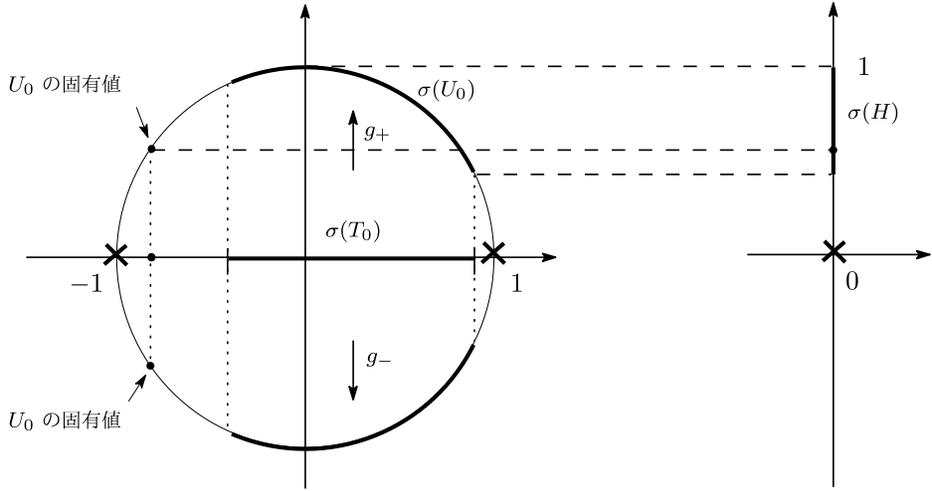


図3  $U$  と  $H$  のスペクトルの関係.

まず、 $U$  の制限  $U_0 = U|_{\ker(U^2-1)^\perp}$  を用いると、

$$\sigma(U) = \sigma(U_0) \cup \{+1\}^{M_+ + m_+} \cup \{-1\}^{M_- + m_-}$$

と表せて、 $T$  の制限  $T_0 = T|_{\ker(T^2-1)^\perp}$  を用いると

$$\sigma(U_0) = g_+(\sigma(T_0)) \cup g_-(\sigma(T_0))$$

となる。また、単位円周上の  $\pm 1$  以外の部分  $\sigma(U_0)$  は、 $\sigma(H) = (\text{Im}\sigma(U))^2$  のゼロ以外の部分に写っていることがわかる。さらに、 $M_\pm + m_\pm < \infty$  ならば、

$$\dim \ker H = M_+ + m_+ + M_- + m_-$$

が成り立つ。ここで、

$$M_\pm = \dim \ker d \cap \ker(\Gamma \pm 1), \quad m_\pm = \dim \ker(T \mp 1)$$

である。図中の罰点 (x) は、 $U$  の  $\pm 1$  の固有値が、 $H$  のゼロ固有値に変換されることを表している。尤も、この図のように  $U$  の  $\pm 1$  付近 (同じことであるが  $H$  の  $0$  付近) でスペクトルギャップがあるかは、具体的な  $U$  や  $H$  を調べなければわからない。例えば、並進対称な 1 次元量子ウォークは、すべてユニタリかつ自己共役な作用素の積で表せることが、Ohno[12] によって示されている。よって、Lemma 2.1 より、並進対称な 1 次元量子

ウォークは、カイラル対称性をもち、スペクトル写像定理が適用できる。しかし、 $\pm 1$  付近にギャップをもつ場合もあるし、もたない場合もあり、 $\pm 1$  に無限に縮退した固有値をもつこともある [16, Example 2.3 (i)-(iii)]。しかし、Kitagawa ら [8, 9, 10, 11] によって実験的に示された 1 次元スプリット・ステップ量子ウォークや、異方性をもつ 1 次元量子ウォークでは、スペクトルギャップをもち  $M_{\pm} + m_{\pm} < \infty$  となる例が確認されている [5]。  $U$  がスペクトルギャップをもち、  $M_{\pm} + m_{\pm} < \infty$  であれば、  $(U, \Gamma)$  はフレドホルム対となり、図 3 のようなスペクトルの構造になる。

**Theorem 3.1.** (1)  $(U, \Gamma)$  がフレドホルム対であるための必要十分条件は、  $1 - T^2$  がフレドホルムかつ  $M_{\pm} < \infty$  となることである。

(2)  $(U, \Gamma)$  がフレドホルム対であれば、

$$\text{ind}_{\Gamma}(U) = (M_{-} - m_{-}) - (M_{+} - m_{+}) \quad (3.2)$$

が成り立つ。特に、

$$\dim \ker(U - 1) + \dim \ker(U + 1) \geq |\text{ind}_{\Gamma}(U)| \quad (3.3)$$

であり、等号は  $m_{-} = M_{+} = 0$  のとき成立する。

(3)  $(U, \Gamma)$  と  $(U', \Gamma)$  がフレドホルム対で、  $U' - U$  がコンパクト作用素であるとき、

$$\text{ind}_{\Gamma}(U') = \text{ind}_{\Gamma}(U).$$

この定理の系として、  $\text{ind}_{\Gamma}(U)$  のユニタリ共変性などの様々な性質を示せるが、それらと定理の証明は [18] を参照されたい。

## 4 考察

Theorem 3.1 の意味について考察する。まず、(1) は  $M_{\pm} < \infty$  が示されれば、  $1 - T^2$  がフレドホルムであることをいえば、  $(U, \Gamma)$  がフレドホルム対であることが示せる。特に、  $\|T\| < 1$  であれば、  $1 - T^2$  はフレドホルムである。この場合、  $m_{\pm} = 0$  となるので、

$$\text{ind}_{\Gamma}(U) = M_{-} - M_{+}$$

となる。

次に、(2) の (3.2) は、  $\text{ind}_{\Gamma}(U)$  を  $M_{-} - m_{-}$  と  $M_{+} - m_{+}$  の差で表す式である。ここで、  $\dim \ker(U \mp 1) = M_{\pm} + m_{\pm}$  であったことに注意されたい。当然、  $\dim \ker(U \mp 1)$  は  $\Gamma$  に依らず、  $U$  だけから決まるが、差  $M_{\pm} - m_{\pm}$  は  $\Gamma$  から決まる。実際、 [18] で

$$M_{\pm} = \dim \ker(\Gamma \pm 1) \cap \ker(C + 1), \quad m_{\pm} = \dim \ker(\Gamma \mp 1) \cap \ker(C - 1)$$

が示されていて、 $\Gamma$  が  $\dim \ker(U \mp 1)$  を  $M_{\pm}$  と  $m_{\pm}$  に分割していることがわかる。

不等式 (3.3) では、 $\text{ind}_{\Gamma}(U)$  の絶対値が、 $\dim \ker(U - 1) + \dim \ker(U + 1)$  の下限を与えている。ここで、この不等式の意味を (3) と併せて考える。いま、 $(U, \Gamma)$  と  $(U, \Gamma')$  がともにフレドホルム対で（実際は、どちらか一方がフレドホルム対であればよい）、 $U' - U$  がコンパクトであると仮定する。また、 $d := |\text{ind}_{\Gamma}(U)| > 0$  とする。このとき、 $U'$  は  $U$  のコンパクト作用素による摂動とみることができ、(3) より指数はこの摂動の下で不変なので、 $d = |\text{ind}_{\Gamma}(U')|$  である。一般に、コンパクト作用素による摂動で、真性スペクトルは不変だが、離散固有値は同じ値に留まるとは限らない。しかし、いまの場合は、 $\pm 1$  の固有空間の次元の和は  $d$  以下にはならず、 $\pm 1$  に留まるといえる（ただし、 $\pm 1$  の入れ替えは起こるかもしれない）。

また、 $d = 0$  のときは、

$$M_- + m_+ = M_+ + m_-$$

がいえるので

$$\dim \ker(U - 1) + \dim \ker(U + 1) = 2(M_- + m_+) = 2(M_+ + m_-)$$

となる。例えば、1次元スプリット・ステップ量子ウォークの場合、 $M_{\pm}$  はコンパクトな摂動の下で不変であり、空間遠方の構造だけで決定される [5]。したがって、この場合もそのような摂動の下で  $\pm 1$  の固有空間の次元の和は、 $2M_{\pm}$  以下にはならない。

以上の考察から、次のことがわかった。ユニタリ作用素  $U$  に対して、コンパクト作用素  $K$  による摂動を与え、 $U' = U + K$  とする。もし、 $U'$  がユニタリで、 $(U, \Gamma)$  と  $(U', \Gamma)$  がフレドホルム対だとすると、摂動の前後で  $\pm 1$  の固有空間の次元はある一定値より下がらない。このようにして、摂動の下で消滅することのない固有状態（トポロジカルな束縛状態）の存在が明らかになる。

以上の議論は、カイラル対称性をもつ離散時間量子ウォークのモデルには常に適用でき、そのようなモデルは超対称性をもつ。そこで、カイラル対称性をもつ離散時間量子ウォークを超対称的量子ウォーク (SUSYQW) ということにする。以下、SUSYQW の具体例として、1次元スプリット・ステップ量子ウォークを考える。

量子ウォーカーの状態のヒルベルト空間を

$$\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^2) = \left\{ \Psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^2 \mid \sum_{x \in \mathbb{Z}} \|\Psi(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 < \infty \right\}$$

とする。ここで、 $\mathbb{Z}$  の点  $x$  は量子ウォーカーの位置に対応し、 $\mathbb{C}^2$  はその内部自由度を記述する空間である。任意の  $\Psi \in \mathcal{H}$  に対して、その  $x \in \mathbb{Z}$  における値を  $\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix} \in$

$\mathbb{C}^2$  と表す.  $\mathcal{H}$  上のシフト作用素  $S$  を

$$(S\Psi)(x) = \begin{pmatrix} p_1(x)\Psi_1(x) + q(x)\Psi_2(x+1) \\ \bar{q}(x-1)\Psi_1(x-1) + p_2(x)\Psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

と定義する. ただし,  $p_j : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $j = 1, 2$ ) と  $q : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  は  $p_1(x)^2 + |q(x)|^2 = p_2(x)^2 + |q(x-1)|^2 = 1$  かつ  $q(x)(p_1(x) + p_2(x+1)) = 0$  を満たすとする. 2行2列のユニタリかつエルミートな行列の族  $\{C(x)\}_{x \in \mathbb{Z}} \subset U(2)$  に対し, 掛け算作用素

$$(C\Psi)(x) = C(x)\Psi(x)$$

でコイン作用素  $C$  を定義する. このとき, 1次元スプリット・ステップ量子ウォークの時間発展は  $\mathcal{H}$  上のユニタリ作用素

$$U = SC \quad (4.2)$$

で記述される. 容易に示されるように,  $S$  と  $C$  はユニタリかつ自己共役なので,  $\Gamma = S$  とおくと,  $U = \Gamma C$  となり,  $U$  がカイラル対称性をもつことがわかる.

いま, コイン作用素は空間遠方で収束していると仮定し,

$$C_r := \lim_{x \rightarrow +\infty} C(x), \quad C_\ell := \lim_{x \rightarrow -\infty} C(x) \quad (4.3)$$

とおく. 特に,  $C_r = C_\ell$  の場合のスペクトル・散乱理論は, [16] で調べられている. また,  $C_r \neq C_\ell$  のような非等方なコインをもつ場合は, [14, 15] で調べられている.

**Example 4.1** (2相系 [2, 3]). 2相系量子ウォークは, シフト作用素を  $\tilde{S} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L^* \end{pmatrix}$  とし, コイン作用素を

$$\tilde{C}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\sigma_+} \\ e^{-i\sigma_+} & -1 \end{pmatrix} & x \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\sigma_-} \\ e^{-i\sigma_-} & -1 \end{pmatrix} & x < -1 \end{cases}, \quad \sigma_\pm \in [0, 2\pi)$$

として, 時間発展  $\tilde{U} = \tilde{S}\tilde{C}$  を考えている. 一見すると, 上のスプリット・ステップに含まれないようにみえるが, 次のようにしてスプリット・ステップの例になっていることがわかる. まず,  $\eta(x) = \begin{pmatrix} 0 & ie^{i\sigma(x)} \\ -ie^{-i\sigma(x)} & 0 \end{pmatrix}$  とする. ただし,  $\sigma(x) = \sigma_+$  ( $x \geq 0$ ) かつ  $\sigma(x) = \sigma_-$  ( $x \leq -1$ ) とする. 次に,  $S := \tilde{S}\eta$ ,  $C := \eta\tilde{C}$  とおくと,  $\eta^2 = 1$  なので,

$\tilde{U} = SC$  と書ける. このとき,  $p_j(x) \equiv 0$  ( $j = 1, 2$ ),  $q(x) = e^{i\sigma(x)}$  とおくと, いまの場合の  $S$  が (4.1) の形になるので, ユニタリかつ自己共役である. また,  $C$  については,

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -ie^{i\sigma(x)} \\ -ie^{-i\sigma(x)} & -i \end{pmatrix}$$

となるが,  $-iC(x)$  はユニタリかつエルミートになる. 時間発展は, 絶対値 1 の複素定数倍をしたものを同一しできるので,  $U = -i\tilde{U}$  として,  $-iC$  を改めて  $C$  と書けば,  $U = \Gamma C$  はカイラル対称性をもつ. ただし,  $\Gamma = S$  である. この場合,  $U$  は  $\pm 1$  付近にスペクトルギャップをもち,  $(U, \Gamma)$  はフレドホルム対となる. 実際,  $T$  の真性スペクトルは実軸上の区間  $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$  であるから,  $\inf \sigma_{\text{ess}}(1 - T^2) > 0$  となり,  $1 - T^2$  はフレドホルムである. また,  $M_{\pm} < \infty$  は [3] で確かめられているので, 定理 3.1 (1) が使える.

**Example 4.2** (非等方的模型). (4.1) で定義されるシフト作用素  $S$  を考え,  $p_j$  ( $j = 1, 2$ ) と  $q$  は定数とする. また,  $C(x)$  はユニタリかつエルミートな行列とし, (4.3) を満たすとする. この場合の時間発展  $U = SC$  は, [5] で調べられていて,  $M_{\pm}$  が  $C_r$  と  $C_\ell$  のみから決定され,  $M_{\pm} = 0, 1$  のいずれかであることがわかっている. また,  $M_{\pm} = 1$  のときは, 対応する固有ベクトルが空間変数  $x \in \mathbb{Z}$  に関して, 指数減衰することが示されている.

いま,  $\Gamma = S$  とおいて,  $C'(x)$  はユニタリかつエルミートとすれば,  $U = \Gamma C$  と  $U' = \Gamma C'$  はカイラル対称性をもつ. また,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} C'(x) = C_r$  かつ  $\lim_{x \rightarrow -\infty} C'(x) = C_\ell$  となるようなコイン  $C'$  を考える. このとき,  $U$  の真性スペクトルは,  $C_r$  と  $C_\ell$  のみで決まるので,  $(U, \Gamma)$  がフレドホルム対であれば,  $(U', \Gamma)$  もまたフレドホルム対となる. いまの場合,  $M_{\pm} < \infty$  なので,  $(U, \Gamma)$  がフレドホルム性は,  $1 - T^2$  のフレドホルム性から従う. [6] の結果を使うと,  $T$  の真性スペクトルが, 区間

$$[pa_r - qb_r, pa_r + qb_r] \cup [pa_r - qb_\ell, pa_\ell + qb_\ell]$$

であることがわかるので, この区間が  $(-1, 1)$  に含まれることが,  $1 - T^2$  がフレドホルムになるための必要十分条件である. ただし,  $\star = r, \ell$  に対して,  $a_\star, b_\star$  はそれぞれ,  $C_\star$  の (1,1) 成分と (1,2) 成分で, 簡単のため  $p, q, a_\star, b_\star$  はすべて正とした. さらに,  $U - U'$  はコンパクトなので, 定理 3.1 (3) から,

$$\text{ind}_\Gamma(U') = \text{ind}_\Gamma(U)$$

がいえる. これらの指数が具体的にいくつになるかは, 別の機会に報告したい.

**Acknowledgements** 本研究は JSPS 科研費 18K03327 の助成を受けたものです.

## 参考文献

- [1] 新井朝雄, 量子現象の数理, 朝倉書店, 2006.
- [2] S. Endo, T. Endo, N. Konno, E. Segawa, M. Takei, Weak limit theorem of a two-phase quantum walk with one defect, *Interdiscip. Inf. Sci.* **22**, 17–29, 2016.
- [3] T. Endo, N. Konno, H. Obuse, Relation between two-phase quantum walks and the topological invariant, arXiv:1511.04230.
- [4] T. Fuda, D. Funakawa, A. Suzuki, Localization of a multi-dimensional quantum walk with one defect *Quantum Inf. Process.* **16**, 203, 2017.
- [5] T. Fuda, D. Funakawa, A. Suzuki, Localization for a one-dimensional split-step quantum walk with bound states robust against perturbations, *J. Math. Phys.* **59**, 082201, 2018.
- [6] T. Fuda, D. Funakawa, A. Suzuki, Weak limit theorem for a one-dimensional split-step quantum walk, arXiv:1804.05125.
- [7] Yu. Higuchi, E. Segawa, A. Suzuki, Spectral mapping theorem of an abstract quantum walk, arXiv:1506.06457.
- [8] T. Kitagawa, Topological phenomena in quantum walks: elementary introduction to the physics of topological phases, *Quantum Inf. Process.* **11**, 1107–1148, 2012.
- [9] T. Kitagawa, E. Berg, M. Rudner, E. Demler, Topological characterization of periodically driven quantum systems, *Phys. Rev.* **B 82**, 235114, 2010.
- [10] T. Kitagawa, M. A. Broome, A. Fedrizzi, M. S. Rudner, E. Berg, I. Kassal, A. Aspuru-Guzik, E. Demler, A. G. White, Observation of topologically protected bound states in photonic quantum walks, *Nature Commun.* **3**: 882, 2012.
- [11] T. Kitagawa, M. S. Rudner, E. Berg, E. Demler, Exploring topological phases with quantum walks, *Phys. Rev.* **A 82**: 033429, 2010.
- [12] H. Ohno, Unitary equivalent classes of one-dimensional quantum walks, *Quantum Inf. Process.*, **15**, 3599, 2016.
- [13] E. Segawa, A. Suzuki, Generator of an abstract quantum walk, *Quantum Stud.: Math. Found.* **3**, 11 – 30, 2016.
- [14] S. Richard, A. Suzuki, R. Tiedra de Aldecoa, Quantum walks with an anisotropic coin I: spectral theory, *Lett. Math. Phys.* **108**:331, 2018.
- [15] S. Richard, A. Suzuki, R. Tiedra de Aldecoa, Quantum walks with an anisotropic

- coin II: scattering theory, *Lett. Math. Phys.*, First Online: 21 May 2018.
- [16] A. Suzuki, Asymptotic velocity of a position-dependent quantum walk, *Quantum Inf. Process.* **15**, 103 – 119, 2016.
- [17] A. Suzuki, スペクトル写像を用いた量子ウォークの解析, RIMS Kôkyûroku No.2089, 2018.
- [18] A. Suzuki, Supersymmetric quantum walks with chiral symmetry, arXiv:1810.00371.
- [19] B. Thaller, The Dirac Equation, *Texts Monogr. Phys.*, Springer, Berlin, 1992.
- [20] E. Witten, Constraints on supersymmetry breaking, *Nucl. Phys. B* **202**, 253, 1982.