Hurwitz ゼータ関数の値分布とそれに関連する密度関数

東京工業大学理学院数学系　峰 正博

Masahiro Mine
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

1　序・Bohr–Jessen の極限定理

ゼータ関数の値分布の研究は，現代の解析的整数論におけるトピックの一つである．その基盤となっているとも言える定理が，次に述べる Bohr–Jessen の極限定理である．Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ に対して，関数 $\log\zeta(s)$ を以下のように定義する．複素変数 $s=\sigma+it$ に対して，まず $\sigma>1$ のとき，

$$\log\zeta(s)=\sum_{p\,:\,\text{素数}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}p^{-s} \tag{1.1}$$

と定める．右辺の級数は $\sigma>1$ において絶対収束し，それゆえ関数 $\log\zeta(s)$ はこの領域において正則である．次に $1/2<\sigma\leq 1$ において，(1.1) を虚部が一定の線分に沿って解析接続することにより $\log\zeta(s)$ を定義する．したがって $\log\zeta(s)$ は単連結領域

$$G=\{\sigma+it \mid \sigma>1/2\}\setminus\bigcup_{\substack{\rho=\beta+i\gamma\\ \zeta(\rho)=0,\ \beta>1/2}}\{\sigma+i\gamma \mid 1/2<\sigma\leq\beta\}$$

における正則関数として定義される．（Riemann 予想の下では，$G=\{\sigma+it \mid \sigma>1/2\}$ である．）

以下，本稿を通して R を長方形 $\{x+iy\in\mathbb{C} \mid a\leq x\leq b,\ c\leq y\leq d\}$，$\mu_d$ を d 次元 Lebesgue 測度，$|dz|=(2\pi)^{-1}dxdy$ とする．

定理 1 (Bohr–Jessen の極限定理 [2])．実数 $\sigma>1/2$，$T>0$ に対して，

$$P_{\sigma,T}(R)=\frac{1}{T}\mu_1\{t\in[0,T] \mid \log\zeta(\sigma+it)\in R\}$$

と定める．このとき以下が成り立つ．

(1) 実数 $\sigma>1/2$ を固定する．このとき極限値

$$P_\sigma(R)=\lim_{T\to\infty}P_{\sigma,T}(R) \tag{1.2}$$

が存在する．

(2) さらに，次を満たす連続関数 $M_\sigma:\mathbb{C}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在する：

$$P_\sigma(R)=\int_R M_\sigma(z)|dz|.$$

現代の確率論の言葉を用いるなら，主張 (1)，(2) は確率測度 $P_{\sigma,T}$ が $T\to\infty$ のとき，ある確率測度 P_σ に弱収束し，さらに P_σ が Lebesgue 測度 μ_2 について絶対連続である，という形で述べることもできる．（正確にはこの場合には R はより一般的に，$\mu_2(\partial R)=0$ を満たす任意の Borel 集合としてとることができる．）

極限 (1.2) の収束する速度についての結果は，松本耕二氏により初めて与えられた．ここでは松本氏と G. Harman 氏による結果 [6] を引用する．

定理 2. 実数 $\sigma > 1/2$ を固定する．このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$P_{\sigma,T}(R) = P_\sigma(R) + O\left((\mu_2(R)+1)(\log T)^{-A(\sigma)+\epsilon}\right)$$

が十分大きい $T > 0$ に対して成立する．ただし

$$A(\sigma) = \begin{cases} (\sigma-1)/(3+2\sigma) & \sigma > 1 \text{ のとき}, \\ (4\sigma-2)/(21+8\sigma) & 1/2 < \sigma \leq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

とする．また implied constant は σ と ϵ のみに依存する．

本稿は筆者による [10] の概説であり，Hurwitz ゼータ関数

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)^{-s} \tag{1.3}$$

について定理 1，定理 2 の類似を考えたときに生じる相違点について解説することを目的とする．具体的には，定理 1 の類似を得るには α を超越数とし，定理 2 の類似を得るには α をさらに S-number という対象とするという [10, Theorem 1.3] の仮定について解説する．とくに，後者の仮定はこれまでの Hurwitz ゼータ関数の値分布論には見られなかったものであり，この機会にそこに焦点を当てた論説を書こうと思った次第である．なお，[10] での諸結果の主張は，より一般に Lerch ゼータ関数

$$L(\lambda,\alpha,s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i\lambda n}(n+\alpha)^{-s}$$

について述べられている．Lerch ゼータ関数に一般化しても極限測度やその密度関数は λ に依存しないという非自明な性質があるなど，一般化する意義がないわけではないのだが，本稿の目的を鑑みて，以下では Hurwitz ゼータ関数のみを考察の対象とする．いずれにせよ本稿で解説するのは証明の一部分なので，詳細については [10] をご覧いただきたい．また Bohr–Jessen の極限定理の (2) における関数 $M_\sigma(z)$ は，伊原康隆氏によって命名された「M 関数」と呼ばれる関数の最古の例である．本稿では Hurwitz ゼータ関数の M 関数を扱うが，現在では様々なゼータ関数，L 関数の値分布に対して M 関数が構成され，研究が進められている．これらについては松本耕二氏による概説論文 [9] を参照されたい．

2 Hurwitz ゼータ関数の値分布

以下，本稿を通して $0 < \alpha \leq 1$ とする．Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s,\alpha)$ は $\sigma > 1$ において絶対収束する級数 (1.3) により定義され，また全平面に有理型に解析接続される．定理 1 の類似は以下の通りである．

定理 3. 実数 $\sigma > 1/2$，$T > 0$ に対して，

$$P_{\sigma,T}(R;\alpha) = \frac{1}{T}\mu_1\{t \in [0,T] \mid \zeta(\sigma+it,\alpha) \in R\}$$

と定める．また α を超越数と仮定する．このとき以下が成り立つ．

(1) 実数 $\sigma > 1/2$ を固定する．このとき極限値

$$P_\sigma(R;\alpha) = \lim_{T\to\infty} P_{\sigma,T}(R;\alpha)$$

が存在する．

(2) 任意の $\sigma > 1/2$ に対して，次を満たす連続関数 $M_\sigma(\ \cdot\ ;\alpha) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在する：

$$P_\sigma(R;\alpha) = \int_R M_\sigma(z;\alpha)|dz|.$$

実際のところ，定理 3 は定理 1 の証明と全く同じ手法で証明できる．定理 1 の証明においては，$\{\log p\}_p$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立であるという事実（素因数分解の一意性の言い換え）が用いられる．定理 3 を示すには代わりに $\{\log(n+\alpha)\}_{n\geq 0}$ の一次独立性が必要となるが，この性質を保証するために α を超越数と仮定するのである．なお，R. Garunkštis 氏と A. Laurinčikas 氏 [4] により，$P_{\sigma,T}(\ \cdot\ ;\alpha)$ を $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ 上の確率測度とみなしたとき，それが $T \to \infty$ のときにある確率測度に弱収束するという主張のみであれば，α に何の仮定も要さずに証明できるということが知られている．すなわち，確率測度 $P_\sigma(\ \cdot\ ;\alpha)$ で，$P_\sigma(\partial A;\alpha) = 0$ を満たす任意の Borel 集合 A について，$T \to \infty$ のとき $P_{\sigma,T}(A;\alpha) \to P_\sigma(A;\alpha)$ が成り立つものが存在する．しかし，彼らの手法を用いても，α が超越数でない場合には極限測度 $P_\sigma(\ \cdot\ ;\alpha)$ が十分に具体的には与えられず，絶対連続性といった性質を証明するには至っていない．

定理 2 の類似である以下の結果は筆者 [10, Theorem 1.3] による．

定理 4. 実数 $\sigma > 1/2$ を固定する．また α を S-number と仮定する．このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$P_{\sigma,T}(R;\alpha) = P_\sigma(R;\alpha) + O\left((\mu_2(R)+1)(\log T)^{-1/4+\epsilon}\right)$$

が十分大きい $T > 0$ に対して成立する．ただし implied constant は σ と α, ϵ のみに依存する．

S-number の正確な定義は次節で行うが，任意の S-number は超越数であること，Lebesgue 測度 0 の例外を除くほとんどすべての実数は S-number であること，さらに例えば $e = \exp(1)$ は S-number であることを注意しておく．また，定理 4 と同種のアイデアにより，次の結果 [10, Theorem 1.6] も証明できる．

定理 5. 領域 $\{\sigma + it \in \mathbb{C} \mid \sigma_1 < \sigma < \sigma_2, 0 < t < T\}$ における $\zeta(s,\alpha)$ の零点の個数を $N(T,\sigma_1,\sigma_2;\alpha)$ とする．実数 $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2$ を固定する．また α を S-number と仮定する．このときある絶対定数 $A > 0$ が存在し，

$$N(T,\sigma_1,\sigma_2;\alpha) = CT + O\left(T(\log T)^{-A}\right)$$

が成り立つ．ただし implied constant は σ_1, σ_2 と α のみに依存し，定数 $C = C(\sigma_1,\sigma_2;\alpha) \geq 0$ は

$$C(\sigma_1,\sigma_2;\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\left(\int_{\mathbb{C}} \log|z| \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} M_\sigma(z;\alpha)|dz|\right) d\sigma$$

により与えられる．

単に α を超越数とした場合には，$T \to \infty$ のとき $N(T,\sigma_1,\sigma_2;\alpha) \sim CT$ となることが証明できる．これは本質的には Borchsenius–Jessen [3] によるものである．実際には彼らは Riemann ゼータ関数の a-point ($a \neq 0$) の個数を扱っていたが，全く同じ手法が Hurwitz ゼータ関数の零点の個数にも適用できるのである．

さて，定理 4，定理 5 どちらの証明も，次の命題 [10, Theorem 3.1] に基づいている．

命題 6. 実数 $\sigma > 1/2$ を固定し，$0 < \theta + \delta < 1/4$ を満たす実数 $\theta, \delta > 0$ をとる．また α を S-number と仮定する．このときある $T_0 = T_0(\sigma,\theta,\delta,\alpha) > 0$ が存在して，$T \geq T_0$，$|z| \leq (\log T)^\delta$ のとき，

$$\frac{1}{T}\int_0^T \psi_z(\zeta(\sigma+it,\alpha))dt = \prod_{n=0}^{\infty} J_0(|z|(n+\alpha)^{-\sigma}) + O\left(\exp\left(-\tfrac{1}{2}(\log T)^{\theta/2}\right)\right) \tag{2.1}$$

を満たす．ただし implied constant は σ のみに依存する．また複素数 $z = x + iy, w = u + iv$ に対して $\psi_z(w) = \exp(i(xu+yv))$ と定め，$J_0(t)$ は位数 0 の第一種 Bessel 関数である．

Fourier 解析の手法により，命題 6 から

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Phi(\zeta(\sigma+it,\alpha))dt = \int_{\mathbb{C}} \Phi(z)M_\sigma(z;\alpha)|dz| + E \tag{2.2}$$

の形の漸近式が得られる．ただし $\Phi(z)$ は適切な条件を満たすテスト関数で，E は具体的に評価可能な誤差項である．もし (2.2) において $\Phi(z)$ を R の指示関数 $1_R(z)$ にとることができれば，定理 4 が従う．実際には $1_R(z)$ を直接用いることはできないが，良い性質を持つ関数（Beurding–Selberg 関数）で $1_R(z)$ を近似することにより定理 4 は証明される．次に定理 5 については，$\Phi(z)$ を $\log|z|$ としてとることを目指す．古典的な Littlewood の補題により，$N(T,\sigma_1,\sigma_2;\alpha)$ は積分

$$\int_0^T \log|\zeta(\sigma+it,\alpha)|dt$$

に結び付けられるからである．この場合には $\log|z|$ が非有界なこともあり，定理 4 の際よりもいくぶん複雑な近似計算を要するが，最終的には (2.2) は $\Phi(z)=\log|z|$ でも適切な誤差評価の上で成立することが分かる．詳細をかなり省いてしまったが，このように定理 4，定理 5 の証明は命題 6 を示すことに帰着されるのである．次節で命題 6 の証明の概略を解説する．

3 S-numbers

命題 6 の証明のために，まず自然数 N に対して

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{T}\int_0^T \psi_z(\zeta(\sigma+it,\alpha))dt - \prod_{n=0}^{\infty} J_0(|z|(n+\alpha)^{-\sigma})\right| \\
&\le \left|\frac{1}{T}\int_0^T \psi_z(\zeta(\sigma+it,\alpha))dt - \frac{1}{T}\int_0^T \psi_z\Big(\sum_{n=0}^{N}(n+\alpha)^{-(\sigma+it)}\Big)dt\right| \\
&\qquad + \left|\frac{1}{T}\int_0^T \psi_z\Big(\sum_{n=0}^{N}(n+\alpha)^{-(\sigma+it)}\Big)dt - \prod_{n=0}^{N} J_0(|z|(n+\alpha)^{-\sigma})\right| \\
&\qquad\qquad + \left|\prod_{n=0}^{N} J_0(|z|(n+\alpha)^{-\sigma}) - \prod_{n=0}^{\infty} J_0(|z|(n+\alpha)^{-\sigma})\right| \\
&= E_1 + E_2 + E_3
\end{aligned}$$

として，各 E_1, E_2, E_3 を評価することを目標とする．これらの評価の中で α が S-number であるという仮定を用いるのは，E_2 に対してのみである．実際，E_1 は $\zeta(s,\alpha)$ のある種の平均値定理を用いて，E_3 は Bessel 関数の幾つかの性質を用いて評価できる．本稿では証明は割愛するが，具体的には命題 6 の設定の下，$N=\lfloor \exp((\log T)^{3\theta/2})\rfloor$ として，任意の $0<\alpha\le 1$ に対して

$$E_1, E_3 \ll_\sigma \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\log T)^{\theta/2}\right)$$

が証明できる（[10, Propositions 3.3, 3.7]）．ゆえに命題 6 はその finite truncated version に帰着される．

命題 7. 実数 $\sigma>1/2$ を固定し，$0<\theta+\delta<1/4$ を満たす実数 $\theta,\delta>0$ をとる．また α を S-number と仮定する．このときある $T_0=T_0(\sigma,\theta,\delta,\alpha)>0$ が存在して，$T\ge T_0$，$|z|\le(\log T)^\delta$ のとき，

$$\frac{1}{T}\int_0^T \psi_z\Big(\sum_{n=0}^{N}(n+\alpha)^{-(\sigma+it)}\Big)dt = \prod_{n=0}^{N} J_0(|z|(n+\alpha)^{-\sigma}) + O\left(\exp\left(-\tfrac{1}{2}(\log T)^{\theta/2}\right)\right) \tag{3.1}$$

を満たす．ただし $N=\lfloor \exp((\log T)^{3\theta/2})\rfloor$ とし，implied constant は σ のみに依存する．

証明の手がかりとなるのが次の補題 [7, Lemma 2] である．

補題 8. 関数 $f_0(t), \dots, f_N(t)$ を $\mathbb{R}$ 上で定義された周期 1 の関数とする．このとき実数 $\gamma_0, \dots, \gamma_N$ が $\mathbb{Q}$ 上で一次独立であれば，

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \prod_{n=0}^N f_n(\gamma_n t) dt = \prod_{n=0}^N \int_0^1 f_n(\theta) d\theta$$

が成り立つ．

もし N が T によらず固定された自然数であるならば，補題 8 において

$$f_n(t) = \psi_z((n+\alpha)^{-\sigma} e^{2\pi it}), \qquad \gamma_n = -\frac{1}{2\pi} \log(n+\alpha)$$

とすれば，

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi_z\Big(\sum_{n=0}^N (n+\alpha)^{-(\sigma+it)}\Big) dt = \prod_{n=0}^N \int_0^1 \psi_z((n+\alpha)^{-\sigma} e^{2\pi i\theta}) d\theta$$

を得る．ただし $\gamma_0, \dots, \gamma_N$ の一次独立性を保証するために，α は超越数であると仮定する．適切な変数変換によって

$$\int_0^1 \psi_z((n+\alpha)^{-\sigma} e^{2\pi i\theta}) d\theta = J_0(|z|(n+\alpha)^{-\sigma})$$

が成り立つことも容易に分かるので，結果として

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi_z\Big(\sum_{n=0}^N (n+\alpha)^{-(\sigma+it)}\Big) dt = \prod_{n=0}^N J_0(|z|(n+\alpha)^{-\sigma}) \tag{3.2}$$

を得る．しかし実際には自然数 N は $N = \lfloor \exp((\log T)^{3\theta/2}) \rfloor$ と T に依存し，また (3.2) では (3.1) のような誤差項の評価もできないので，一工夫が必要である．そのために，$T' \geq T$ なる T' を任意にとり，差

$$E_2' = \frac{1}{T} \int_0^T \psi_z\Big(\sum_{n=0}^N (n+\alpha)^{-(\sigma+it)}\Big) dt - \frac{1}{T'} \int_0^{T'} \psi_z\Big(\sum_{n=0}^N (n+\alpha)^{-(\sigma+it)}\Big) dt$$

を評価することを考える．もしこれが T' によらず，T のみによって

$$E_2' \ll \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\log T)^{\theta/2}\right)$$

と評価できたのであれば，今度は N は T' には依存しないので，$T' \to \infty$ とすることにより (3.1) が得られるというわけである．つまり，我々の最終目標は次の命題を証明することになる．

命題 9. 実数 $\sigma > 1/2$ を固定し，$0 < \theta + \delta < 1/4$ を満たす実数 $\theta, \delta > 0$ をとる．また α を S-number と仮定する．このときある $T_0 = T_0(\sigma, \theta, \delta, \alpha) > 0$ が存在して，$T' \geq T \geq T_0$，$|z| \leq (\log T)^\delta$ のとき，

$$\begin{aligned} E_2' &= \frac{1}{T} \int_0^T \psi_z\Big(\sum_{n=0}^N (n+\alpha)^{-(\sigma+it)}\Big) dt - \frac{1}{T'} \int_0^{T'} \psi_z\Big(\sum_{n=0}^N (n+\alpha)^{-(\sigma+it)}\Big) dt \\ &\ll \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\log T)^{\theta/2}\right) \end{aligned} \tag{3.3}$$

を満たす．ただし $N = \lfloor \exp((\log T)^{3\theta/2}) \rfloor$ とし，implied constant は絶対定数である．

以下，記号の簡略化のために

$$F(t) = F(t, \sigma, N; \alpha) = \sum_{n=0}^N (n+\alpha)^{-(\sigma+it)}$$

とおく．このとき exp の冪級数展開により，

$$\psi_z(F(t)) = \exp\Big(\frac{i\overline{z}}{2}F(t) + \frac{iz}{2}\overline{F(t)}\Big)$$
$$= \sum_{0\le\mu+\nu<M} \frac{1}{\mu!\nu!}\Big(\frac{i\overline{z}}{2}\Big)^{\mu}\Big(\frac{iz}{2}\Big)^{\nu} F(t)^{\mu}\overline{F(t)}^{\nu} + O\Big(\frac{|z|^M}{M!}|F(t)|^M\Big)$$

が十分大きい偶数 $M = 2m > 0$ に対して成り立つ．したがって，誤差 E_2' は

$$E_2' = \sum_{0\le\mu+\nu<M} \frac{1}{\mu!\nu!}\Big(\frac{i\overline{z}}{2}\Big)^{\mu}\Big(\frac{iz}{2}\Big)^{\nu} H(\mu,\nu) + O\Big(\frac{|z|^M}{M!}\Big(\frac{1}{T}\int_0^T |F(t)|^M dt + \frac{1}{T'}\int_0^{T'} |F(t)|^M dt\Big)\Big) \tag{3.4}$$

と計算される．ただし

$$H(\mu,\nu) = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)^{\mu}\overline{F(t)}^{\nu} dt - \frac{1}{T'}\int_0^{T'} F(t)^{\mu}\overline{F(t)}^{\nu} dt$$

とする．評価 (3.3) は (3.4) の各項をそれぞれ評価することによって得られるが，それらの手法にはほとんど違いはないので，α に対する仮定がどのように用いられるかを観察するには，第 1 項

$$\sum_{0\le\mu+\nu<M} \frac{1}{\mu!\nu!}\Big(\frac{i\overline{z}}{2}\Big)^{\mu}\Big(\frac{iz}{2}\Big)^{\nu} H(\mu,\nu)$$

の評価の方法のみを見れば十分であろう．さて，$(\mu,\nu) \neq (0,0)$ であるとき，

$$\frac{1}{T}\int_0^T F(t)^{\mu}\overline{F(t)}^{\nu} dt = \sum_{0\le m_1\le N}\cdots\sum_{0\le m_\mu\le N}\sum_{0\le n_1\le N}\cdots\sum_{0\le n_\nu\le N} \frac{1}{(m_1+\alpha)^{\sigma}\cdots(m_\mu+\alpha)^{\sigma}}$$
$$\times \frac{1}{(n_1+\alpha)^{\sigma}\cdots(n_\nu+\alpha)^{\sigma}} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)}{(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}\right)^{it} dt$$

が成り立つ．ただし $\mu = 0$ の場合には $(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha) = 0$，$\nu = 0$ の場合には $(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha) = 0$ と解釈し，その和は無視するものとする．もし $(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha) = (n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)$ であれば，

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)}{(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}\right)^{it} dt = \frac{1}{T'}\int_0^{T'} \left(\frac{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)}{(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}\right)^{it} dt = 1$$

であるので，そのような項は $H(\mu,\nu)$ においては互いにキャンセルされて現れないことが分かる．一方で，$(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha) \neq (n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)$ に対しては

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)}{(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}\right)^{it} dt \ll \frac{1}{T}\left|\log\frac{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)}{(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}\right|^{-1},$$

同様に $T' \ge T$ より

$$\frac{1}{T'}\int_0^{T'} \left(\frac{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)}{(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}\right)^{it} dt \ll \frac{1}{T'}\left|\log\frac{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)}{(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}\right|^{-1}$$
$$\le \frac{1}{T}\left|\log\frac{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)}{(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}\right|^{-1}$$

が成り立つ．したがって

$$H(\mu,\nu) \ll \frac{1}{T}\sum_{0\le m_1\le N}\cdots\sum_{0\le m_\mu\le N}\sum_{0\le n_1\le N}\cdots\sum_{\substack{0\le n_\nu\le N\\ (m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)\neq(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}} \frac{1}{(m_1+\alpha)^{\sigma}\cdots(m_\mu+\alpha)^{\sigma}}$$
$$\times \frac{1}{(n_1+\alpha)^{\sigma}\cdots(n_\nu+\alpha)^{\sigma}}\left|\log\frac{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)}{(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}\right|^{-1} \tag{3.5}$$

を得る．ここで問題となるのが (3.5) における

$$\left|\log\frac{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)}{(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}\right|^{-1}$$

の上からの評価である．つまりはその逆数の下からの評価を考えればよいので，まず

$$\begin{aligned}\left|\log\frac{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)}{(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}\right| &\geq \frac{|(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)-(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)|}{\max\{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha),(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)\}}\\ &\geq \frac{|P(\alpha)|}{(2N)^M} \end{aligned} \tag{3.6}$$

とする．ただし多項式 $P(x)$ は

$$P(x)=(m_1+x)\cdots(m_\mu+x)-(n_1+x)\cdots(n_\nu+x)$$

である．次に $|P(\alpha)|$ の下からの評価を行うことになるのだが，ここで α に対する新しい仮定が必要となる．なお $|P(\alpha)|$ の下からの評価に関しては，実は α が代数的数の場合のほうが議論は単純で，古典的にも様々な事実が知られており，例えば次のような結果が利用できる．

補題 10 ([5])**.** 多項式 $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ に対し，その次数を n，高さを h とする．このとき $P(\alpha)\neq 0$ なる任意の代数的数 α に対して，

$$|P(\alpha)|\geq\{(n+1)h\}^{1-d(\alpha)}(d(\alpha)+1)^{-n/2}H(\alpha)^{-n}$$

が成り立つ．ただし $d(\alpha)$，$H(\alpha)$ はそれぞれ α の次数と高さとする．

ここで一般に多項式 $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ に対して，$\max\{|a_n|,\ldots,|a_0|\}$ を $P(x)$ の高さといい，また代数的数 α に対してはその最小多項式の高さを α の高さと呼ぶ．

余談にはなるが，α が代数的無理数の場合の Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s,\alpha)$ の値分布の議論は非常に難しく，多くの課題が山積している．ごく最近，この場合の Hurwitz ゼータ関数の普遍性と呼ばれる性質の研究が A. Sourmelidis 氏と J. Steuding 氏によって進められている．その手法にも補題 10 が用いられていることは注目すべき点である．

話を戻し，α が超越数の場合にも補題 10 のような $|P(\alpha)|$ の適切な下からの評価が望まれるのだが，これは一般の超越数には期待できない．荒っぽく言うと，Liouville 数のような極めて良い近似をもつ場合には，$P(\alpha)$ が 0 に非常に近い値をとり続けるという状況が発生するのである．この状況を詳しく見るために，Mahler の超越数の分類，S-numbers，T-numbers，U-numbers の概念を導入する．まず複素数 ξ を一つとる．次に，与えられた自然数 n と h に対して，多項式 $P(x)\in\mathbb{Z}(x)$ を，次数 n 以下，高さ h 以下の整数係数の多項式で $|P(\xi)|$ が 0 でない最小の値をとるものとして定義する．そして，正の実数 $\omega_{n,h}(\xi)$ を等式 $|P(\xi)|=h^{-n\omega_{n,h}(\xi)}$ によって定める．次数 n 以下，高さ h 以下の整数係数多項式は有限個しか存在しないので，少なくとも一つの上記のような $P(x)$ がとれるが，その選び方は一般には一意ではない．しかし $\omega_{n,h}(\xi)$ はその定義により ω と n，h のみによって定まる実数であることに注意する．いま，

$$\omega_n(\xi)=\limsup_{h\to\infty}\omega_{n,h}(\xi),\quad \omega(\xi)=\limsup_{n\to\infty}\omega_n(\xi)$$

とおく．また $\nu(\xi)=\inf\{n\mid\omega_n(\xi)=\infty\}$ とする．

定義 11 (Mahler の分類 [8])**.** 複素数 ξ を以下のように分類する．

- ω が A-number であるとは，$\omega(\xi)=0$，$\nu(\xi)=\infty$ を満たすことである．
- ω が S-number であるとは，$0<\omega(\xi)<\infty$，$\nu(\xi)=\infty$ を満たすことである．

- ω が T-number であるとは，$\omega(\xi)=\infty$，$\nu(\xi)=\infty$ を満たすことである．
- ω が U-number であるとは，$\omega(\xi)=\infty$，$\nu(\xi)<\infty$ を満たすことである．

Mahler の分類の重要な性質として，代数的に従属な複素数は必ず同じクラスに属するというものがある．またこの 4 つのクラスはすべて空でないことが知られている．その他代表的な性質を列挙すると，A-number とは代数的数のことである，μ_2 に関して測度 0 の例外を除きほとんどすべての複素数は S-number である，μ_1 に関して測度 0 の例外を除きほとんどすべての実数は S-number である，例えば $e=\exp(1)$ は S-number である，Liouville 数（例えば $\sum_n 10^{-n!}$）は U-number である，などが知られている．証明やより詳しい性質については [1] などを参照のこと．

以下，α を S-number と仮定して

$$|P(\alpha)|=|(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)-(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)|$$

を下から評価する．ただし $0\le m_j\le N$，$0\le n_j\le N$，また $0<\mu+\nu<M=2m$ である．このとき多項式 $P(x)$ の次数は高々 M で，高さは高々

$$\binom{M}{m}N^M\le(2N)^M$$

である．ゆえに $n=M$，$h=(2N)^M$ として，実数 $\omega_{n,h}(\alpha)$ の定義から，

$$|P(\alpha)|\ge h^{-n\omega_{n,h}(\alpha)}$$

が成り立つ．S-number の定義により，$\omega_{n,h}(\alpha)$ は n,h に関して一様に有界なので $\omega_{n,h}(\alpha)\le\omega'(\alpha)$ なる実数 $\omega'(\alpha)>0$ がとれる．したがって

$$|P(\alpha)|\ge h^{-n\omega'(\alpha)}=(2N)^{-\omega'(\alpha)M^2}$$

が成り立つことが分かる．ゆえに (3.6) により，適当な実数 $\Omega(\alpha)>0$ により，

$$\left|\log\frac{(m_1+\alpha)\cdots(m_\mu+\alpha)}{(n_1+\alpha)\cdots(n_\nu+\alpha)}\right|\ge N^{-\Omega(\alpha)M^2}$$

を得る．これを (3.5) に用いれば，適当な $N_0(\sigma.\alpha)$ に対して $N\ge N_0(\sigma.\alpha)$ のとき

$$H(\mu,\nu)\ll\frac{1}{T}\Big\{\sum_{0\le n\le N}\frac{1}{(n+\alpha)^\sigma}\Big\}^M N^{\Omega(\alpha)M^2}\le\frac{1}{T}N^{(\Omega(\alpha)+1)M^2}$$

が成り立つ．定義により $H(0,0)=0$ だから，最終的に

$$\sum_{0\le\mu+\nu<M}\frac{1}{\mu!\nu!}\Big(\frac{i\overline{z}}{2}\Big)^\mu\Big(\frac{iz}{2}\Big)^\nu H(\mu,\nu)\ll\frac{(1+|z|^2)^m}{T}N^{(\Omega(\alpha)+1)M^2}$$

という評価を得るに至る．以下，M を T の関数として適切に選び求める評価を導く．まず命題 9 の設定から，$\theta+2\delta<1/2-(3/4)\theta$ であるので，実数 $\eta=\eta(\theta,\delta)$ を $\theta+2\delta<\eta<1/2-(3/4)\theta$ を満たすようにとることができる．そこで $M=2\lfloor(\log T)^\eta\rfloor$ とおく．これと $|z|\le(\log T)^\delta$，$N=\lfloor\exp((\log T)^{3\theta/2})\rfloor$ により，

$$\frac{(1+|z|^2)^m}{T}N^{(\Omega(\alpha)+1)M^2}\ll\exp\Big(-\tfrac{1}{2}(\log T)^{\theta/2}\Big)$$

が $T\ge T_0(\sigma,\theta,\delta,\alpha)$ に対して成り立つことが結論づけられる．本稿では省略するが，同様の手法で α が S-number のとき，$T\ge T_0(\sigma,\theta,\delta,\alpha)$ に対して

$$\frac{|z|^M}{M!}\Big(\frac{1}{T}\int_0^T|F(t)|^M dt+\frac{1}{T'}\int_0^{T'}|F(t)|^M dt\Big)\ll\exp\Big(-\tfrac{1}{2}(\log T)^{\theta/2}\Big)$$

が成り立つことも証明できる．したがって (3.4) の各項の評価が得られ，命題 9 が示されたことになる． □

謝辞． 本稿は 2018 年度 RIMS 共同研究（公開型）「解析的整数論とその周辺」における筆者の講演を基に作成されたものです．代表者である見正秀彦先生には常日頃からお世話になっております．深く感謝いたします．また，筆者が Hurwitz ゼータ関数の値分布を研究する上で S-number に着目したのは，2017 年度の「解析的整数論とその周辺」での大音智弘氏による講演がきっかけでした．懇親会の席での筆者の素人質問にも丁寧に答えていただいたこと，大変感謝しております．この紙面をお借りして御礼申し上げます．

参考文献

[1] A. Baker, *Transcendental number theory*, Cambridge university press, 1975.

[2] H. Bohr and B. Jessen, *Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion*, I, Acta Math. **54** (1930), 1–35; II ibid. **58** (1932), 1–55.

[3] V. Borchsenius, B. Jessen, *Mean motions and values of the Riemann zeta function*, Acta Math. **80** (1948), 97–166.

[4] R. Garunkštis and A. Laurinčikas, *On the Lerch zeta-function*, Liet. Mat. Rink. **36** (4) (1996), 423–434.

[5] R. Güting, *Polynomials with multiple zeros*, Mathematika **14**, (1967), 181–196.

[6] G. Harman and K. Matsumoto, *Discrepancy estimates for the value-distribution of the Riemann zeta-function IV*, J. London Math. Soc. (2) **50**, (1994), 17–24.

[7] D. R. Heath–Brown, *The distribution and moments of the error term in the Dirichlet divisor problem*, Acta Arith. **60** (1992), 389–415.

[8] K. Mahler, *Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I.*, J. reine angew. Math. **166** (1932), 118–150.

[9] K. Matsumoto, *On the theory of M-functions*, preprint, arXiv:1810.01552.

[10] M. Mine, *The density function for the value-distribution of Lerch zeta-functions and its applications*, preprint, arXiv:1805.11066.