# 指数型 Riemann ゼータ母関数について
# On exponential generating functions of the Riemann zeta-function

野田 工　日本大学・工学部　Takumi Noda*†

Department of Mathematics, College of Engineering, Nihon University,

Kôriyama, Fukushima 963–8642, Japan

**1.** 序

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ の母関数としては様々な関数が知られている。最も基本的な例として Hurwitz ゼータ関数 $\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s}$ は関係式

$$\zeta(s,1+x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+m)}{\Gamma(s)\,m!} \zeta(s+m)(-x)^m$$

により二項級数型の母関数とみなせる。この事実を 1917 年に Ramanujan [Ra] が Glaisher の定理

$$\gamma = 1 - 2\left(\frac{\zeta(3)}{3\cdot 4} + \frac{\zeta(5)}{5\cdot 6} + \frac{\zeta(7)}{7\cdot 8} + \cdots\right)$$

の一般化において利用し ($\gamma$ はオイラーの定数), $r > s > 0$ に対して次の等式を示した。

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma(2r)\Gamma(r-s)}{\Gamma(r)\Gamma(2r-s)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(s)_{2k-1}}{(2k-1)!} \frac{(r)_{2k-1}}{(2r)_{2k-1}} \zeta(s+2k-1).$$

ここで $\Gamma(s)$ はガンマ関数, $(s)_n = \Gamma(s+n)/\Gamma(s)$ はポッホハマー関数（昇冪）である。上記の結果の類似と一般化は当然ながら現在にいたるまで広くなされていて, 例えば Srivastava–Choi [SC] には関連する膨大な結果が記載されている。

本報告では同じく基本的な Riemann ゼータ関数の指数型母関数について歴史的な経緯と先行研究をはじめに紹介する。報告者によって得られた Hankel 型積分表示とそこから従う関数等式・関数関係式について述べ, モジュラー群上の正則 Poincaré 級数との関係を示す。非正則型などへの一般化の可能性についても述べる。

*noda.takumi@nihon-u.ac.jp

†The author was supported by Grants-in-Aid for Scientific Research (No. 16K05078), Japan Society for the Promotion of Science (JSPS) and the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology of Japan.

以下 $J_\nu(z), Y_\nu(z)$ はそれぞれ第一種, 第二種 Bessel 関数とし, $I_\nu(z), K_\nu(z)$ はそれぞれ第一種, 第二種変形 Bessel 関数とする。

## 2. 指数型母関数の Dirichlet 級数表示

指数型 Riemann ゼータ母関数として, $s \in \mathbb{C} \setminus \{1, 0, -1, -2, ...\}$ と $\lambda > 0$ に対し, 次のような Dirichlet 級数が定義できる。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\{-\lambda/n\}}{n^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^m}{m!} \zeta(s+m). \tag{1}$$

より一般に次の Dirichlet 級数を定義する。

**定義 1** 複素変数 $s \in \mathbb{C}$ と $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$\zeta_{\mathrm{exp.I}}(s;\lambda;z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp\{-\lambda/(n+z)\}}{(n+z)^s} \tag{2}$$

を定める。ここで $z \in \mathbb{C}$ であり, $0 < \mathrm{Re}(z) \leq 1$ を仮定する。

一般に関数 $\zeta_{\mathrm{exp.I}}(s;\lambda;z)$ は $s = 1$ において極を持つ。歴史的には Tauberian 型定理に関する問題意識から, Hardy–Littlewood [HL] により次のような関連する精密な結果が得られている。

**定理 1 (Hardy–Littlewood, 1936)** *2* つの関数

$$P(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \cos\frac{x}{n}, \qquad Q(x) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} \sin\frac{x}{n}$$

は $x \to \infty$ のとき発散する。さらに次の評価が成り立つ。

$$P(x) = \Omega(\log\log x), \qquad Q(x) = \Omega(\sqrt{\log\log x}).$$

積分平均に関して, Segal[Se](1972) は Bessel 関数を用いる次の展開式を与えた。

$$\int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{t}{n} dt = \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2} + \left(\frac{\pi}{2}x\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} J_0(2\sqrt{2\pi x n}).$$

上記の結果 [Se] に示唆され, 鹿野健氏 [Kn] は指標付きの場合に Voronoï型和公式を示した。

**定理 2 (鹿野, 1976)** 法 $k$ の原始的 *Dirichlet* 奇指標 $\chi$ に対して次が成り立つ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \sin\frac{x}{n} = -\frac{2i}{k} G(\chi) \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\chi}(n) \left\{ K_0(2\sqrt{2\pi n x/k}) + \frac{\pi}{2} Y_0(2\sqrt{2\pi n x/k}) \right\}. \tag{3}$$

鹿野氏は偶指標の場合, $\cos(x/n)$ の場合などにも同様の Bessel 関数を用いる展開式を与えている。証明には Berndt[Be] による Poissson 和公式の $\chi$-類似を援用している。

　等式 (3) はオリジナルの Voronoï和公式の見事な類似であるので, よく知られた結果であるが比較のため挙げておきたい。

**定理 3 (G. F. Voronoï, 1904)** 約数関数 $d(x)$ に対して次が成り立つ。

$$\sum_{n\le x} d(n) = x\log x + (2\gamma-1)x - \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi}x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-\frac{1}{2}}\left\{K_1(4\pi\sqrt{nx}) + \frac{\pi}{2}Y_1(4\pi\sqrt{nx})\right\}.$$

## 3. 指数型母関数の漸近挙動

　一方, 指数型ゼータ母関数という視点・文脈において Chowla–Hawkins[CH] は次のような評価式を得た。

**定理 4 (Chowla–Hawkins, 1962)** 級数

$$G_0(x) = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(m)}{m!}(-x)^m \qquad (|x| < +\infty),$$

は $x \to +\infty$ のとき, 次の漸近公式を持つ。

$$G_0(x) = x\log x + (2\gamma-1)x + \frac{1}{2} + O(e^{-A\sqrt{x}}).$$

ここで $A$ はある正定数である。

誤差項の研究が進められる中で, Buschman–Srivastava[BS] は実パラメータ, 桂田昌紀氏 [Kt] は一般の複素パラメータを含む次のような級数を導入した。

**定義 2 (Buschman–Srivastava, 1993. 桂田, 1997)** 複素パラメータ $\nu \in \mathbb{C}$ に対して次を定義する。

$$G_\nu(x) = \sum_{m>\mathrm{Re}\,\nu+1}^{\infty} \frac{\zeta(m-\nu)}{m!}(-x)^m. \tag{4}$$

関数 $G_\nu(x)$ の評価について, 桂田昌紀氏 [Kt] により Mellin–Barnes 積分表示を用いて次の評価式と Voronoï型和公式が証明された。

**定理 5 (桂田, 1997)** *(i)* 条件 $\nu \notin \{-1,0,1,2,\ldots\}$ のとき

$$G_\nu(x) = \Gamma(-\nu-1)x^{\nu+1} - \sum_{n=0}^{\lfloor \mathrm{Re}\,\nu+1\rfloor} \zeta(n-\nu)\frac{(-x)^n}{n!} + \mathscr{G}_\nu(x),$$

と定める。空和は零とみなす。

*(ii)* 条件 $\nu\in\{-1,0,1,2,\dots\}$ のとき

$$G_\nu(x)=(-1)^\nu\frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\left(\log x+2\gamma-\sum_{n=0}^{\nu+1}\frac{1}{n}\right)-\sum_{n=0}^{\nu+1}\zeta(n-\nu)\frac{(-x)^n}{n!}+\mathscr{G}_\nu(x),$$

と定める。

このとき, 残余項 $\mathscr{G}_\nu(x)$ は任意の正定数 $C>0$ に対して次を満たす。

$$\mathscr{G}_\nu(x)=O(x^{-C}).$$

ここで $O$-定数は $C$ と $\nu$ にのみ依存する。さらに次のような展開式が成り立つ。

$$\mathscr{G}_\nu(x)=2\sum_{n\in\mathbb{Z},\,n\neq0}(2\pi in/x)^{(-\nu-1)/2}e^{2\pi ixn}K_{\nu+1}(2\sqrt{2\pi inx}).\tag{5}$$

**4.** 主結果

Dirichlet 級数表示 (1) と母関数表示 (4) を比較して, 条件 $s\notin\{1,0,-1,-2,\dots\}$ の下で次が容易に確かめられる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(-\lambda/n)}{n^s}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^m}{m!}\zeta(s+m)=G_{-s}(\lambda)+\sum_{m=0}^{\lfloor\mathrm{Re}(-s+1)\rfloor}\frac{(-\lambda)^m}{m!}\zeta(s+m)$$
$$=\Gamma(s-1)\lambda^{1-s}+\mathscr{G}_{-s}(\lambda).$$

このとき

**命題 1 (N.)** 関数 $\mathscr{G}_{-s}(\lambda)$ は次の *Hankel* 路積分表示を持つ。

$$\mathscr{G}_{-s}(\lambda)=\frac{1}{\pi i\lambda^s}\int_{-\infty}^{(0+)}\frac{u^{(s-1)/2}e^{u/\lambda}}{1-e^{u/\lambda}}K_{s-1}(2\sqrt{u})du.$$

この積分表示は桂田の和公式 *(5)* の別証明を与える。

モジュラー群上の正則 Poincaré 級数の逆 Mellin 変換された Fourier 級数の内部に新種の Dirichlet 級数が存在することを報告者は看取し, このゼータ関数 (*J*-Bessel ゼータ関数) について Hankel 路積分表示を与えた [No1]。Poincaré 級数が Fourier 級数展開を有することは *J*-Bessel ゼータ関数がある種の関数等式を有することを強く示唆していたが, Hankel 路積分表示を経由することにより期待されていた関数関係式と母関数表示を導出した。拡張された (関数等式を仮定しない)Selberg クラスの研究に

おいて Kaczorowski–Perelli ([KP1], [KP2]) が導入し解析接続を示した非線形 twist の Dirichlet 級数のクラスに, 上記 [No1] において定義した $J$-Bessel ゼータ関数は積分表示・関数関係式を持つ具体例として含まれる。

同様に (2) で定義した指数型ゼータ母関数が Hankel 路積分表示を持ち, そこから関数関係式が従うことを示すことができる。系としてモジュラー群上の正則 Poincaré 級数の Fourier 級数展開を導くことも自然に証明される。

**定理 6 (N. [No2])** 複素パラメータ $z \in \mathbb{C}$ について $|\arg z| < \pi/2$ と $0 < \mathrm{Re}(z) \leq 1$ とし, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。このとき

$$\zeta_{\exp.\mathrm{I}}(s;\lambda;z) = \lambda^{1-s}\Gamma(s-1) + \frac{\lambda^{-s}}{\pi i}\int_{\infty e^{i\theta}}^{(0+)} \frac{u^{(s-1)/2}e^{zu/\lambda}}{1-e^{u/\lambda}} K_{s-1}(2\sqrt{u})du$$

が成り立つ。ここで $\theta$ は $\pi/2 - \min\{0, \arg z\} < \theta - \arg\lambda < 3\pi/2 - \max\{0, \arg z\}$ をみたす値であり, $\int_{\infty e^{i\theta}}^{(0+)}$ は $\infty e^{i\theta}$ を始点とする *Hankel* 路を表す。右辺の積分表示は $s \in \{1, 0, -1, -2, \dots\}$ を除いた全 $s$-平面上への正則な解析接続を与え, 次の関数関係式を導く。

$$\begin{aligned}\zeta_{\exp.\mathrm{I}}(s;\lambda;z) &+ (-1)^s\zeta_{\exp.\mathrm{I}}(s;-\lambda;1-z)\\ &= 2\pi i e^{-\pi i s}\sum_{n=1}^{\infty}(2\pi i n/\lambda)^{(s-1)/2}e^{2\pi i z n}I_{s-1}(2\sqrt{2\pi i n\lambda}).\end{aligned}$$

特に $x \in \mathbb{R}$, $0 < x \leq 1$ および $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ の条件の下で, 次の変換公式が成り立つ。

$$\zeta_{\exp.\mathrm{I}}(s;\lambda;x) = \lambda^{1-s}\Gamma(s-1) + 2\sum_{n\in\mathbb{Z},\, n\neq 0}(2\pi i n/\lambda)^{(s-1)/2}e^{2\pi i x n}K_{s-1}(2\sqrt{2\pi i n\lambda}).$$

**定義 3 (正則 Poincaré 級数)** モジュラー群 $SL(2,\mathbb{Z})$ 上の重さ $k$ の *m-th Poincaré* 級数は次で定義される。

$$P_m^k(z) := (-1)^k \sum_{\{c,d\}} \frac{\mathrm{e}(m\gamma(z))}{(cz+d)^k}$$

和は完全既約代表系 $\Gamma_\infty\backslash\Gamma \cong \{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \mid \gcd(c,d) = 1,\ c > 0 \text{ or } c = 0, d = 1\}$ の元 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ をわたる。

定理 6 の系として次を得る。

**系 1 (正則 Poincaré 級数の Fourier 級数展開)**

$$P_m^k(z) = (-1)^k\mathrm{e}(mz) + (-1)^{\frac{k}{2}}\,2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}}\sum_{c=1}^{\infty}\frac{1}{c}K_c(m,n)J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{mn}\right)\mathrm{e}(nz).$$

ここで *Kloosterman* 和は次で定義される。

$$K_c(m,n) = \sum_{\substack{d \mod c \\ \gcd(c,d)=1}} \mathrm{e}\left(\frac{m\bar{d}+nd}{c}\right), \qquad (\bar{d}d \equiv 1 \mod c).$$

**5. 非正則 Poincaré 級数との関連**

非正則 Poincaré 級数と関連する $\zeta_{\exp.\mathrm{I}}(s;\lambda;z)$ の非正則・双方向版である

$$\zeta_{\exp.\mathrm{II}}(s;\lambda;z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-\lambda/(n+z)\}}{|n+z|^s}$$

については, 現在のところ完全な Hankel 路積分表示は得られていない。特別な条件の場合については, テータ変換公式を経由してある種の積分表示が得られる。

参考文献


[BS] R. G. Buschman and H. M. Srivastava, *Asymptotic behavior of some power series with ζ-function in the coefficients*, Mh. Math. 115 (1993), 291–298.

[Be] B. C. Berndt, *Character analogs of the Poisson and Euler-Maclaurin summation formulas with applications*, J. Number Theory. 7 (1975), 413–445.

[CH] S. Chowla and D. Hawkins, *Asymptotic expansions of some series involving the Riemann zeta function*, J. Indian Math. Soc. (N. S.) 26 (1962), 115–124.

[HL] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Notes on the theory of series (XX): On Lambert series*, Proc. London Math. Soc. 41 (1936), 257–270.

[KP1] J. Kaczorowski and A. Perelli, *A note on Bessel twists of L-functions*, in *Analytic Number Theory, In Honor of Helmut Maier's 60th Birthday*, Ed. C. Pomerance and M. T. Rassias, Springer, 2015.

[KP2] J. Kaczorowski and A. Perelli, *Twists and resonance of L-functions, I*, J. Eur. Math. Soc.18 (2016), 1349–1389.

[Kn] T. Kano, *Some applications of the character analogue of the Poisson summation formula*, M. J. Okayama U. 19. (1977), 111–119.

[Kt] M. Katsurada, *On Mellin–Barnes' type integrals and sums associated with the Riemann zeta-function*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 62 (76) (1997), 13–25.

[No1] T. Noda, *On the functional properties of Bessel zeta-functions*, Acta Arith. 171, No.1 (2015), 1-13.

[No2] T. Noda, *The exponential type generating function of the Riemann zeta-function revisited*, preprint.

[Ra] S. Ramanujan, *A series for Euler's constant* $\gamma$, Messenger Math. 46 (1916–17), 73–80.

[Se] S. L. Segal, *On* $\sum 1/n \sin(x/n)$, J. London Math. Soc. (2), 4 (1972), 385–393.

[SC] H. M. Srivastava and J. Choi, *Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals*, Elsevier, Amsterdam, 2011.