レベル2の多重ゼータ値について

九州大学大学院・数理学研究院　金子 昌信
Masanobu Kaneko
Faculty of Mathematics,
Kyushu University
首都大学東京大学院・理学研究科　津村 博文
Hirofumi Tsumura
Department of Mathematical Sciences,
Tokyo Metropolitan University

概 要

本稿では，レベル2の多重ゼータ値の一つである多重 T 値と呼ばれるものに関して，これらの満たす種々の関係式を紹介し, 多重 T 値の張る空間に関する考察を行う．実際，多重 T 値は，多重ゼータ値の満たす既知の性質（双対性，和公式など）と類似の性質を満たすことを紹介する．さらに既に Hoffman により研究されている，レベル2の多重ゼータ値の一つである多重 t 値との関係を調べ，いくつかの予想を提出する．

1　序

古典的な多重ゼータ値

$$\zeta(k_1,\ldots,k_r)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_r^{k_r}} \tag{1.1}$$

は, 和公式, 双対公式, それらを含むような大野関係式をはじめ，非常の多くの関係式を満たすことが知られており, それらの張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間は豊かな構造を有している. 実際, 調和積, シャッフル積と呼ばれる 2 種類の積が定義されることから, この空間は代数構造を有することがわかり, このことから (正規化) 複シャッフル関係式という広いクラスの関係式族が与えられる. この考察から, とくに多重ゼータ値の重み (インデックスの総和) ごとに, それらの値で張られる部分空間の次元に関して，本研究分野で最も重要とされる明示的な予想が, Zagier によって提起されている (§2 を参照).

この観点から, (1.1) の一般化として, **オイラー和** (あるいは交代的多重ゼータ値) が

$$\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{(\pm1)^{m_1}(\pm1)^{m_2}\cdots(\pm1)^{m_r}}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_r^{k_r}} \tag{1.2}$$

によって定義されて, それらの張る空間の構造も考察されている. この空間においても上述の 2 つの積が定義され, 複シャッフル関係式が成り立ち, 重みごとに定義される部分空間の次元予想が得られている (§2 を参照).

これに関連して Hoffman [6] は, (1.1) の部分級数である

$$t(k_1,\ldots,k_r)=\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\ \forall m_i:\,\mathrm{odd}}}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_r^{k_r}} \tag{1.3}$$

によって**多重 t 値**を定義した. この級数 (1.3) はオイラー和の有限和であらわされるため, これらの張る空間は, オイラー和の張る空間に含まれている. とくに二重 t 値については，田坂と第一著者の研究 [9] によって，レベル 2 の保型形式との関係が考察されて，既知の結果 [5] の拡張が得られている. このことより, (1.3) のようなオイラー和の有限和としてあらわされる多重級数は**レベル 2 の多重ゼータ値**と呼ばれている.

本稿ではレベル 2 の多重ゼータ値の一つとみられる

$$\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\ m_i\equiv i \bmod 2}}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_r^{k_r}}$$

に焦点をあてる. この値は佐々木 [16] によって, Arakawa-Kaneko L-関数の構成に関連して, 既に本質的な定義がなされているが, ここではさらに正規化因子 2^r をかける形で,

$$T(k_1,k_2,\ldots,k_r):=2^r\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\ m_i\equiv i \bmod 2}}\frac{1}{m_1^{k_1}m_2^{k_2}\cdots m_r^{k_r}} \tag{1.4}$$

によって **多重 T 値** (Multiple T-value, 略して MTV) を定義し, その諸性質を考察する. これは Hoffman の多重 t 値のカウンターパートとみることができる. とくに多重 T 値は多重ゼータ値と同様の反復積分表示を持つことから, 双対公式をもつなど, 多くの関係式を満たすことにより, これらの張る空間の次元はより低いものであることが予想される.

本稿では，まず多重 T 値の反復積分表示を利用して，多重ゼータ値と全く同じ形の双対関係式を証明する. さらに荒川と第一著者 [2] によって定義された Arakawa-Kaneko ゼータ関数 ξ の類似として, 多重 T 値に関連するゼータ関数 ψ を定義し ([11] 参照), その解析的考察から，いわゆる重み付き和公式のレベル 2 版やその三重化類似を紹介する. さらには多重ゼータ値について良く知られている parity result のレベル 2 類似とみられる性質などについても紹介する. 最後に多重 T 値によって張られる空間に関する予想を与え，Hoffman の多重 t 値を用いた, 多重ゼータ値の張る空間の基底に関する予想も与える.

本報告の詳細については，[11, 12] を参照してほしい. 今回の数理研研究集会の講演では, まず ψ の性質を調べることで, [2] でなされた考察とほぼ平行な議論を行い, 多重 T 値の満たす関係式について報告した. これらについては, [11, §5] で詳細を述べている. またポリベルヌーイ数のレベル 2 類似として, ポリコセカント数の性質についても報告したが, 本稿では割愛している. その詳細に関しては現在準備中の論文 [8] を参照してほしい. また §5 において紹介するいくつかの予想は, 講演時にはあまりまだ明確な形で捉えられていなかったものであるが, その後の第一著者の数値実験による考察に基づいて提案されたもので, 多重 T 値の張る空間の次元予想とも関係して重要なものと考えられる.

2　多重 T 値の性質とそれらの張る空間

多重ゼータ値 $\zeta(k_1,\ldots,k_r)$ について，r をその深さ, $k_1+\cdots+k_r$ をその重みと呼ぶ. 多重ゼータ値全体の張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{Z}$ とかき, 重みが k であるものの張る部分空間を $\mathcal{Z}_k$ とかく. 形式的に $\mathcal{Z}_0=\mathbb{Q}$, $\mathcal{Z}_1=\{0\}$ として, $\mathcal{Z}_k$ の次元を d_k とかく. このとき次の予想が与えられている.

予想 2.1 (Zagier [20])**.** 数列 $\{d_k\}$ は漸化式

$$d_k=d_{k-2}+d_{k-3} \quad (\text{ただし } d_0=1,\ d_1=0,\ d_2=1)$$

を満たす.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28

この類似として, 多重 T 値の作る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を以下のように定義する:

$$\mathcal{T}^{ш}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{T}_k^{ш},$$

ただし

$$\mathcal{T}_0^{ш}=\mathbb{Q},\quad \mathcal{T}_1^{ш}=\{0\},\quad \mathcal{T}_k^{ш}=\sum_{\substack{1\le r\le k-1\\ k_1,\ldots,k_{r-1}\ge1,\ k_r\ge2\\ k_1+\cdots+k_r=k}}\mathbb{Q}\cdot T(k_1,\ldots,k_r)\quad (k\ge2).$$

このとき $\mathcal{T}^{ш}$ には次のような考察から **シャッフル積** が定義されるため, $\mathbb{Q}$-代数となることがわかる. 実際, 多重 T 値は次のような, 多重ゼータ値とよく似た反復積分表示を持つ. 与えられた k 個の組 $\varepsilon_i\in\{0,1\}$ $(1\le i\le k)$ でとくに $\varepsilon_1=1$, $\varepsilon_k=0$ となるものに対し

$$I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)=\int\cdots\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\Omega_{\varepsilon_1}(t_1)\cdots\Omega_{\varepsilon_k}(t_k),$$

ただし

$$\Omega_0(t)=\frac{dt}{t},\quad \Omega_1(t)=\frac{2\,dt}{1-t^2}$$

とおく. ここでインデックス $\mathbf{k}=(k_1,k_2,\ldots,k_r)\in\mathbb{N}^r$ は $k_r\ge2$ であるとき **admissible** と呼ぶ.

定理 2.2. 任意の *admissible* なインデックス $(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ に対し,

$$T(k_1,k_2,\ldots,k_r)=I(1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_1-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_2-1},\cdots,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_r-1}) \tag{2.1}$$

が成り立つ.

この積分表示によって, 多重ゼータ値と全く同様に多重 T 値にもシャッフル積が定義されて, 次のような類似のシャッフル関係式が成り立つことがわかる:

$$T(2)^2 = 4T(1,3) + 2T(2,2) \quad と \quad \zeta(2)^2 = 4\zeta(1,3) + 2\zeta(2,2).$$

またこの積分表示によって, 多重ゼータ値と同じ形の **双対公式** が成り立つことがわかる. 詳細については次節で述べる. そこで $\mathcal{T}_k^{ш}$ の次元を d_k^T とかくとき, この数列 $\{d_k^T\}$ はどのようにふるまうのだろうか？実際, Pari-GP による数値計算によれば次のような予想次元のテーブルが与えられる:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_k^T	1	0	1	1	2	2	4	5	9	10	19	23	42	49	91	110

興味深いのは, **偶数の** k に対してのみ, Fibonacci 数列とよく似た

$$d_k^T = d_{k-1}^T + d_{k-2}^T$$

という関係がみてとれる. しかしながら, 一般の d_k^T を決めるような漸化式などは今のところ得られていない[1].

ここで**オイラー和** (1.2) によって張られる空間を考えると, 重みが k となるものによって張られる部分空間の次元は, フィボナッチ数 F_k となることが予想されている. さらに Hoffman [6] によって, (1.3) で定義される, 重みが k の多重 t-値の張る空間の次元 d_k^t は F_{k-1} と予想されている ($k \geq 2$).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
d_k^t	1	0	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
F_k	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

これらの空間の関係については, §5 でもう少し考察を深める.

3　多重 T 値の満たす関係式

本節では, 多重 T 値の満たす関係式について述べる. そのいくつかは多重ゼータ値の満たす関係式の類似と見られるが, 多重ゼータ値には対応する関係式がないと思われるものも見受けられる.

[1] 別の講演の折, ある種のパターンを指摘して下さった方々がおられたが, これだけのデータではそのパターンが先まで続きそうか, 判断がつきかねた.

3.1 双対公式

admissible インデックス $\mathbf{k}$ に対し, その**双対インデックス**を $\mathbf{k}^\dagger$ とかく. 定義の詳細は例えば [21] を参照.

定理 3.1. *admissible* インデックス $\mathbf{k}$ に対し,

$$T(\mathbf{k}^\dagger) = T(\mathbf{k}) \tag{3.1}$$

が成り立つ.

Proof. 対合による変数変換 $t \to (1-t)/(1+t)$ によって 2 つの微分形式 $\Omega_0(t)$, $\Omega_1(t)$ は入れ替わり, また区間 $(0,1)$ はそれ自身に移る. 多重 T 値の反復積分表示 (2.1) における変数変換

$$s_i = \frac{1-t_{k-i+1}}{1+t_{k-i+1}} \quad (1 \le i \le k)$$

によって, 次の関係式が得られる:

$$I(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) = I(1-\varepsilon_k, \dots, 1-\varepsilon_1).$$

これは多重 T 値の双対公式を意味していることがわかる. □

例えば, Euler による $\zeta(1,2) = \zeta(3)$ に対応して, $T(1,2) = T(3)$ が成り立つ.

3.2 和公式

多重ゼータ値に関しては, 様々なタイプの和公式と呼ばれる公式が知られている ([21, Chapter 5] を参照). 他方, 多重 T 値に関しては, 古典的な和公式に対応するものは存在しないことが数値実験によって確かめられる. 実際, 重みが 4 の場合で既に

$$T(1,3) + T(2,2) = \frac{3}{2}T(4) - T(1,3)$$

となるが, 数値的に $T(4)$ と $T(1,3)$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立とみられることから (§6 参照) この右辺は $T(4)$ の定数倍で書けないことがわかる.

他方, 深さが 2, 3 の場合については, 次のような和公式の類似が成り立つ.

定理 3.2 ([12] Theorem 3.2)**.** $k \in \mathbb{Z}_{\ge 3}$ に対し,

$$\sum_{j=2}^{k-1} 2^{j-1} T(k-j, j) = (k-1)T(k) \tag{3.2}$$

が成り立つ.

これは大野と Zudilin [15] によって与えられた, 二重ゼータ値の**重み付き和公式**と呼ばれる関係式

$$\sum_{j=2}^{k-1} 2^{j-1}\zeta(k-j,j) = \frac{k+1}{2}\zeta(k) \quad (k \geq 3)$$

のレベル 2 類似と見られる. 注として (3.2) は, 最近 Bachmann [3] によって得られた一般二重ゼータ値の満たす関係式からも導くことができる.

定理 3.3 ([10] Theorem 3.3)**.** *$k \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$ に対し,*

$$\sum_{\substack{a+b+c=k \\ a,b\geq 1, c\geq 2}} T(a,b,c) + \sum_{j=2}^{k-2} T(1,k-1-j,j) = \frac{2}{3}T(2)T(k-2) \tag{3.3}$$

が成り立つ.

注意 3.4. この関係式 (3.3) は, その類似となるべき多重ゼータ値の関係式が存在しないと思われる. 実際, 多重ゼータ値の場合, (3.3) の左辺の第 1 項にあたる部分は, 和公式から $\zeta(k)$ と一致するため, 左辺の第 2 項にあたる部分がリーマンゼータ値だけであらわせるかどうかが問題となるが, 例えば重み $k=8$ の場合, 既知の結果から

$$\sum_{j=2}^{6} \zeta(1,7-j,j) = \frac{5}{4}\zeta(8) - \zeta(3)\zeta(5) + \zeta(2,6)$$

となることから, この値がリーマンゼータ値だけではあらわせないと思われる.

さらに深さが 3 の場合, 数値実験により, 町出による三重ゼータ値の重み付き和公式 [13, Corollary 4.1] の類似として, 次の公式が成り立つことが予想できる.

予想 3.5. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$ に対し,

$$\sum_{\substack{a+b+c=k \\ a,b\geq 1, c\geq 2}} 2^b(3^{c-1}-1)T(a,b,c) = \frac{2}{3}(k-1)(k-2)T(k). \tag{3.4}$$

深さが 4 以上の場合も, (3.2) や (3.4) のような, 何かしらの重み付き和公式を導出できるかは興味深い問題である.

3.3 Parity result

多重ゼータ値では **parity result** と呼ばれる性質が知られているが ([7, 17] 参照), 多重 T 値に関しても同様の性質が成り立つ.

定理 3.6 ([12] Theorem 3.4)**.** *admissible インデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_r)$ について, その深さ r と重さ $k_1+\cdots+k_r$ の parity が異なるとき, $T(\mathbf{k})$ は, それよりも低い深さの T 値たちの積の $\mathbb{Q}$-係数の線形結合としてあらわされる.*

この結果は本質的に, 第二著者 [18] によって証明されているが, その証明は導手が 4 の多重 L 値を経由しているために, 明示された形では書かれていない. この部分に関しては, その証明を明示するような論文 [19] を準備中である.

例 3.7. 深さが 2 の場合, 次のような明示式が得られる. $p \geq 1$, $q \geq 2$ で $p+q$ が奇数となるとき,

$$
\begin{aligned}
(-1)^q T(p,q) = & \binom{p+q-1}{q} T(p+q) \\
& - \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \equiv q \bmod 2}}^{q-2} \binom{p+\mu-1}{\mu} \frac{1}{2^{q-\mu}-1} T(p+\mu) T(q-\mu) \\
& - \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \equiv p \bmod 2}}^{p-2} \binom{q+\mu-1}{\mu} T(p-\mu) T(q+\mu)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

が成り立つ. さらに深さが 3 の場合について, §5 で考察する.

3.4 高さが 1 の多重 T 値

高さが 1 の多重ゼータ値の生成関数として, ガンマ関数を用いた次のような結果が知られている:

$$
1 - \sum_{m,n=1}^{\infty} \zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}, m+1) X^m Y^n = \frac{\Gamma(1-X)\Gamma(1-Y)}{\Gamma(1-X-Y)} \tag{3.6}
$$

([1, 4, 14] などを参照).

このレベル 2 類似として, 高さが 1 の多重 T 値の生成関数が次のようにして与えられる.

定理 3.8 ([12] Theorem 3.5)**.** $|X| < 1, -1 < Y < 0$ であるとき

$$
\begin{aligned}
1 - & \sum_{m,n=1}^{\infty} T(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}, m+1) X^m Y^n \\
& = \frac{2\,\Gamma(1-X)\Gamma(1-Y)}{\Gamma(1-X-Y)} F(1-X, 1-Y; 1-X-Y; -1)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ここで $F(a,b;c;z)$ は *Gauss* の超幾何関数である.

注意 3.9. 上記 (3.6) の右辺は

$$
\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \zeta(n) \frac{X^n + Y^n - (X+Y)^n}{n} \right)
$$

とあらわせるため, 高さが 1 の多重ゼータ値は, リーマンゼータ値の $\mathbb{Q}$ 係数多項式としてあらわせることがわかる. 他方, $F(1-X,1-Y;1-X-Y;-1)$ の性質がよくわからないため, 高さが 1 の多重 T 値がどのような値で記述できるかはよくわかっていない. 実際, 重みが 4 のときに, $T(4)$ と $T(1,3)$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立とみられることから (§6 参照), 高さが 1 の多重ゼータ値と同様の性質が成り立つことは期待できない.

4　多重 T 値と関連するゼータ関数

荒川と第一著者 [2] によって, 多重ゼータ値と多重ポリベルヌーイ数を結びつけるゼータ関数

$$\xi(k_1,\dots,k_r;s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(1-e^{-t})}{e^t-1}\,dt \quad (\Re s>0)$$

が定義された. ここで $k_1,\dots,k_r\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ であり,

$$\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(z)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

は多重ポリログ関数である. このレベル 2 版として, 次のようなゼータ関数が定義される ([11, Definition 7]).

$$\psi(k_1,\dots,k_r;s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{A(k_1,\dots,k_r;\tanh(t/2))}{\sinh(t)}\,dt. \tag{4.1}$$

ただし $A(k_1,\dots,k_r;z)$ は

$$A(k_1,\dots,k_r;z)=2^r\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\ m_i\equiv i \bmod 2}}\frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

で定義される多重ポリログ関数の部分級数である. とくに $r=1$, $k=1$ のときは

$$A(1;z)=2\tanh^{-1}z=2\sum_{n=0}^\infty\frac{z^{2n+1}}{2n+1}=2\mathrm{Li}_1(z)-\mathrm{Li}_1(z^2)$$

となるので $A(1;\tanh(t/2))=t$ となる. $\psi(k_1,\dots,k_r;s)$ の性質の詳細については [11, Section 5] を参照. とくに, 前述の二重 T 値の重み付き和公式 (定理 3.2) の証明で必要となる結果を以下で述べておく. [11, Theorems 5.3, 5.5] から,

$$\begin{aligned}\psi(\underbrace{1,\dots,1}_{k-3},2;s)=&-\sum_{j=2}^{k-1}\binom{s+j-2}{j-1}T(k-j,j-1+s)\\ &-T(k-1,s)+T(k-1)T(s),\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\psi(\underbrace{1,\ldots,1}_{k-3},2;1)=T(1,k-1) \tag{4.3}$$

が得られる．このとき $\psi(\underbrace{1,\ldots,1}_{k-3},2;s)$ は全平面で正則であるので，とくに $s=1$ でも正則となる．他方，(4.2) の右辺において，$T(k-j,j-1+s)$ は $s=1$ で正則なので，残りの $-T(k-1,s)+T(k-1)T(s)$ もそうでなくてはならない．そこで $-T(k-1,s)+T(k-1)T(s)$ の $s=1$ での値を求めるために，いわゆる**調和積**

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}T(k-1)\cdot 2^{-s}\zeta(s)\\
&=\sum_{\substack{m=1\\ m:\text{odd}}}\frac{1}{m^{k-1}}\sum_{\substack{n=2\\ n:\text{even}}}\frac{1}{n^s}=\sum_{\substack{0<m<n\\ m:\text{odd},\,n:\text{even}}}\frac{1}{m^{k-1}n^s}+\sum_{\substack{0<n<m\\ n:\text{even},\,m:\text{odd}}}\frac{1}{n^s m^{k-1}}\\
&=\frac{1}{4}T(k-1,s)+\zeta^{eo}(s,k-1)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

を考える．ここで $\zeta^{eo}(s,k-1)$ は (4.4) の右辺の最後の項をあらわす．$\zeta^{eo}(1,k-1)$ を Riemann zeta 値，つまり T-値で書き表すことができるので，これらより二重 T 値の重み付き和公式が得られる．

5 多重 T 値，多重 t 値と多重ゼータ値との関係

Hoffman の多重 t 値全体の張る $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を $\mathcal{T}^*$ とかくとき，これらの元は調和積によって閉じることが，(1.3) からすぐにわかるので，$\mathcal{T}^*$ は $\mathbb{Q}$-代数となる．これらの $\mathbb{Q}$-代数 $\mathcal{T}^{ш}$ と $\mathcal{T}^*$ はオイラー和全体の張る $\mathbb{Q}$-代数の部分代数となるが，それぞれの積はシャッフル積と調和積に関する部分代数となる．実際，オイラー和の張る $\mathbb{Q}$-代数は両方の積に関して閉じている．

以下の数値的考察から，$\mathcal{T}^{ш}+\mathcal{T}^*$ はオイラー和の張る $\mathbb{Q}$-代数までは届かず，また $\mathcal{T}^{ш}$ が $\mathcal{T}^*$ に含まれることもないように思われる．(テーブルの数値はあくまで実験的なもの.)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\dim(\mathcal{T}^{ш}_k+\mathcal{T}^*_k)$	1	0	1	2	4	5	9	14	24
$\dim(\mathcal{T}^{ш}_k\cap\mathcal{T}^*_k)$	1	0	1	1	1	2	3	4	6

§2 で述べたように，$d^t_k=F_{k-1}$ が予想されているが，$d^T_k\geq d_k$ かつ $F_{k-1}\geq d_k$ がテーブルから読み取れる．重さ 12 までの数値実験からも，$\mathcal{T}^{ш}$ と $\mathcal{T}^*$ は $\mathcal{Z}$ を含んでいると予想される．

予想 5.1. $\mathcal{T}^{ш}$ と $\mathcal{T}^*$ は $\mathcal{Z}$ を $\mathbb{Q}$-部分代数として含む．

さらに上のテーブルから $\mathcal{T}^{\text{ш}} \cap \mathcal{T}^{*}$ は真に $\mathcal{Z}$ を含んでいると思われる. もしこの予想が正しければ, $\mathcal{T}^{\text{ш}}$ と $\mathcal{T}^{*}$ はともに $\mathcal{Z}$ 上の加群となるが, その構造を調べることは興味深い問題と言える.

深さが 1 の場合, T-値 $T(k)$ と t-値 $t(k)$ はともに Riemann ゼータ値 $\zeta(k)$ の有理数倍なので, $\mathcal{Z}$ に属する. さらに parity result (Theorem 3.6) より, 重さが奇数の二重 T 値も $\mathcal{Z}$ に属する. より高い深さの場合, 次のような予想を提出できる. 注として多重 T 値は双対公式が成り立つので, 考察においては, 重さの半分の深さまで調べればよいことがわかる.

予想 5.2. 1) *重さが偶数となる多重 T 値について, $T(k)$ を除けば, 三重 T 値 $T(p,q,r)$ で p,r : $odd \geq 3$, q : $even$ となるもの(とその双対インデックス)のみが $\mathcal{Z}$ に属する.*

2) *重さが奇数となる多重 T 値について, $T(k)$ と二重 T-値を除くと, 三重 T 値 $T(p,1,r)$ で p,r : $even$ となるもの(とその双対インデックス)のみが $\mathcal{Z}$ に属する.*

ここで parity result より, 重さが偶数の三重 T 値 $T(p,q,r)$ は $T(k)$ と二重 T-値でかきあらわせる. 具体的に三重 T 値を書き下してみると ([19] 参照), 上の予想は次のようにかける.

予想 5.3. *$m, p \in\in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ で $m+p+q$ が偶数となるとき,*

$$\sum_{\substack{i+j=m \\ i,j\geq 0}} \binom{p+i-1}{i}\binom{q+j-1}{j} T(p+i, q+j) \in \mathcal{Z}.$$

例えば $m=1$ のときは, $qT(p,q+1)+pT(p+1,q) \in \mathcal{Z}$ を示唆している.

注意 5.4. 予想 5.3 の和の値を $s(p,q,m)$ とかくとき, $T(2p+1,2q,2r+1)$ は次のようにかける:

$$\begin{aligned} T(2p+1,2q,2r+1) = &-\sum_{j=0}^{p-1} T(2p-2j)s(2q-1,2r+1,2j+1) \\ &-\sum_{j=0}^{r-1} T(2r-2j)s(2q,2j+2,2p) \\ &+ \text{sum of products of single } T(n)\text{'s}. \end{aligned}$$

他方, Hoffman の多重 t 値については, 数値実験によって

$$t(k_1,\ldots,k_r) \in \mathcal{Z} \quad (\forall k_i \geq 2)$$

が予想され, この中から, $\mathcal{Z}$ の代数基底として, 次のようなものを選ぶことができると予想される.

予想 5.5. 1) 重さが k の多重ゼータ値の張る空間の線形基底は次のように与えられる:

$$\{t(2)^n t(k_1,\dots,k_r) \mid n,r\geq 0, \forall k_i : odd \geq 3,\ 2n+k_1+\cdots+k_r=k\}.$$

2) $\mathcal{Z}$ の代数基底は, $t(2)$ と $t(k_1,\dots,k_r)$（ただし $\forall k_i : odd \geq 3$ で $(k_1,\dots,k_r)$ が *Lyndon* となるもの）で与えられる.

ここで $(k_1,\dots,k_r)$ が Lyndon であるとは, 全ての（右側の）部分インデックス $(k_i,\dots,k_r)$ $(i\geq 2)$ が $(k_1,\dots,k_r)$ よりも辞書式順序で大きい場合をいう.

6 $\mathcal{T}_k^{ш}$ の構造：重さ k が小さな場合

この節では, k が小さな場合の $\mathcal{T}_k^{ш}$ の構造を調べる.

$k=2$ のときは明らかに, $\mathcal{T}_2^{ш}=\mathbb{Q}\cdot T(2)$ となり次元は 1 である.

$k=3$ のときは, 双対公式 (3.1) により,

$$\mathcal{T}_3^{ш}=\mathbb{Q}\cdot T(3)+\mathbb{Q}\cdot T(1,2)=\mathbb{Q}\cdot T(3)$$

となり, 次元は 1 である.

$k=4$ のときは, 双対公式から $T(1,1,2)=T(4)$ が得られ, 重み付き和公式 (3.2) により $T(2,2)=\frac{1}{2}T(4)-2T(1,3)$ となる. 以上から

$$\mathcal{T}_4^{ш}=\mathbb{Q}\cdot T(4)+\mathbb{Q}\cdot T(1,3)$$

で次元は 2 以下となり, 我々の次元予想 (§2 を参照) は 2 次元で, これらが $\mathcal{T}_4^{ш}$ の基底とみなせる.

$k=5$ のとき, $\mathcal{T}_5^{ш}$ の予想次元は 2 である. 実際, 双対公式を考えれば, $\mathcal{T}_5^{ш}$ は $T(5)$ に加えて, 深さが 2 の二重 T 値によって張られるはずである. (3.2) に加えて, (3.3) に双対公式とシャッフル積を適用すれば

$$\begin{aligned}
&4T(1,4)+2T(2,3)+T(3,2)=2T(5),\\
&2T(1,4)+2T(2,3)+T(3,2)=4T(1,4)+2T(2,3)+\frac{2}{3}T(3,2)
\end{aligned}$$

を得るので

$$T(3,2)=6T(1,4) \quad \text{および} \quad T(2,3)=T(5)-5T(1,4)$$

が得られる. これより

$$\mathcal{T}_5^{ш}=\mathbb{Q}\cdot T(5)+\mathbb{Q}\cdot T(1,4)$$

であることがわかり, これらが $\mathcal{T}_5^{ш}$ の基底とみなせる.

次に $k=6$ の場合を考える．$\mathcal{T}_6^{ш}$ の予想次元は 4 である．ところが, 既に我々の証明している関係式だけでは, $\mathcal{T}_6^{ш}$ を 4 つの元で張ることができない．実際, 定理 3.1 から定理 3.6 までの関係式にシャッフル積と双対公式を適用することで

$$
\begin{aligned}
T(1,2,3) &= -\frac{25}{12}T(6)+12T(1,5)+6T(2,4)+2T(3,3)-2T(1,1,4),\\
T(1,3,2) &= \frac{55}{12}T(6)-24T(1,5)-12T(2,4)-4T(3,3)-T(1,1,4),\\
T(2,1,3) &= \frac{55}{12}T(6)-24T(1,5)-12T(2,4)-4T(3,3)-T(1,1,4),\\
T(2,2,2) &= -\frac{35}{4}T(6)+48T(1,5)+24T(2,4)+8T(3,3)+6T(1,1,4),\\
T(3,1,2) &= \frac{5}{6}T(6)-T(1,1,4),\\
T(4,2) &= \frac{5}{2}T(6)-8T(1,5)-4T(2,4)-2T(3,3)
\end{aligned}
$$

が得られるが, これだけでは $\mathcal{T}_6^{ш}$ の生成元が 5 つ必要となる．さらに予想 5.3 を仮定すると, 重さが 6 の多重ゼータ値の張る空間は 2 次元で, $\zeta(6)=\frac{32}{63}T(6)$ と $\zeta(3)^2=\frac{16}{49}T(3)^2$ によって張られるので, 新しい関係式として

$$
\begin{aligned}
3T(2,4)+2T(3,3) &= -\frac{15}{7}T(6)+\frac{10}{7}T(3)^2\\
&= -\frac{15}{7}T(6)+\frac{120}{7}T(1,5)+\frac{60}{7}T(2,4)+\frac{20}{7}T(3,3)
\end{aligned}
$$

が成り立つことが数値実験によって確かめられる．これにより

$$
\mathcal{T}_6^{ш}=\mathbb{Q}\cdot T(6)+\mathbb{Q}\cdot T(1,5)+\mathbb{Q}\cdot T(2,4)+\mathbb{Q}\cdot T(1,1,4)
$$

となることがわかる．

同様にして, $k=7$ の場合も, 予想 3.5 を仮定することにより, $\mathcal{T}_7^{ш}$ の次元が高々 5 であることがわかる．

k が 8 以上の場合については, 現時点では予想次元を確認することができていない．今後, 多重 T 値の新たな関係式族が見つかることを期待したい．

謝辞. 本研究は, JSPS 科研費 基盤研究（S) 16H06336 (金子), 基盤研究（C) 18K03218 (津村) の助成を受けたものです.

参考文献

[1] K. Aomoto, Special values of hyperlogarithms and linear difference schemes, Illinois J. of Math., **34-2** (1990), 191–216.

[2] T. Arakawa and M. Kaneko, Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions, Nagoya Math. J., **153** (1999), 189–209.

[3] H. Bachmann, Modular forms and q-analogues of modified double zeta values, arXiv:1808.09674.

[4] V. G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. **2** (1991), 829–860.

[5] H. Gangle, M. Kaneko, D. Zagier, Double zeta values and modular forms, in '*Automorphic forms and Zeta functions*', Proceedings of the conference in memory of Tsuneo Arakawa, World Scientific, (2006), 71–106.

[6] M. Hoffman, An odd variant of multiple zeta values, preprint, arXiv: 1612.05232.

[7] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, Compositio Math., **142** (2006), 307–338.

[8] M. Kaneko, P. Maneka and H. Tsumura, On poly-cosecant numbers, in preparation.

[9] M. Kaneko and K. Tasaka, Double zeta values, double Eisenstein series, and modular forms of level 2, Math. Ann. **357** (2013), 1091–1118.

[10] M. Kaneko and H. Tsumura, Multi-poly-Bernoulli numbers and related zeta functions, Nagoya Math. J., **232** (2018), 19–54.

[11] M. Kaneko and H. Tsumura, Zeta functions connecting multiple zeta values and poly-Bernoulli numbers, preprint, to appear in Adv. Stud. Pure Math. (arXiv:1811.07736).

[12] M. Kaneko and H. Tsumura, On a variant of multiple zeta values of level two, preprint (arXiv:1903.03747).

[13] T. Machide, Extended double shuffle relations and generating function of triple zeta values of any fixed weight, Kyushu J. Math. **67** (2013), 281–307.

[14] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, Indag. Math.,**12** (2001), 483-487.

[15] Y. Ohno and W. Zudilin, Zeta stars, Commun. Number Theory Phys. **2** (2008), 325–347.

[16] Y. Sasaki, On generalized poly-Bernoulli numbers and related L-functions, J. Number Theory, **132** (2012), 156–170.

[17] H. Tsumura, Combinatorial relations for Euler-Zagier sums, Acta Arith. **111** (2004), 27–42.

[18] H. Tsumura, On the parity conjecture for multiple L-values of conductor four. Tokyo J. Math. **30** (2007), 21–40.

[19] H. Tsumura, A note on the parity result for multiple T-values, in preparation.

[20] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications, in ECM volume, Progress in Math., **120** (1994), 497–512.

[21] J. Zhao, *Multiple zeta functions, multiple polylogarithms and their special values*, Series on Number Theory and its Applications, **12**, World Scientific, 2016.

金子昌信: 福岡県福岡市西区元岡 744, 九州大学数理学研究院
email: mkaneko@math.kyushu-u.ac.jp

津村博文: 東京都八王子市南大沢 1-1, 首都大学東京理学研究科数理科学専攻
email: tsumura@tmu.ac.jp