Values of the Riemann zeta function on vertical arithmetic progressions in the critical strip
(リーマンゼータ関数の臨界領域内等差数列における値の分布)

理化学研究所・数理創造プログラム　アデイルマスリアジャヤ / チャチャ

Ade Irma Suriajaya / Chacha
RIKEN iTHEMS

序文

本研究は、Junghun Lee 氏（元名古屋大学、研究集会開催当時兵役中）、Athanasios Sourmelidis 氏（ヴュルツブルク大学）と Jörn Steuding 氏（ヴュルツブルク大学）との共同研究である。この研究は部分的に科研費（課題番号：15J02325と16J01139）の助成を受けたものであり、講演は著者が理化学研究所の基礎科学特別研究員の活動の一貫として行なったものである。一部の研究も、著者が理化学研究所の基礎科学特別研究員としての活動中に行った。

要旨

リーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の非自明な零点は全て臨界領域 $0<\mathrm{Re}(s)<1$ にあるが、実際は全て臨界線 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上にあると予想されている（リーマン予想と通称)。$\zeta(s)$ は臨界領域の右半分 $1/2<\mathrm{Re}(s)<1$ において普遍性を持ち、その値分布は複素平面内で稠密である。普遍性は臨界線の反対側では成立しないが、値分布の稠密さはそうであると限らない。リーマン予想が成り立てば、$\zeta(s)$ が $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ において稠密でないことは示された。この問題を少し具体化し、$\zeta(s)$ の縦の等差数列上の値が $\mathbb{C}$ 上任意の集合に含まれるかどうかに弱めれば、無条件に成り立つ答えが得れる。等差数列は最もシンプルな規則正しい数列であることから、$\zeta(s)$ は臨界領域内における激しい振る舞いを改めて解釈したい。また、$\zeta(s)$ の縦の等差数列における単射性も調べたい。

1　リーマンゼータ関数の臨界領域の右半分上の等差数列上の値

C. R. Putnam [Put54a, Put54b] はリーマンゼータ関数 $\zeta(s)$ の臨界線 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上における零点の列が無限に続く等差数列を含まないことを示した。具体的に述べると、Putnam [Put54a, Put54b] は全ての $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+i(a+nh)\right)\in\{0\}$$

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 11M06.
キーワード: リーマンゼータ関数、等差数列、値分布、普遍性

が成り立つ、となる $a>0$ と $h>0$ が存在しないことを示した。ここで、$\mathbb{N}$ は正の整数全体を表す。フラクタルゼータ関数を用いて、M. L. Lapidus と M. van Frankenhuijsen [LF13, Chapter 11] が以上の Putnam の結果に対して別証明を与えて、他のゼータ関数及びL関数へ拡張した。我々はこの結果に興味を持ち、$\zeta(s)$ の零点だけではなく、他の値の列、更により一般に $\zeta(s)$ の値からなる任意の集合に拡張して調べたいことが、この問題に取り組む最初の動機であった。また、臨界線 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ に限らず、臨界領域 $0<\mathrm{Re}(s)<1$ 内に調べることも目指していた。しかし、$\mathrm{Re}(s)=1/2$ に対してうまくいくような方法がなかなか見つからず、以上で述べた Putnam の結果を拡張することができなかった。

臨界線を除いた臨界領域内の縦の直線においては、Putnam の結果に類似した、より一般の設定の下での結果が得られた。我々が得た結果を少し簡約に述べるために、$\hat{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ とおく。

定理 1. $h>0$、$\ell\in\mathbb{N}$ と $\mathcal{M}\subset\hat{\mathbb{C}}$ とし、$\mathcal{M}$ が内点を持つとする。$s\in\mathbb{C}$ が $1/2<\mathrm{Re}(s)<1$ を満たすとき、ある可算集合 $\mathcal{N}\subset\mathbb{N}$ が存在して、

$$\zeta(s+ih(n+k-1))\in\mathcal{M}$$

が全ての $n\in\mathcal{N}$ と $k\in\{1,2,\cdots,\ell\}$ に対して成り立つ。

上記の定理を次のように書き換えられる：$h>0$、$\ell\in\mathbb{N}$ と $\mathcal{M}'\subset\hat{\mathbb{C}}$、$\hat{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{M}'$ が内点を持つとする。$s\in\mathbb{C}$ が $1/2<\mathrm{Re}(s)<1$ を満たすとき、ある可算集合 $\mathcal{N}\subset\mathbb{N}$ が存在して、

$$\zeta(s+ih(n+k-1))\notin\mathcal{M}'$$

が全ての $n\in\mathcal{N}$ と $k\in\{1,2,\cdots,\ell\}$ に対して成り立つ。即ち、定理 1 の $\mathcal{M}$ に対して、$\mathcal{M}'=\hat{\mathbb{C}}\setminus\mathcal{M}$ とおけば良い。

補足. Putnam [Put54a, Put54b] の結果は、以上の言い換えにおいて、$\ell=1$、$\mathcal{M}'=\{0\}$、$s=1/2+ia$ と $N\in\mathbb{N}$ に対して、$\mathcal{N}=\{N,N+1,N+2,\ldots\}$ を用いて書き換えられる。しかし、注意点として、我々が示した定理 1 において、s が $1/2<\mathrm{Re}(s)<1$ を満たさなくてはいけないため、Putnam の結果を含まない。

定理 1 により臨界線の反対側 $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ における結果を導くこともできる。但し、これは集合 $\mathcal{M}$ が ∞ を内点として含む場合に限る。

系. $h>0$、$\ell\in\mathbb{N}$ と $\mathcal{M}\subset\hat{\mathbb{C}}$ とし、$\mathcal{M}$ が ∞ を内点として含むとする。$s\in\mathbb{C}$ が $0<\mathrm{Re}(s)<1/2$ を満たすとき、ある可算集合 $\mathcal{N}\subset\mathbb{N}$ が存在して、

$$\zeta(s+ih(n+k-1))\in\mathcal{M}$$

が全ての $n\in\mathcal{N}$ と $k\in\{1,2,\cdots,\ell\}$ に対して成り立つ。

上記の系を見るには、まず、$\zeta(s)$ の関数等式

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s) \tag{1.1}$$

に対して、$0 < \mathrm{Re}(s) < 1/2$ のとき、任意の $c > 0$ に対して、$\mathrm{Im}(s)$ が十分に大きければ、

$$\left| 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \right| \geq c$$

が成り立つことに注意する。一般性を失わず、∞ を内点として含む $\mathcal{M}$ として、適切な $r > 0$ に対し、$\mathcal{M} = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid |z| < r\}$ と考えて良い。任意の $c > 0$ を取って固定し、それ及び上記の $r > 0$ に対して、定理 1 を $\hat{\mathbb{C}} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2r/c\}$ に適用すれば、

$$\zeta(1 - s - ih(n+k-1)) \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2r/c\}$$

となることがわかる。即ち、

$$|\zeta(1 - s - ih(n+k-1))| \geq \frac{2r}{c}$$

である。関数等式 (1.1) に現れる $\zeta(s)$ 以外の部分

$$2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)$$

を簡約に $F(s)$ と書けば、

$$\begin{aligned} |\zeta(s + ih(n+k-1))| &= |F(s + ih(n+k-1))| \cdot |\zeta(1 - s - ih(n+k-1))| \\ &\geq c \cdot \frac{2r}{c} > r \end{aligned}$$

となる。従って、

$$\zeta(s + ih(n+k-1)) \in \mathcal{M}.$$

定理 1 の証明に必要なのはある一種の「離散的極限定理」である。少しだけその概略を述べる。詳細は、原論文 [LSSS] を参照。

1. 素数 p に対して、ハール測度 $\mathcal{M}_H$ で定義される無限次元トーラス Ω 上確率空間への射影写像 $\omega(p)$ に対して、確率要素 $\zeta(z, \omega)$ を

   $$\zeta(z, \omega) = \prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)}{p^z}\right)^{-1}$$

   と定義する。$\zeta(z, \omega)$ の確率分布 P は $\{s \in \mathbb{C} \mid 1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ 上の開集合 A に対して、

   $$\mathsf{P}(A) = \mathcal{M}_H(\{\omega \in \Omega \mid \zeta(z, \omega) \in A\})$$

   と定まる。

2. 確率 P_N を $\{s \in \mathbb{C} \mid 1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ 上の開集合 A に対して、
$$\mathsf{P}_N(A) = \frac{1}{N}\#\{n \in \{1, 2, \cdots, N\} \mid \zeta(z + ihn) \in A\}$$
とおく。

3. A は定理 1 の条件にある $\mathcal{M}$ の内点の近傍であるとき、$\mathsf{P}_N(A)$ が $\mathsf{P}(A)$ に弱収束する。

補足. 2 および 3 で述べたものは、主に [Bag81, Proposition 4.4.1] 及び [Ste07, Lemma 5.12] によるものである。

2 リーマンゼータ関数の値の共有

我々は臨界領域内の等差数列上で考えているが、等差数列がどの程度で $\zeta(s)$ の値の分布を特徴付けているかの問題に迫る。A. Reich [Rei82] は通常ディリクレ級数
$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$
は、絶対収束範囲内にある $\mathrm{Re}(s) = x$ に対して、$\{x + it\}_{t\in\mathbb{R}}$ における値全体の閉包が、等差数列 $\{x + ihn\}_{n\in\mathbb{N}}$（$h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$）上での値全体の閉包と等しくなる場合を調べた。言い換えれば、絶対収束軸 α に対し、$x > \alpha$ と $h \neq 0$ に対して、
$$\overline{\{F(x + it) \mid t \in \mathbb{R}\}} = \overline{\{F(x + ihn) \mid n \in \mathbb{N}\}} \tag{2.1}$$
となる場合を考える。Reich [Rei82] が示したのは、(2.1) が成り立つ必要十分条件は、素数全体を $2 = p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \dots$ と書き並べて、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、
$$1, \frac{h}{2\pi}\log 2, \frac{h}{2\pi}\log 3, \frac{h}{2\pi}\log 5, \frac{h}{2\pi}\log 7, \frac{h}{2\pi}\log 11, \dots, \frac{h}{2\pi}\log p_n$$
が $\mathbb{Z}$ 上一次独立となることである。よって、$\zeta(s)$ の場合に対しても、縦線 $x + it$ 、$t \in \mathbb{R}$ 上の値全体は、閉包の意味で、適切な $h \neq 0$ に対して、その線 $\mathrm{Re}(s) = x$ 上の等差数列 $\{x + ihn\}_{n\in\mathbb{N}}$ における値に特徴付けられる。

さて、一直線一直線上において、$\zeta(s)$ の等差数列における値は重複しないかという疑問が自然に思い浮かぶ。即ち、$\zeta(s)$ は等差数列上で共有する値を持たないか。これは (2.1) と同様に、閉包を取らない限り一般的には成り立たないと期待するが、絶対収束軸 $\mathrm{Re}(s) = 1$ から“十分”に離れていれば成立できることが次の定理により明らかになった。

定理 2. $\mathrm{Re}(s) > 1$ 、$t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ 、$h_1, h_2 > 0$ とする。このとき、全単射 $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ に対して、
$$\text{全ての } n \in \mathbb{N} \text{ に対して、} \quad \zeta(s + i(t_1 + h_1 n)) = \zeta(s + i(t_2 + h_2\sigma(n))) \tag{2.2}$$
が成り立つとする。このとき、次の (i) と (ii) のうち、どれか一つが成り立つ。

(i) $t_1 = t_2$ 、$h_1 = h_2$ 、$\sigma = \mathrm{id}$ である。

(ii) 具体的に求められる定数 $b = b(t_1, t_2, h_1, h_2; \sigma)$ に対して、$1 < \mathrm{Re}(s) \le b$ である。

上記の定理を次のように書き換えられる：$\mathrm{Re}(s)$ が十分に大きいとき、

$$\zeta(s + i(t_1 + h_1 n)) = \zeta(s + i(t_2 + h_2\sigma(n))), \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad t_1 = t_2, h_1 = h_2, \sigma = \mathrm{id}$$

が成り立つ。

補足. 定理 2 はより一般に、通常ディリクレ級数 $F(s) = \sum_{n\ge1} a(n) n^{-s}$ に対して拡張できる。原論文 [LSSS, Theorem 6] を参照。

定理 2 の仮定 (2.2) が成り立つが、(i) が成り立たない場合を考える。(ii) を示すには、ディリクレ級数表記を用いて、(2.2) の両辺の差を見る：

$$\begin{aligned}\Phi_n(s) := \zeta(s + i(t_1 + h_1 n)) - \zeta(s + i(t_2 + h_2\sigma(n))) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\phi_n(m)}{m^s} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^{-i(t_1+h_1 n)} - m^{-i(t_2+h_2\sigma(n))}}{m^s}\end{aligned}$$

$\mathrm{Re}(s) > 1$ に対して、$\Phi_n(s) \neq 0$ になることがあれば、

$$\mu_n := \min\{m \in \mathbb{N} \mid \phi_n(m) \neq 0\}$$

が存在する。よって、それに対して、

$$|\Phi_n(s)| \ge |\phi_n(\mu_n)| \mu_n^{-\mathrm{Re}(s)} - \frac{2\mu_n^{1-\mathrm{Re}(s)}}{\mathrm{Re}(s) - 1}$$

である。従って、

$$\mathrm{Re}(s) > 1 + \frac{2\mu_n}{|\phi_n(\mu_n)|}$$

のとき、

$$\zeta(s + i(t_1 + h_1 n)) - \zeta(s + i(t_2 + h_2\sigma(n))) \neq 0.$$

そこで、

$$b := \inf_n \left\{ 1 + \frac{2\mu_n}{|\phi_n(\mu_n)|} \mid \phi_n(m) \neq 0 \right\}$$

とおけば、$\mathrm{Re}(s) > b$ のとき、

$$\zeta(s + i(t_1 + h_1 n)) \neq \zeta(s + i(t_2 + h_2\sigma(n)))$$

となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する。よって、(2.2) が成り立てば、(i) と (ii) のいずれ一つが成り立たなければならない。

定理 2 を得るには $\zeta(s)$ のディリクレ級数を用いるため、絶対収束軸 $\mathrm{Re}(s)=1$ を超えて、臨界領域内に拡張することができない。一方、我々は $\zeta(s)$ の普遍性を用いて、特殊な離散的数列に対して、$\zeta(s)$ が値を共有しないことを明らかにした。ここで考えたい数列は、ビーティ数列 $\mathcal{B}_\alpha$ である。

$\alpha\in\mathbb{R}$ に対して、ビーティ数列を $\mathcal{B}_\alpha := \{\lfloor n\alpha\rfloor\}_{n\in\mathbb{N}}$ と定める。ここで、$\lfloor\cdot\rfloor$ を通常の意味での床関数（ガウス記号とも通称）を表す。即ち、$\lfloor x\rfloor$ を x 以下最大の整数を表す。特に、無理数 $\alpha>1$ に対して、α' を

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}=1$$

と定めれば、

$$\mathcal{B}_\alpha\cap\mathcal{B}_{\alpha'}=\emptyset \quad \text{かつ} \quad \mathcal{B}_\alpha\cup\mathcal{B}_{\alpha'}=\mathbb{N} \tag{2.3}$$

が成り立つ。

(2.3) を用いて、正の整数全体より次のように置換を定める：無理数 $\alpha>1$ に対して、全単射 $\sigma_\alpha:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ を

$$n\mapsto\sigma_\alpha(n)=\begin{cases}\lfloor m\alpha'\rfloor, & \exists m\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ n=\lfloor m\alpha\rfloor,\\ \lfloor m\alpha\rfloor, & \exists m\in\mathbb{N}\ \text{s.t.}\ n=\lfloor m\alpha'\rfloor\end{cases} \tag{2.4}$$

と定める。次に、$h_1,h_2>0$ に対して、集合 $\mathcal{A}_{h_1}$ と $\mathcal{A}_{h_2}$ を

$$\mathcal{A}_{h_j} := \left\{h_j\frac{\log q}{2\pi} : q\in\mathbb{Q}_{>0}\right\}, \quad j=1,2$$

とおき、$\mathcal{A} := \mathcal{A}_{h_1}\times\mathcal{A}_{h_2}\setminus\{(0,0)\}$ に対して、

$$\mathcal{L}(h_1,h_2) := \left\{\alpha\in\mathbb{R}\mid\forall(\theta_1,\theta_2)\in\mathcal{A}\ \text{に対して、}1,\alpha,\alpha',\alpha\theta_1+\alpha'\theta_2\ \text{は}\ \mathbb{Q}\ \text{上一次独立}\right\}$$

とおく。

定理 3. $t_1,t_2\in\mathbb{R}$ 、$h_1,h_2>0$ 、$\alpha\in\mathcal{L}(h_1,h_2)\cap(1,+\infty)$ とする。また、$\mathcal{K}$ を連結な補集合を持つ $\{s\in\mathbb{C}\mid 1/2<\mathrm{Re}(s)<1\}$ 上コンパクトな部分集合とし、f,g を $\mathcal{K}$ の内点において解析的な $\mathcal{K}$ 上非零的連続関数とする。このとき、任意 $\varepsilon>0$ に対して、

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left\{1\le n\le N \;\middle|\; \begin{array}{l}\max_{s\in\mathcal{K}}|\zeta(s+i(t_1+h_1\lfloor n\alpha\rfloor))-f(s)|<\varepsilon\\ \max_{s\in\mathcal{K}}|\zeta(s+i(t_2+h_2\lfloor n\alpha'\rfloor))-g(s)|<\varepsilon\end{array}\right\}>0 \tag{2.5}$$

が成り立つ。

定理 3 はビーティ数列 $\mathcal{B}_\alpha$ が生成する (2.3) による $\mathbb{N}$ の分割をシフトとする離散的同時普遍性の定理と見なせる。実際、(2.4) で定まった σ_α を用いれば (2.5) は

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\#\left\{1\le n\le N \;\middle|\; \begin{array}{l}\max_{s\in\mathcal{K}}|\zeta(s+i(t_1+h_1 n))-f(s)|<\varepsilon\\ \max_{s\in\mathcal{K}}|\zeta(s+i(t_2+h_2\sigma_\alpha(n)))-g(s)|<\varepsilon\end{array}\right\}>0$$

に書き換えられる。故に、次の結果が直ちに導ける。

系. $1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1$、$\alpha \in \mathcal{L}(1,1) \cap (1,+\infty)$ に対して、

$$\zeta(s+in) \neq \zeta(s+i\sigma_\alpha(n)), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

が成り立つ。

補足. 上記の定理 3 とその系を、定理 2 のように、任意の等差数列に対して拡張することが可能であるが、差 h_j に対してたくさんの場合分けを考慮する必要がある。

3 リーマンゼータ関数の臨界領域の右半分における普遍性及び値の共有

定理 3 のように、$\mathcal{K}$ を連結な補集合を持つ $\{s \in \mathbb{C} \mid 1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1\}$ 上コンパクトな部分集合であり、f, g を $\mathcal{K}$ の内点において解析的であるような $\mathcal{K}$ 上非零的連続関数とする。

定理 3 の証明においては、素数全体を $2 = p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \dots$ と書き並べて、$m \in \mathbb{N}$ と $\mathrm{Re}(s) > 0$ に対して、有限オイラー積

$$\zeta_m(s) = \prod_{i=1}^{m} (1 - p_i^{-s})^{-1}$$

を用いる。これが $\zeta(s)$ を

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |\zeta(s+i\tau) - \zeta_m(s+i\tau)|^2 \,\mathrm{d}\tau = 0$$

（cf. [BM09, Section 11.3]）のように近似する。詳細を省略するが、これ及び [DS04, Theorem 1] を用いれば、$x_n \geq 0$ 、$x_n = O(n)$ 、$x_{n+1} - x_n = \Omega(1)$ を満たす増加する実数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leq n \leq N \mid \max_{s\in\mathcal{K}} |\zeta(s+ix_n) - \zeta_m(s+ix_n)| < \varepsilon \right\} > 1 - \varepsilon \tag{3.1}$$

が全ての $m \geq M$ に対して成り立つような $M \in \mathbb{N}$ が存在する。即ち、$\zeta_m(s+ix_n)$ が $1/2 < \mathrm{Re}(s) < 1$ の上で、$\zeta(s+ix_n)$ を近似できる。

次に、$\alpha \in \mathcal{L}(h_1, h_2) \cap (1, +\infty)$ 及び素数からなる有限集合 $\mathcal{P}_1$ と $\mathcal{P}_2$ に対して、$(\#\mathcal{P}_1 + \#\mathcal{P}_2)$ 次ベクトルの列

$$\left\{ \left(\left((t_1 + \lfloor n\alpha \rfloor h_1) \frac{\log p}{2\pi} \right)_{p\in\mathcal{P}_1}, \left((t_2 + \lfloor n\alpha' \rfloor h_2) \frac{\log q}{2\pi} \right)_{q\in\mathcal{P}_2} \right) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

が mod 1 で一様分布することを確かめる。一様分布 mod 1 に関しては、[Wey16] を参照。

最後に、以上の一様分布性により、[Pań18, Lemma 4] を用いれば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $M \in \mathbb{N}$ と M に依らない定数 $c > 0$ が存在して、

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left\{1 \le n \le N \;\middle|\; \begin{array}{l} \max_{s\in\mathcal{K}} |\zeta_m(s+i(t_1+h_1\lfloor n\alpha\rfloor)) - f(s)| < \varepsilon \\ \max_{s\in\mathcal{K}} |\zeta_m(s+i(t_2+h_2\lfloor n\alpha'\rfloor)) - g(s)| < \varepsilon \end{array}\right\} > c$$

が全ての $m \ge M$ に対して成り立つことがわかる。実際、[Pań18, Lemma 4] より簡単なもので十分である [LSSS, Lemma 8]。これ及び (3.1) を用いれば、定理 3 が直ちに得られる。

補足.

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left\{1 \le n \le N \mid \max_{s\in\mathcal{K}} |\zeta(s+i\tau_n) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

が（離散集合 $\{\tau_n\}$ における）$\zeta(s)$ の（離散的）普遍性を意味する。$\zeta(s)$ の普遍性は S. M. Voronin [Vor75] により初めて証明され、普遍性を持つ関数の初めての非自明な具体例である。その後、たくさんのゼータ関数や L 関数が普遍性を持つことが明らかになり、より強い普遍性質も調べられてきた。ゼータ関数及び L 関数の普遍性に関する詳しいことは [Mat06, Mat15] にまとめてある。

参考文献

[Bag81] B. Bagchi, The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, Ph.D. Thesis, Indian Stat. Institute, Calcutta (1981)

[BM09] F. Bayart and É. Matheron, Dynamics of linear operators, Cambridge University Press, 2009

[DS04] P. Duren and A. Schuster, Bergman Spaces, American Mathematical Society, 2004

[LF13] M. L. Lapidus and M. van Frankenhuijsen, Fractal geometry, complex dimensions, and zeta functions (second edition), Springer, New York-Berlin, 2013

[LSSS] J. Lee, A. Sourmelidis, J. Steuding, A. I. Suriajaya, The values of the Riemann zeta-function on discrete sets, to appear in ASPM Series Proceedings for the Conference *Various Aspects of Multiple Zeta Functions*, preprint available on arXiv:1710.11367 [math.NT].

[Mat15] K. Matsumoto, A survey on the theory of universality for zeta and L-functions, in: Number theory. Plowing and starring through high wave forms, *Proceedings of the 7th China-Japan Seminar, Fukuoka, Japan, October 28 - November 1, 2013*, M. Kaneko (ed.) et al., World Scientific 2015, Series on Number Theory and Its Applications 11, 95–144

[Mat06] K. Matsumoto, An Introduction to the Value-Distribution Theory of Zeta-Functions, *Šiauliai Math. Semin.* **1** (2006), 61–83

[Pań18] Ł. Pańkowski, Joint universality for dependent L-functions, *Ramanujan J.* **45** (2018), 181–195

[Put54a] C. R. Putnam, On the Non-Periodicity of the Zeros of the Riemann Zeta-Function, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 97–99

[Put54b] C. R. Putnam, Remarks on Periodic Sequences and the Riemann Zeta-Function, *Amer. J. Math.* **76** (1954), 828–830

[Rei82] A. Reich, Dirichletsche Reihen auf arithmetischen Progressionen, *Monatsh. Math.* **93** (1982), 33–37

[Ste07] J. Steuding, Value-distribution of L-functions, Springer, Berlin, 2007

[Vor75] S.M. Voronin, Theorem on the 'universality' of the Riemann zeta-function, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.* **39** (1975) 475-486 (Russian); *Math. USSR Izv.* **9** (1975), 443–445

[Wey16] H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, *Math. Ann.* **77** (1916), 313–352

RIKEN iTHEMS
Wako, Saitama 351-0198
JAPAN

E-mail address: `adeirmasuriajaya@riken.jp`

理化学研究所・数理創造プログラム　Ade Irma Suriajaya

以上