Character degrees and class lengths in p-blocks of some finite groups

Akihiko Hida (Faculty of Education, Saitama University)
飛田明彦（埼玉大学教育学部）

Masao Kiyota (Tokyo Medical and Dental University)
清田正夫（東京医科歯科大学名誉教授）

1 序文

G を有限群とし、G の既約指標全体を $\mathrm{Irr}(G)$ 、共役類全体を $\mathrm{Cl}(G)$ で表す。$\mathrm{Irr}(G) = \{\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_k\}$ 、$\mathrm{Cl}(G) = \{K_1, K_2, \cdots, K_k\}$ とおく。オハイオ州立大学の原田耕一郎氏は [6] において次の予想を提出した。

(H) $\quad h(G) = \dfrac{|K_1||K_2|\cdots|K_k|}{\chi_1(1)\chi_2(1)\cdots\chi_k(1)}$ とおくとき、$h(G)$ は整数か？

（例１） G がアーベル群の時、$h(G) = \dfrac{1 \cdot 1 \cdots 1}{1 \cdot 1 \cdots 1} = 1.$

（例２） $G = \mathrm{SL}(2,3)$ の時、$h(G) = \dfrac{1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6}{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} = 64.$

熊本大学の千吉良直紀氏により、ATLAS 単純群をはじめとする非常に多くの群について (H) が成立することが確かめられている。また、対称群 S_n と交代群 A_n について (H) が成立することが証明されている（[8] を参照)。(H) が成立するための十分条件はいくつか得られているものの（[7], [9] などを参照)、現在のところ、(H) の一般的解明には至っていない。本稿では、予想 (H) と関連する問題を有限群のブロック理論を通して考察する。

2　ブロック細分

以下、序文の記号をそのまま用いる。 標数 $p>0$ の代数的閉体 F 上の群環 FG の直既約直和因子イデアル B を G の p ブロックと呼ぶ。G の p ブロック全体を $\mathrm{Bl}(G)$ で表す。$\mathrm{Irr}(G)$ の各元 χ は唯一つの $B \in \mathrm{Bl}(G)$ に属している。B に属す $\mathrm{Irr}(G)$ の元全体を $\mathrm{Irr}(B)$ で表し、$k(B) = |\mathrm{Irr}(B)|$ とおく。こうして G の既約指標のブロック分割

$$\mathrm{Irr}(G) = \bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \mathrm{Irr}(B)$$

が得られる。 同様に G の共役類のブロック分割

$$\mathrm{Cl}(G) = \bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \mathrm{Cl}(B)$$

も定義される。（ [3] p240 参照。） ここで、$\mathrm{Cl}(B)$ は一意的に定まるとは限らないが、$|\mathrm{Cl}(B)| = k(B)$ は成立する。原田予想 (H) のブロック細分として次の予想を立てる。

(HB)　　$h(B) = \dfrac{\prod_{K \in \mathrm{Cl}(B)} |K|}{\prod_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} \chi(1)}$ とおくとき、$h(B)$ は p 局所整数か？

$h(G) = \prod_{B \in \mathrm{Bl}(G)} h(B)$ なので、任意の素数 p、任意の p ブロック $B \in \mathrm{Bl}(G)$ について (HB) が成立すれば、(H) が成立する。

[2], [11] の結果を用いて、次が得られた。

定理 1　　B が tame ブロックならば、(HB) が成立する。

ここで、B が tame とは、$p=2$ かつ B の不足群 D が 2 面体群、準 2 面体群、一般四元数群のいずれかであること。不足群 D がアーベル群のときにも (HB) は成立する（[7]）ので定理 1 とあわせて、次が得られる。

定理 2　　G のすべてのシロー部分群がアーベル群、2 面体群、準 2 面体群、一般四元数群のいずれかであるならば、(H) が成立する。

3　モジュラー版

原田予想 (H) やそのブロック細分 (HB) の p モジュラー版として次の問題が考えられる。G の既約 Brauer 指標全体を $\mathrm{IBr}(G)$、G の p 正則共役類全体を $\mathrm{Cl}_{p'}(G)$ とする。前節と同様にそれらは

$$\mathrm{IBr}(G) = \bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \mathrm{IBr}(B), \qquad \mathrm{Cl}_{p'}(G) = \bigcup_{B \in \mathrm{Bl}(G)} \mathrm{Cl}_{p'}(B)$$

とブロック分割されて、各ブロック B について $|\mathrm{IBr}(B)| = |\mathrm{Cl}_{p'}(B)|$ が成立する。以上の記号のもとで、原田予想のモジュラー類似 (HM) とそのブロック細分 (HMB) が次のように定式化される。

(HM)　　$hm(G) = \dfrac{\prod_{K \in \mathrm{Cl}_{p'}(G)} |K|}{\prod_{\varphi \in \mathrm{IBr}(G)} \varphi(1)}$ とおくとき、$hm(G)$ は p 局所整数か？

(HMB)　　$hm(B) = \dfrac{\prod_{K \in \mathrm{Cl}_{p'}(B)} |K|}{\prod_{\varphi \in \mathrm{IBr}(B)} \varphi(1)}$ とおくとき、$hm(B)$ は p 局所整数か？

(HMB) が成り立てば、当然、(HM) も成立する。4 節で述べる定理 5 から次の定理が得られる。

定理 3　G が p 可解群のとき、(HM) は成立する。また、B が p 可解群 G のブロックのとき、(HMB) は成立する。

次に (HB) と (HMB) の関連を調べるため、それらを defect を用いて言い換える。自然数 n の p 成分を n_p で表す。$\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ と $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ に対し、

$$|G|_p/\chi(1)_p = p^{d(\chi)}, \qquad |G|_p/\varphi(1)_p = p^{d(\varphi)}$$

とおき、$d(\chi)$, $d(\varphi)$ をそれぞれ χ, φ の defect という。$d(\chi)$ は非負の整数であるが、$d(\varphi)$ は負の整数となることもある。また $K \in \mathrm{Cl}(G)$ に対し、代表元 $x \in K$ の中心群 $\mathrm{C}_G(x)$ の p シロー群を K の不足群と呼び、$D(K)$ で表す。$D(K)$ は G 共役を除き一意的に定まる。$|D(K)| = p^{d(K)}$ とおき、K の defect $d(K)$ を定める。これらの術語を用

いると、(HB) と (HMB) はそれぞれ次のように言い換えられる。

(HB)’ $$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} d(\chi) \geq \sum_{K\in\mathrm{Cl}(B)} d(K)$$ は成り立つか？

(HMB)’ $$\sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(B)} d(\varphi) \geq \sum_{K\in\mathrm{Cl}_{p'}(B)} d(K)$$ は成り立つか？

上のふたつの不等式の関連を調べるため、もうひとつ術語を導入する。G の p 元 x と $\mathrm{C}_G(x)$ の p ブロック b_x の対 (x, b_x) を subsection と呼ぶ。b_x が ${b_x}^G = B$ を満たすとき、(x, b_x) を B subsection と呼ぶ。 B subsections 全体に G は共役で作用する。この作用の G 代表系を Γ と書く。$(1, B) \in \Gamma$ に注意せよ。 このとき、Brauer による等式

$$|\mathrm{Irr}(B)| = \sum_{(x,b_x)\in\Gamma} |\mathrm{IBr}(b_x)|$$

が成立する。この等式に defect による重みを付けた形の不等式

(*) $$\sum_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)} d(\chi) \geq \sum_{(x,b_x)\in\Gamma} \sum_{\varphi\in\mathrm{IBr}(b_x)} d(\varphi)$$

を考える。この不等式が成り立てば、(HB) と (HMB) を結びつけることができる。

定理 4　不等式 (*) が成り立つ場合には、(HMB) が成り立てば (HB) も成り立つ。

当初は不等式 (*) が常に成立するのではないかと期待していたが、その後反例が見つかり、(*) は一般には成り立たないことが分かった。(*) の反例として、(1) Tits 単純群 $G = {}^2F_4(2)'$、B は主 3 ブロック、(2) $G = SL(2, 3)$、B は主 2 ブロックが挙げられる。一方、不足群がアーベル群であるブロック B では (*) が成立する。そこで、次の問題を提出する。

問題　ブロック B が不等式 (*) を満たすための条件を求めよ。

4 ヴァーテックス版

この節では、加群の vertex 理論と予想 (HMB) との関連を考察する。前節までの記号をそのまま使う。H を G の部分群、V を FG 加群、W を FH 加群とするとき、V_H, W^G によって、それぞれ、H への制限加群、G への誘導加群を表す。直既約 FG 加群 V に対して、V が $(V_Q)^G$ の直和因子となるような極小な部分群 Q を V の vertex と呼び、$\mathrm{vx}(V)$ で表す。$\mathrm{vx}(V)$ は G の p 部分群で、G 共役を除き一意的に定まる。Green の定理 [4] により、$|G:\mathrm{vx}(V)|_p$ は V の次元 $\dim(V)$ を割りきる。

さて、$\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ に対応する単純 FG 加群を S とすると、$|G:\mathrm{vx}(S)|_p$ は $\varphi(1) = \dim(S)$ を割り切る。ここで、$|\mathrm{vx}(S)| = p^{v(\varphi)}$ とおくと、$d(\varphi)$ の定義から、不等式 $v(\varphi) \geq d(\varphi)$ が成り立つ。よって、もし (HMB) が、言い換えれば、(HMB)' が成り立つならば、次の (VB) が成立しなくてはならない。

$$\text{(VB)} \qquad \sum_{\varphi \in \mathrm{IBr}(B)} v(\varphi) \geq \sum_{K \in \mathrm{Cl}_{p'}(B)} d(K) \qquad \text{は成り立つか？}$$

一般には (VB) は (HMB) よりかなり弱い予想であり、次の定理から実際に成立することがわかる。

定理 5（[10]）　$\mathrm{IBr}(B) = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_l\}$, $\mathrm{Cl}_{p'}(B) = \{K_1, \cdots, K_l\}$ とおき、φ_i に対応する単純 FG 加群を S_i とする。このとき、添え字をうまく書き換えると、

$$\mathrm{vx}(S_i) \geq_G D(K_i) \qquad (i = 1, \cdots, l)$$

が成立する。特に、任意の i について $v(\varphi_i) \geq d(K_i)$ が成立し、したがって、(VB) が成り立つ。

G が p 可解群のときには、Hamernik-Michler の定理 [5] より、任意の $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$ に対して $v(\varphi) = d(\varphi)$ が成立し、したがって、定理 5 から (HMB) が成立する。(VB) の不等式の等号成立条件について次の問題が考えられている。

問題　次は同値か？

(1) (VB) の不等式で等号が成り立つ。

(2) $|\mathrm{IBr}(B)| = 1$

(2) から (1) は自明に成り立つ。また、B が主ブロックのときや、G が p 可解群の場合には (1) から (2) が導かれる。

直既約加群 V の次元 $\dim(V)$ の下限を与える Green の定理は次のように拡張されている。

定理 (Bessenrodt-Willems [1]) V を vertex Q を持つ直既約 FG 加群とする。V の complexity を c、Q の p ランクを r とする。このとき、$p^{r-c}|G:Q|_p$ は $\dim(V)$ を割りきる。

$c \leq r$ なので、Bessenrodt-Willems の定理は Green の定理を含んでいる。Green の定理と予想 (HMB) から予想 (VB) を導いたのと同様の議論で、Bessenrodt-Willems の定理を用いて、次の予想 (CB) が導出できる。

(CB) $$\sum_{S \in \mathrm{IBR}(B)} (v(S) + c(S) - r(S)) \geq \sum_{K \in \mathrm{Cl}_{p'}(B)} d(K)$$ は成り立つか？

ここで、$\mathrm{IBR}(B)$ は B に属する単純 FG 加群 S（の同型類）全体の集合、$c(S)$ は S の complexity、$r(S)$ は $\mathrm{vx}(S)$ の p ランク、 $v(S)$ は $|\mathrm{vx}(S)| = p^{v(S)}$ とおいて定める。

(HMB) $\Longrightarrow$ (CB) $\Longrightarrow$ (VB) という論理関係があるが、(VB) と同様に (CB) も証明できる。

定理 6 ([10]) $\mathrm{IBR}(B) = \{S_1, \cdots, S_l\}$, $\mathrm{Cl}_{p'}(B) = \{K_1, \cdots, K_l\}$ とおき、添え字をうまく書き換えると、

$$v(S_i) + c(S_i) - r(S_i) \geq d(K_i) \qquad (i = 1, \cdots, l)$$

が成立する。特に、(CB) が成り立つ。

参考文献

[1] C. Bessenrodt and W. Willems, Relations between complexity and modular invariants and consequences for p-soluble groups, J. Algebra 86 (1984), 445-456

[2] R. Brauer, On 2-blocks with dihedral defect groups, Symposia Mathematica XIII(1974), 367-393

[3] W. Feit, The Representation Theory of Finite Groups, North-Holland, 1982

[4] J. A. Green, On the indecomposable representations of a finite group, Math. Z. 70(1959), 430-445

[5] W. Hamernik and G. Michler, On vertices of simple modules in p-solvable groups, Math. Sem. Giessen 121(1976), 147-162

[6] K. Harada, Revisiting character theory of finite groups, Bulletin of the Inst. Math. Academia Sinica (New Series) 13(2018), 383-395

[7] M. Kiyota, 原田予想 II とそのブロック分割, 数理解析研究所講究録 2061 (2018), 56-60

[8] A. Hida, Harada's conjecture on character degrees and class sizes— symmetric and alternating groups —, 数理解析研究所講究録 2086 (2018), 144-153

[9] A. Hida and M. Kiyota, Character degree products and class length products of some finite groups, 数理解析研究所講究録掲載予定 (2019)

[10] A. Hida and M. Kiyota, Lower defect groups and vertices of simple modules, preprint

[11] J. B. Olsson, On 2-blocks with quaternion and quasidihedral defect groups, J. Algebra 36(1975), 212-241