標数 p の多重ゼータ値入門

名古屋大学大学院多元数理科学研究科　原田遼太郎
RYOTARO HARADA
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS
NAGOYA UNIVERSITY

Abstract. 本稿は同講究録中の Yen-Tsung Chen 氏及び著者による記事への導入も兼ねた標数 p の多重ゼータ値への入門である．第 2 節にて標数 p の整数論における数, 関数といった基本的な事項を確認した後, 第 3 節にて Riemann ゼータ値の標数 p 類似を紹介し, その代数的独立性を述べる．続く第 4 節ではさらに Carlitz 加群やプレ t モチーフの概念を用意し, 第 5 節にて標数 p の多重ゼータ値の間に成り立つ線形独立性について, C.-Y. Chang 氏の 2014 年の結果を証明する．また標数 p における交代多重ゼータ値にも触れる．

1. 導入

本稿は 2019 年 12 月 13 日, 20 日と 2020 年 1 月 10 日, 17 日の 4 回にわたって著者により名古屋大学大学院多元数理科学研究科において行われたレクチャー“標数 p の整数論入門” に基づき, 本講究録に収録されている標数 p の多重ゼータ値に関する記事 [10], [16] への入門として作成された．

代数体と有限体上の一変数関数体の類似性に立脚して標数 p の数論が考えられている．代数体と関数体の類似点は枚挙に暇がない．例えば, 有理数体 $\mathbb{Q}$ などの代数体を完備化という構成によって局所コンパクトな位相体 (局所体) に埋め込む事が整数論では重要であるが, 全ての局所コンパクト (可換) 体は $\mathbb{Q}$ または $\mathbb{F}_p(\theta)$ を完備化して得られる体の代数拡大であることが知られている ([27] Chapter 1 Theorems 5 and 8). つまり, “大域体” は数体と有限体上の一変数関数体しか存在せず, 実際に [27] では代数体の類体論と関数体の類体論が平行して構築されている．

$\mathbb{F}_p(\theta)$ やその分離拡大体は $\mathbb{F}_p$ 上の代数曲線の関数体として現れるため, 標数 p の大域体を調べることは $\mathbb{F}_p$ 上の一次元 (双有理) 幾何学を考えることと等しい．この考え方が代数体と有限体上の一変数関数体の類似を通じて代数体に持ち込まれることにより, 代数体を幾何学的にと

---

m15039r@math.nagoya-u.ac.jp
記述 松月大知, 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 (Daichi Matsuzuki, Graduate School of Mathematics, Nagoya University).

らえることが可能になった. また, 標数 0 における未解決問題の標数 p 類似が解決している例 (e.g. 定理 3.26, 定理 5.21) が存在することも注目に値する.

このレクチャーノートで扱う類似現象は特殊関数や特殊値に関するものである. まず 2 節において標数 p の整数論において"数"が何であるかを考える. つまり $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ および素数に対する標数 p 類似が導入される[1]. 3 節で標数 p における指数関数, 対数関数, ゼータ関数といった特殊関数を扱い, 4 節では関数の特殊値を論じる. そのために Carlitz 加群という重要な概念も考察する. 最後に 5 節で標数 p のゼータ値の多重化を考える. すなわち標数 p の多重ゼータ値を定義し, 代数的な独立性をプレ t モチーフの概念とともに紹介する. また最後に [16] で扱われる, 多重ゼータ値の一般化である交代多重ゼータ値の標数 p 類似についても触れる.

2. 標数 p の整数論における数

記号

p	: 固定された素数,
q	: 固定された p のベキ,
$\mathbb{F}_q$	: 位数 q の体, すなわち $\{x \in \overline{\mathbb{F}_p} \mid x^q = x\}$,
$A := \mathbb{F}_q(\theta)$	: $\mathbb{F}_q$ 上の一変数多項式環,
$k_\infty := \mathbb{F}_q((1/\theta))$	: $\mathbb{F}_q$ 上の $1/\theta$ に関する Laurent 級数体,
$\mathbb{C}_\infty := \widehat{\overline{k_\infty}}$	: k_∞ の代数閉体の完備化.

2.1. **標数 p における $\mathbb{Z}$ の類似物.** 標数 p の数論は多項式環 A を（有理）整数環 $\mathbb{Z}$ の類似物ととらえることから始まる.

この見立てを支持する現象はレクチャーノートを通じていくつも登場するしそれ以外にも数多くあるが, まずは最も基本的な事実を挙げる.

命題 2.1.
(1) A は Euclid 整域.
(2) $\#A^\times = q - 1 < \infty$.
(3) 0 でない A の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対し, 剰余体 $A/\mathfrak{p}$ は有限体.

Proof. ここでは証明の概略を与える.
(1) 多項式としての次数を Euclid 写像とすればよい.
(2) $A^\times = \mathbb{F}_q^\times$.
(3) 命題 2.1(1) より $\mathfrak{p} = (f)$ となる $f \in A$ をとってこれば $A/\mathfrak{p}$ は $\mathbb{F}_q$ ベクトル空間として $\mathbb{F}_q^{\deg f}$ と同一視できる. したがって, $A/\mathfrak{p}$ は有限体である.

□

[1]自然数は 0 を含まないものとする.

注意 2.2. $\mathbb{Z}$ も Euclid 整域であり, $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$. 更に, $\mathbb{Z}$ の 0 でない素イデアル (l) に対し, $\#(\mathbb{Z}/(l)) = l$.

注意 2.3. (1) は A の代わりに無限体上の多項式環を考えても成立するが, (2), (3) は係数体を有限体にした場合に特有の現象である.

注意 2.4. 命題 2.1 の (1) から次の一対一対応が得られる.

$$\{A\text{ のゼロでない素イデアル}\} \leftrightarrow \{A\text{ のモニック既約多項式}\}.$$

標数 0 の数論において,

$$\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q} \overset{\text{完備化}}{\rightsquigarrow} \mathbb{R} \overset{\text{代数閉包をとる}}{\rightsquigarrow} \mathbb{C}$$

と数を拡張したように, 標数 p においても A から数を拡張したい. それがこの節の残りの内容である.

2.2. **標数 p における $\mathbb{Q}$ の類似物.** 初めに整数環 $\mathbb{Z}$ から有理数体 $\mathbb{Q}$ を構成した手続きに沿って標数 p における $\mathbb{Q}$ の類似物を構成する.

定義 2.5.

$$k := \mathbb{F}_q(\theta) := \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in A, b \neq 0 \right\}.$$

注意 2.6. $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ は自明な元しか持たない. 一方, $\mathrm{Aut}(k)$ の元は数多く存在する. 例えば一次分数変換は $\mathrm{Aut}(k)$ の元である. また次のような自己同型もある.

$$\tau : f\theta^l \mapsto f^q\theta^l.$$

これは Frobenius 写像と呼ばれ, 重要な役割を持つ. 後の定義 2.25 で詳しく扱う.

2.3. **標数 p における $\mathbb{R}$ の類似物.** 次に有理数体 $\mathbb{Q}$ から実数体 $\mathbb{R}$ を構成した手続きをなぞって標数 p における $\mathbb{R}$ の類似物を構成する. すなわち, k を完備化する.

そのためには k に距離を入れる必要がある. またその距離は k の代数構造と整合的でなければいけない.

定義 2.7. F を体とする. F 上の写像 $|\cdot| : F \to \mathbb{R}$ が**付値**であるとは次の条件を満たすことである.

(1) 全ての $x \in F$ で $|x| \geq 0$,
(2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(3) $|xy| = |x||y|$,
(4) ある $D \in \mathbb{R}$ で $|x + y| \leq D \max\{|x|, |y|\}$.

$D = 1$ のとき $|\cdot|$ は**非 Archimedes 付値**であるという.

定義 2.8. (1) F を体, $|\cdot|$ を F 上の付値とする. 任意の Cauchy 列がある F の元に収束するとき F は**完備**であるという.

(2) F を体, $|\cdot|_F$ を F 上の付値とし, $\hat{F}$ を拡大体, $|\cdot|_{\hat{F}}$ を $\hat{F}$ 上の付値とする.
次の 3 条件が満たされるとき $\hat{F}$ は F の**完備化**であるという.
(a) $\hat{F}$ は完備,
(b) $a \in F$ に対して $|a|_F = |a|_{\hat{F}}$,
(c) F は $\hat{F}$ 内で稠密. つまり $\hat{F}$ の空でない開集合 U に対し, $U \cap F \neq \varnothing$.

定義 2.8(2) の状況で, F 上の付値 $|\cdot|_F$ が非 Archimedes ならば $|\cdot|_{\hat{F}}$ も非 Archimedes である.

例 2.9. $F = \mathbb{Q}$ とする. 通常の絶対値は付値である. (条件 4 の D は 2 とすればよい) この付値を $|\cdot|_\infty$ で表す. この付値による完備化が $\mathbb{R}$ である.

定義 2.10. k の付値 $|\cdot|_\infty$ を次で定める.

$$\left|\frac{a}{b}\right|_\infty := q^{\deg a - \deg b} \quad (a, b \in A).$$

これは well-defined である.
k_∞ を k の $|\cdot|_\infty$ による完備化とする.
この付値は非 Archimedes である.

定義 2.11. **付値環** $\mathcal{O}_\infty$, **付値イデアル** $\mathfrak{m}_\infty$ を次で定める.

$$\mathcal{O}_\infty := \{a \in k_\infty \mid |a|_\infty \leq 1\}.$$
$$\mathfrak{m}_\infty := \{a \in k_\infty \mid |a|_\infty < 1\}.$$

$\widehat{\mathcal{O}}_\infty$, $\hat{\mathfrak{m}}_\infty$ をそれぞれ $\mathcal{O}_\infty$, $\mathfrak{m}_\infty$ の k_∞ 内での閉包とする.

$k^\times$ の単元 ω について, $|\omega|_\infty = q^{-1}$ が成り立つとき ω を**素元**と呼ぶことにする.
以下, 素元 $1/\theta$ を取り固定する.

命題 2.12. k を $|\cdot|_\infty$ によって完備化すると, $\mathbb{F}_q$ 上の $\frac{1}{\theta}$ に関する Laurent 級数からなる体,

$$\mathbb{F}_q((\theta)) := \left\{\sum_{i=n}^{\infty} a_i \left(\frac{1}{\theta}\right)^i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{F}_q, n \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\sum_{i=n}^{-\infty} a_i \theta^i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{F}_q, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

になる.

Proof. 埋め込み $\mathbb{F}_q(1/\theta) \hookrightarrow \mathbb{F}_q((1/\theta))$ と $\mathbb{F}_q((1/\theta))$ の付値

$$\left|\sum_{i=m}^{\infty} a_i \left(\frac{1}{\theta}\right)^i\right|_\infty = q^{-m} \quad (a_i \in \mathbb{F}_q, a_m \neq 0)$$

を考える. 定義 2.8 の条件 (a),(b),(c) をチェックすればよい.

最初に (a) を示す. $\mathbb{F}_q((1/\theta))$ の Cauchy 列 $\{f_j = \sum_{i=a}^{\infty} a_i^{(j)}(1/\theta)^i\}_{j\geq 1}$ をとる. これに対し, $f = \sum_{i=a}^{\infty} a_j(1/\theta)^j$ を次のように定めると, f_j は f に収束するので, $\mathbb{F}_q((1/\theta))$ は完備である.

各 i に対し,$\{f_j = \sum_{i=a}^{\infty} a_i^{(j)}(1/\theta)^i\}$ が Cauchy 列なので, ある $j_0 \in \mathbb{Z}$ で $n, m \geq j_0$ なら $|f_m - f_n| < q^{-i-1}$ となる. したがって $a_i^{(m)} = a_i^{(n)}$ となる. $a_i := a_i^{(j_0)}$ と定める.

(b) は証明の冒頭に書いた $\mathbb{F}_q((1/\theta))$ の付値の定義から従う.

(c) は次のようにすればわかる, U を $\hat{F}$ の空でない開集合とし,

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i \left(\frac{1}{\theta}\right)^i \in U$$

をとる. このとき各 $m \geq 0$ で $\sum_{i=n}^{m+n} a_i(1/\theta)^i \in \mathbb{F}_q(1/\theta)$ であり,

$$\sum_{i=n}^{m+n} a_i \left(\frac{1}{\theta}\right)^i \to \sum_{i=n}^{\infty} a_i \left(\frac{1}{\theta}\right)^i, \quad (m \to \infty)$$

である. したがって十分大きな M で $\sum_{i=n}^{M+n} a_i(1/\theta)^i \in \mathbb{F}_q(1/\theta) \cap U$.

□

補題 2.13. $k_\infty^\times$ の元 x は次のように一意的に分解できる,

$$x = \left(\frac{1}{\theta}\right)^{-|x|_\infty} \cdot \zeta \cdot u.$$

ただし $\zeta \in \mathbb{F}_q^\times$, $u \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}_\infty$

Proof. ζ を x の最高次の項の係数とすればよい. □

命題 2.14. k_∞ の点列 $\{a_i\}$ $(i \in \mathbb{N})$ に対し, 以下の同値が成り立つ.

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{が収束する} \Leftrightarrow |a_i|_\infty \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Proof. $\Rightarrow$ は $\mathbb{R}$ の級数を考えた場合と同様に示せる.

$\Leftarrow$ は付値の非 Archimedes 性を使う. $|a_i|_\infty \to 0 \quad (i \to \infty)$ と仮定し, $\epsilon > 0$ を任意にとると, j_0 があって $j \geq j_0$ となる全ての j で $|a_j|_\infty < \epsilon$ となる. このとき, $j' > j > j_0$ をとると

$$\left|\sum_{i=0}^{j'} a_i - \sum_{i=0}^{j} a_i\right|_\infty = \left|\sum_{i=j+1}^{j'} a_i\right|_\infty \leq \max\{|a_i|_\infty \mid j+1 \leq i \leq j'\} \leq \epsilon.$$

□

2.4. **l 進体 $\mathbb{Q}_l$ とその標数 p における類似物.** 前節では実数体 $\mathbb{R}$ が通常の絶対値による $\mathbb{Q}$ の完備化として構成できることを復習し, その標数 p 類似として体 k の $|\cdot|_\infty$ を構成しその構造を考察した. この節 $\mathbb{Q}$ の $|\cdot|_l$ による完備化や k の $|\cdot|_\mathfrak{p}$ による完備化を考える. まずは l 進体 $\mathbb{Q}_l$ を定義し, 次にその標数 p 類似である $k_\mathfrak{p}$ を構成し, その構造を調べる. 無限級数が収束する条件についても述べる.

定義 2.15. l を任意の素数とする ($l = p$ でもよい). このとき, $\mathbb{Q}$ 上の付値 $|\cdot|_l$ が以下のように定められる.

$$\left| l^n \frac{a}{b} \right|_l := l^{-n}, \quad (n \in \mathbb{Z},\, a,\, b \text{ は互いに素で } l \text{ を因数に持たない整数})$$

この付値による完備化を $\mathbb{Q}_l$ と書く.

$|\cdot|_l$ は非 Archimedes であるから命題2.14 と同様の事実が成り立つ (命題 2.20).

定義 2.16. **l 進整数環** $\mathbb{Z}_l$ とその素イデアル $\hat{\mathfrak{m}}_l$ を次で定める.

$$\mathbb{Z}_l := \{a \in \mathbb{Q}_l \mid |a|_l \le 1\}.$$
$$\hat{\mathfrak{m}}_l := \{a \in \mathbb{Q}_l \mid |a|_l < 1\}.$$

ここからは $\mathbb{Q}_l$ の標数 p 類似を考える. 素数の標数 p 類似が A 内のモニック既約多項式であったことを思い出そう.

定義 2.17. A の素イデアル $\mathfrak{p} = (f)$ をとる (ただし $f \in A$ はモニック既約多項式). A の元 a に対し, ある自然数 n_a が存在して, $a \in \mathfrak{p}^{n_a} - \mathfrak{p}^{n_a+1}$ となる. このことを用いて k の**付値** $|\cdot|_\mathfrak{p}$ を次で定める.

$$\left| \frac{a}{b} \right|_\mathfrak{p} := q^{n_b - n_a} \quad (a, b \in A).$$

これは well-defined である. k の $|\cdot|_\mathfrak{p}$ による完備化を $k_\mathfrak{p}$ と書く.

次で定義する環は l 進整数環 $\mathbb{Z}_l$ の類似である.

定義 2.18. 環 $\widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$ とその素イデアル $\hat{\mathfrak{m}}_\mathfrak{p}$ を次で定める.

$$\widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p} := \{a \in k_\mathfrak{p} \mid |a|_\mathfrak{p} \le 1\}.$$
$$\hat{\mathfrak{m}}_\mathfrak{p} := \{a \in k_\mathfrak{p} \mid |a|_\mathfrak{p} < 1\}.$$

$\widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$, $k_\mathfrak{p}$ の構造は次のように表せる.

命題 2.19. ([27], Chapter I, Theorems 7 and 8) 素イデアル $\mathfrak{p}$ が次数 d の多項式 f で生成されていたとすると, $\widehat{\mathcal{O}}_\mathfrak{p}$ および $k_\mathfrak{p}$ はそれぞれ $\mathbb{F}_{q^d}$ 上

の形式的ベキ級数環, 形式的ローラン級数体

$$\mathbb{F}_{q^d}[[X]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{F}_{q^d} \right\},$$
$$\mathbb{F}_{q^d}((X)) = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} a_i X^i \;\middle|\; n \in \mathbb{Z},\, a_i \in \mathbb{F}_{q^d} \right\}$$

と同型である.

$\mathbb{Q}_l$ と $k_{\mathfrak{p}}$ が非 Archimedes であることから, 次の判定法が命題 2.14 と同様に示せる.

命題 2.20. K を $\mathbb{Q}_l$ または $k_{\mathfrak{p}}$ とする. K の点列 $\{a_i\}$ $(i \in \mathbb{N})$ に対し,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \text{が収束する} \Leftrightarrow |a_i|_{\infty} \to 0 \quad (i \to \infty).$$

注意 2.21. $k_{\mathfrak{p}}$ は $\mathbb{Q}$ の類似であり, k_{∞} は $\mathbb{R}$ の類似だと考えられている. 一方で次のような事実があることに注意しなければならない.

$\mathbb{Q}$ の付値のうち Archimedes なのは $|\cdot|_{\infty}$ のみであり, $|\cdot|_{\infty}$ は $|\cdot|_l$ とは異なる特性をもつ. しかし, 標数 p の場合では $|\cdot|_{\infty}$ も $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ も非 Archimedes であり, $|\cdot|_{\infty}$ が本質的に特別な付値というわけではない. 実際 k の自己同型 $\theta \mapsto 1/\theta$ により $|\cdot|_{\infty}$ と $|\cdot|_{(\theta)}$(つまり θ で生成される単項素イデアルに対応する付値) が互いに移りあう.

2.5. **標数 p における $\mathbb{C}$ の類似物.** この節では, 複素数体の標数 p における類似物である $\mathbb{C}_{\infty}$ を導入する. $\mathbb{C}_{\infty}$ の構成は $\mathbb{C}$ の構成よりむしろ $\mathbb{C}_l$ の構成に近いためこちらから紹介する.

定義 2.22. 任意の素数 l に対して, $\mathbb{C}_l$ を $\mathbb{Q}_l$ の代数閉包の完備化 $\widehat{\overline{\mathbb{Q}_l}}$ とする.

この体の標数 p 類似として $\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$ を定義する.

定義 2.23. 素イデアル $\mathfrak{p} \subset A$ に対し, 体 $\mathbb{C}_{\mathfrak{p}}$ を $k_{\mathfrak{p}}$ の代数閉包の完備化 $\widehat{\overline{k_{\mathfrak{p}}}}$ とする.

標数 p における複素数体の類似は定義 2.22 にならって次のように構成される.

定義 2.24. $\mathbb{C}_{\infty}$ を k_{∞} の代数閉包の完備化 $\widehat{\overline{k_{\infty}}}$ とする.

$[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2$ である一方で標数 p では $[\mathbb{C}_{\infty} : k_{\infty}] = \infty$ が成り立つ,

定義 2.25. (1) $\mathbb{C}_{\infty}\langle\tau\rangle$ を $\mathbb{C}_{\infty}$ 上 τ で生成され, 関係式

$$\tau f = f^q \tau \tag{2.1}$$

で定められる (非可換) 環とする．また $\mathbb{C}_\infty\langle\langle\tau\rangle\rangle$ を $\mathbb{C}_\infty$ 上 τ で生成され, (2.1) を関係式として持つ非可換形式的ベキ級数環とする．

(2) $\mathbb{C}_\infty\langle\tau\rangle$ の $\mathbb{C}_\infty$ への作用を, a, $f\in\mathbb{C}_\infty$ に対し,

$$f\cdot a := fa$$

$$\tau^i\cdot a = a^{(i)} := a^{q^i} \tag{2.2}$$

で定める．

注意 2.26. 以下では k_∞ と $\mathbb{C}_\infty$ のみ考える．$k_\mathfrak{p}$, $\mathbb{C}_\mathfrak{p}$ においても 4 章と 5 節で扱う多重ゼータ値が考えられており $\mathfrak{p}$ 進多重ゼータ値と呼ばれている (cf. [8]). p 進多重ゼータ値 (cf. [12]) の標数 p 類似とされており, $\mathfrak{p}$ 進多重ゼータ値については本講究録中の [10] においてより詳しく扱われている．

2.6. **標数 p における符号および $\mathbb{N}$ の類似物.** この節の最後として符号および正の数という概念を標数 p においても導入する．

定義 2.27. 補題 2.13 の分解

$$x = \left(\frac{1}{\theta}\right)^{-|x|_\infty}\cdot\zeta\cdot u$$

によって次の二つの写像 $\mathrm{sgn}: k_\infty\to\mathbb{F}_q$, $u: k_\infty^\times\to\widehat{\mathcal{O}_\infty}$ を定める．

$$\begin{aligned}\mathrm{sgn}(x): k_\infty &\to \mathbb{F}_q\\ x &\mapsto \begin{cases}\zeta & (x\in k_\infty^\times).\\ 0 & (x=0).\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u: k_\infty^\times &\to \widehat{\mathcal{O}_\infty}\\ x &\mapsto u\end{aligned}$$

定義 2.28. $x\in k_\infty$ について $\mathrm{sgn}(x)=1$ のとき (つまり x がモニックであるとき), x が**正**であると定義される．すなわち, A の元 x に対し, x が正であるとは x がモニックであることを意味する．

$$A_+ := \{a\in A \mid a:\text{正}\} = \{a\in A \mid a:\text{モニック}\}.$$

注意 2.29. A_+ は $\mathbb{N}$ の類似物である．

注意 2.30. 注意 2.4 と注意 2.29 より A におけるモニック既約多項式は素数の類似物だと考えられる．

3. 標数 p の整数論における関数

この節では標数 p における特殊関数 (指数関数, 対数関数, 階乗, ゼータ関数) を紹介する．

3.1. **Carlitz 階乗, Carlitz 指数関数および Carlitz 対数関数.** 階乗 , 指数関数および対数関数の標数 p 類似物を導入する.

定義 3.1. ([4]) 非負整数 n に対して,

(1) $[n] := \theta^{q^n} - \theta \in A_+$,
(2) $D_n := [n][n-1]^q \cdots [1]^{q^{n-1}} \in A_+, \quad D_0 := 1$,
(3) $L_n := [n][n-1]\cdots[1] \in A_+, \quad L_0 := 1$.

と定める.

補題 3.2. L_n, D_n, $[n]$ は次のように特徴付けられる.

(1)
$$[n] = \prod_{\substack{f:\ \text{既約}\ f \in A_+ \\ \deg f | n}} f.$$

(2)
$$D_n = \prod_{\substack{f \in A_+ \\ \deg f = n}} f.$$

(3) L_n は次数 n のすべての多項式の最小公倍数である.

Proof. $[n]$ の根の集合が代数拡大体 $\mathbb{F}_{q^n}$ と一致することに注意する.

モニック多項式 $f \in A_+$ を $(\deg f)|n$ となるようにとると, $\{f$ の根$\} \subset \mathbb{F}_{q^{\deg f}} \subset \mathbb{F}_{q^n}$ なので $f|[n]$.

$[n]$ は分離多項式なので (1) が従う. (2), (3) は多項式の素元分解により示される.

□

定義 3.3. ([5]) n を非負整数とする. このとき n の Carlitz 階乗 $\Pi(n)$ を n の q 進展開

$$n = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j q^j \quad (0 \le \alpha_j < q)$$

により, **Carlitz 階乗**を

$$\Pi(n) := \prod_{j=0}^{d} D_j^{\alpha_j} \in A_+$$

と定義する. $\Pi(n)$ を Γ_{n+1} とも書く. Γ_{n+1} を Carlitz ガンマ値と呼ぶ.

定義 3.4. ([4])

(1) $\mathbb{C}_\infty$ の元 z に対し, **Carlitz 指数関数**を

$$\exp_C(z) = e_C(z) := \sum_{i \ge 0} \frac{z^{q^i}}{D_i} \in \mathbb{C}_\infty$$

と定義する. $e_C(z)$ の収束性は定理 3.8 で論じる.

(2) $|z|_\infty < q^{\frac{q}{q-1}}$ となる $\mathbb{C}_\infty$ の元 z に対し, **Carlitz 対数関数**を

$$\log_C(z) := \sum_{i\geq 0}(-1)^i \frac{z^{q^i}}{L_i} \in \mathbb{C}_\infty$$

と定める.

定義より $e_C, \log_C$ は和を保つ. 特に $\mathbb{F}_q$ 線型であることが見てとれる.

補題 3.5. $i \in \mathbb{N}$ に対し A 上の多項式 $e_i(z)$ を

$$e_i(z) := \prod_{\substack{a\in A \\ \deg a<i}} (z-a)$$

で定めると, $e_i(\theta^i) = D_i$ となり, さらに

$$e_i(z) = \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\frac{D_i}{D_j {L_{i-j}}^{q^j}} z^{q^j} \tag{3.1}$$

と書ける.

Proof. $e_i(\theta^i) = D_i$ は補題 3.2 (2) より従う. 他方の式は e_i が $e_i(z) = e_{i-1}^q(z) - D_{i-1}^{q-1} e_{i-1}(z)$ と帰納的に計算できることから従う. □

命題 3.6. 以下が成り立つことが知られている.

(1) $\mathbb{C}_\infty$ の任意の元 x に対し, $e_C(\theta x) = x e_C(x) + e_C(x)^q$, $\theta \log_C(x) = \log_C(\theta x) + \log_C(x^q)$ が成り立つ.

(2) e_C と $\log_C$ は形式的ベキ級数とみなすと互いに逆関数である. つまり

$$e_C(\log_C(z)) = \log_C(e_C(z)).$$

Proof. (1) は次のように示される,

$$e_C(\theta x) - e_C(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\theta^{q^i}-\theta}{D_i}x^{q^i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{[i]}{D_i}x^{q^i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{q^i}}{{D_{i-1}}^q} = \left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{q^i}}{D_i}\right)^q$$

となる. ただし三つ目の等号で $D_i = [i]D_{i-1}^q$ を用いた. これは D_i の定義から従う. よって $e_C(\theta x) = e_C(x) + e_C(x)^q$ が成り立つ.

$x \in \mathbb{C}_\infty$ とすると

$$\log_C(e_C(\theta x)) = \log(\theta e_C(x) + e_C(x)^q) = \theta \log(e_C(z))$$

となる. $e_C, \log_C$ は和を保つので, $\log_C \circ e_C$ は $\mathbb{C}_\infty$ の適当な領域上の恒等写像である.

次の等式がなりたつ.

$$\sum_{n=0}^{l}\frac{(-1)^{l-n}}{D_n L_{l-n}^{q^n}} = \begin{cases} 0 & (l>0), \\ 1 & (l=0). \end{cases}$$

$e_C \circ \log_C$ が形式的ベキ級数として恒等写像と等しいことは

$$e_i(\theta^i) = D_i = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} \frac{D_i}{D_j {L_{i-j}}^{q^j}} (\theta^i)^{q^j}$$

の係数を比較すればわかる. □

さらに,

$$\prod_{\substack{a \in A \\ \deg a = i}} a = \prod_{\substack{a \in A_+ \\ \deg a = i}} \left(a^{q-1} \prod_{b \in \mathbb{F}_q^\times} b \right) = \left(\prod_{b \in \mathbb{F}_q^\times} b \right)^{q^i} D_i^{q-1} = -D_i^{q-1}$$

であることに注意して, (3.1) の両辺を $\prod_{\deg a < i} a$ で割ると,

$$z \prod_{\substack{a \in A - 0 \\ \deg a < i}} \left(1 + \frac{z}{a} \right) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \frac{L_i}{D_j {L_{i-j}}^{q^j}} z^{q^j} = \frac{1}{\xi_i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \frac{z^{q^j}}{D_j} \beta_j \xi_{i-j}^{q^j}.$$

を得る. ただし最後の等号では

$$\xi_j := \frac{[1]^{\frac{q^{j-1}}{q-1}}}{L_j}, \quad \beta_j := L_j \xi_j = [1]^{\frac{q^{j-1}}{q-1}},$$

を導入した. この ξ_j について次のことが成り立つ.

補題 3.7. (1) $j \geq 1$ に対し,

$$\xi_j = \prod_{k=1}^{j-1} \left(1 - \frac{[k]}{[k+1]} \right).$$

(2) $|\xi_{j+1} - \xi_j|_\infty = q^{-q^i(q-1)}$.

(3) 数列 $\{\xi_j\}$ は

$$\xi_* := \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{[k]}{[k+1]} \right),$$

に収束し, $|\xi_\infty - \xi_j|_\infty = q^{-q^i(q-1)}$.

Proof.

$$\prod_{k=1}^{j-1} \left(1 - \frac{[k]}{[k+1]} \right) = \prod_{k=1}^{j-1} \frac{[k+1] - [k]}{[k+1]}$$
$$= \prod_{k=1}^{j-1} \frac{[1]^{q^k}}{[k+1]} = \prod_{k=1}^{j-1} \frac{[1]^{q^k}}{[k+1]} = \frac{[1]^{\sum_{m=0}^{j-1} q^m}}{L_j} = \xi_j.$$

より (1) が従う. $|[1]^{\frac{q^{j-1}}{q-1}}|_\infty = |L_j|_\infty = q^{-\frac{q^{j-1}}{q-1}}$ であり, さらに (1) から

$$\xi_{j+1} - \xi_j = -\frac{[j]}{[j+1]} \xi_j$$

なので, $|\xi_{j+1}-\xi_j|_\infty = |\frac{[j]}{[j+1]}|_\infty = q^{-q^i(q-1)}$. (3) は k_∞ の付値が非 Archimedes であることと, (2) から従う. $\square$

これを使って計算すると, 任意の $z \in \mathbb{C}_\infty$ に対して,

$$z \prod_{\substack{a \in A-0 \\ \deg a < i}} \left(1 + \frac{z}{a}\right) = \frac{1}{\xi_i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \frac{z^{q^j}}{D_j} \beta_j \xi_{i-j}^{q^j} \tag{3.2}$$

は $j \to \infty$ で収束し, その収束値は

$$\frac{1}{\xi_*} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \frac{z^{q^j}}{D_j} \beta_j \xi_*^{q^j}$$

の収束値と等しいことがわかる.
したがって次の結論を得る.

定理 3.8. 以下が成り立つ.

(1) $(-[1])$ の $q-1$ 乗根を一つ固定して,

$$\tilde{\pi} := (-[1])^{\frac{1}{q-1}} \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 - \frac{i}{[i+1]}\right)$$

とおくと, 次のような無限積表示ができる.

$$\frac{1}{\tilde{\pi}} e_C(z\tilde{\pi}) = z \prod_{a \in A-\{0\}} \left(1 - \frac{z}{a}\right). \tag{3.3}$$

(2) $e_C(z)$ は任意の $z \in \mathbb{C}_\infty$ で収束する.

Proof.

$$z \prod_{a \in A-\{0\}} \left(1 - \frac{z}{a}\right) = \frac{1}{\xi_*} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{q^j}}{D_j} \beta_j \xi_*^{q^j} = \frac{1}{\tilde{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z\tilde{\pi})^{q^j}}{D_j} \frac{(-1)^j}{(-[1])^{\frac{q^j}{q-1}}} [1]^{\frac{q^j}{q-1}} = \frac{1}{\tilde{\pi}} e_C(z\tilde{\pi}).$$

と計算できるので, (1) が示された.
(3.2) が任意の $z \in \mathbb{C}_\infty$ に対して収束するので, $e_C(z)$ も任意の $z \in \mathbb{C}_\infty$ で収束する. $\square$

定義 3.9. 定理 3.8 の $\tilde{\pi}$ を **Carlitz 周期**と呼ぶ.

注意 3.10. (3.3) より $e_C(\tilde{\pi}A) = 0$ である. これは $e^{2\pi i \mathbb{Z}} = 1$ に対応する現象である. また $\tilde{\pi}$ は $2\pi i$ の類似であるとされている.

3.2. **Carlitz-Goss ゼータ関数.** Riemann ゼータ関数の類似である Carlitz-Goss ゼータ関数について, 特にその特殊値について論じる.

3.2.1. 領域 S_∞ とゼータ関数の定義. 標数 0 において, Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数で領域 $\{s \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(s) > 1\}$ では

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

と無限級数により表される.

この関数の標数 p における類似を考えたい. "正の整数" に対応するものは"モニック多項式"であった. したがって"n^s"の定め方が問題となる.

$s = x + iy \in \mathbb{C}$ とすると,

$$n^s = e^{(x+yi)\log n} = e^{x \log n} e^{iy \log n}$$

とかけた. ポイントは $|e^{x\log n}| = |n^s|$, $|e^{iy\log n}| = 1$ が成り立つことである.

この"絶対値と単位元にわける"というアイデアをつかう.

定義 3.11.

$$S_\infty := \mathbb{C}_\infty^\times \times \mathbb{Z}_p$$

とする. $\mathbb{C}_\infty^\times$ の積, $\mathbb{Z}_p$ の和から定まる群演算を加法的に表す. つまり, $(x_0.y_0) + (x_1, y_1) := (x_0 x_1, y_0 + y_1)$

あとで見るようにこの S_∞ が Carlitz-Goss ゼータ関数の定義域になる.

定義 3.12. S_∞ の元 $s = (x, y)$ と正の元 $\alpha \in k$ に対し,

$$\alpha^s := x^{\deg \alpha} u(\alpha)^y$$

と定める.

命題 3.13. (1) k の正の元 α, β と s_0, s_1 に対して,

$$(\alpha\beta)^{s_0} = \alpha^{s_0}\beta^{s_0}, \quad \alpha^{s_0+s_1} = \alpha^{s_0}\alpha^{s_1}.$$

(2) 整数 i に対して,

$$\alpha^{(\theta^i, i)} = \alpha^i.$$

Proof. $s_0 = (x_0, y_0)$, $s_1 = (x_1, y_1)$ とする. 補題 2.13 を使って, $\alpha = (1/\theta)^{-|\alpha|}1u$, $\beta = (1/\theta)^{-|\beta|}1v$ と分解する. すると $\alpha\beta = (1\theta)^{-|\alpha|-|\beta|}(uv)$. (1) については次のように示される.

$$(\alpha\beta)^{s_0} = x_0^{\deg\alpha + \deg\beta}(uv)^{y_0} = \alpha^{s_0}\beta^{s_0},$$
$$\alpha^{s_0+s_1} = \alpha^{s_0}\alpha^{s_1}u^{y_1}v^{y_2} = \alpha^{s_0}\alpha^{s_1}.$$

また, (2) については補題 2.13 の分解をつかって次のように示される.

$\alpha^i = (1/\theta)^{-|\alpha|i}u^i = \theta^{i\deg\alpha}u^i = \alpha^{(\theta^i, i)}$.

□

注意 3.14. $i \mapsto (\theta^i, i)$ によって $\mathbb{Z} \subset S_\infty$ とみなす.

定義 3.15. ([4], [13]) S_∞ の元 s に対し,

$$\zeta_C(s) := \sum_{a \in A_+} \frac{1}{a^s} \in \mathbb{C}_\infty$$

と定め **Carlitz-Goss ゼータ関数**と呼ぶ. 特に注意 3.14 の意味で $s \in \mathbb{Z}$ のとき $\zeta_C(s)$ を **Carlitz ゼータ値**と呼ぶ.

自然数 n に対し $\zeta(n) > 0$ が成り立つことは自明であるが, 標数 p の場合に同様の結果を示すのは以下のように議論を要する.

命題 3.16. ([23]) s が自然数ならば, $\zeta_C(s) \neq 0$.

Proof. S_∞ の元 s と非負整数 d, k に対し,

$$S_d(k) := \sum_{\substack{a \in A_+, \\ \deg a = d}} \frac{1}{a^k} \in \mathbb{C}_\infty,$$

とすると, 次の補題により $|\zeta_C(k)|_\infty = |\sum_{d=0}^\infty S_d(k)|_\infty \neq 0$. よって $\zeta_C(k) \neq 0$ □

Lucas の定理と呼ばれる次の補題が必要になる.

補題 3.17. ([18]) 二つの自然数

$$N = \sum_{i=0}^{d} N_i p^i, \ M = \sum_{i=0}^{d} M_i p^i,$$

(ただし d, N_i, M_i, は自然数で $0 \leq N_i$, $M_i < p$) に対し, つぎの合同式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} N_0 \\ M_0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} N_d \\ M_d \end{pmatrix} \pmod{p}.$$

補題 3.18. ([23], [11]) 非負整数 d, k に対し, $|S_d(k)|_\infty < |S_{d-1}(k)|_\infty$.

Proof. $q = p$ の場合のみ簡単に論じる. 詳しい議論と一般の場合については [23] および [11] を参照せよ.

$$\begin{aligned}
S_d(k) &= \frac{1}{\theta^{dk}} \sum_{f_1,\dots,f_d\in\mathbb{F}_q} \left(1+\frac{f_1}{\theta}+\cdots+\frac{f_d}{\theta^d}\right)^{-k} \\
&= \frac{1}{\theta^{dk}} \sum_{f_1,\dots,f_d\in\mathbb{F}_q} \sum_{y=0}^{\infty} \binom{-k}{y} \left(\frac{f_1}{\theta}+\cdots+\frac{f_d}{\theta^d}\right)^{y} \\
&= \frac{1}{\theta^{dk}} \sum_{y=0}^{\infty} \binom{-k}{y} \sum_{f_1,\dots,f_d\in\mathbb{F}_q} \left(\frac{f_1}{\theta}+\cdots+\frac{f_d}{\theta^d}\right)^{y} \\
&= \frac{1}{\theta^{dk}} \sum_{y=0}^{\infty} \binom{-k}{y} \sum_{m_1+\cdots+m_d=y} \binom{y}{m_1,\dots,m_d} \sum_{f_1,\dots,f_d\in\mathbb{F}_q} \left(\frac{f_1}{\theta}\right)^{m_1}\cdots\left(\frac{f_d}{\theta^d}\right)^{m_d} \\
&= \frac{1}{\theta^{dk}} \sum_{y=0}^{\infty} \binom{-k}{y} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_d=y \\ (q-1)|m_i}} \binom{y}{m_1,\dots,m_d} \left(\frac{f_1}{\theta}\right)^{m_1}\cdots\left(\frac{f_d}{\theta^d}\right)^{m_d}
\end{aligned}$$

と計算できる. ただし最後の等式で有限体における等式

$$\sum_{b\in\mathbb{F}_q} b^{s-i} = \begin{cases} -1 & (q-1)|(s-i), \\ 0 & \text{その他の場合}, \end{cases} \tag{3.4}$$

を用いた. また母関数表示

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k\geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$$

により, 二項係数の定義を拡張している.

後述する Lucas の定理を使うと

$$\binom{y}{m_1,\dots,m_d} \neq 0, \quad \left|\binom{-k}{y}\right| = \left|\binom{k+y-1}{y}\right| \neq 0$$

を満たす $y, m_1, \dots, m_d$ で $m_1 + 2m_2 + \cdots + dm_d$ が最大になるものがただ一つ存在することがわかる (m_d から順番に選べばよい). このとき $|S_d(k)| = q^{-(m_1+2m_2+\cdots+dm_d+dk)}$.

$n_1, n_2, \dots, n_{d+1}$ を

$$n_i := \begin{cases} 0 & i = 1, \\ m_{i-1} & i > 1. \end{cases}$$

とすれば $\binom{y}{n_1,\dots,n_{d+1}} \neq 0$ なので $|S_d(k)|_\infty < |S_{d-1}(k)|_\infty$. □

命題 3.19. 以下が成り立つ.

(1) $\zeta_C(s)$ は次のような無限積表示をもつ.

$$\zeta_C(s) = \prod_{\substack{v\in A_+ \\ v:\text{既約}}} (1-v^{-s})^{-1}.$$

(2) $\zeta_C(s)^p = \zeta_C(ps)$

Proof. (1)A が一意分解整域であるから, Riemann ゼータ関数の Euler 積表示と同様に示せる.

(2)A_+ の元 a と S_∞ の元 s をとる. 無限和 $\zeta_C(s)$ の各項 $(1/a^s)$ に対し,

$$\left(\frac{1}{a^s}\right)^p = \frac{1}{(a^s)^p} = \frac{1}{a^{ps}}$$

が成り立つ. $\mathbb{C}_\infty$ 上の自己準同型 $x \mapsto x^p$ が連続準同型という事実から題意が成り立つ. □

3.2.2. *Euler-Carlitz* の公式. この節では Carlitz ゼータ値を具体的に書き下す方法を紹介する..

まずは標数 0 の場合を考察する.

定義 3.20. Bernoulli 数 $B_n \in \mathbb{Q}$ $(n \geq 0)$ を次の母関数で定義する.

$$\sum_{n\geq 0} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z-1}.$$

定理 3.21. 正の自然数 m に対して,

$$\zeta(2m) = \frac{(-1)^{-m}2^{2m-1}\pi^{2m}}{2m!}B_{2m}.$$

次にこの定理と類似した結果が標数 p でも成り立つことをみる.

定義 3.22. Bernoulli-Carlitz 数 $BC_n \in A$ $(n \geq 0)$ を次で定義する.

$$\sum_{n\geq 0} BC_n \frac{z^n}{\Pi(n)} = \frac{z}{e_C(z)}.$$

定理 3.23. $m \in \mathbb{N}$ に対して, $(q-1)|m$ ならば,

$$\zeta_C(m) = -BC_m \frac{\tilde{\pi}^m}{(q-1)\Pi(m)}.$$

Proof. z についての恒等式

$$\sum_{m\geq 0} BC_m \frac{z^m}{\Pi(m)} = 1 - \sum_{\substack{m\geq 1 \\ (q-1)|m}} \frac{1}{\tilde{\pi}^m}\zeta_C(m)z^m \tag{3.5}$$

を示せば, 係数比較によって定理が得られる.

$$\sum_{m\geq 0} BC_m \frac{z^m}{\Pi(m)} = \frac{z}{e_C(z)} = 1 - \sum_{m\geq 1}\sum_{\lambda\in\tilde{\pi}A-\{0\}} \left(\frac{z}{\lambda}\right)^m = 1 - \sum_{m\geq 1}\sum_{a\in A}\left(\frac{1}{\tilde{\pi}^m a^m}\right) z^m$$
$$= 1 - \sum_{m\geq 1}\sum_{b\in A_+}\sum_{c\in\mathbb{F}_q}\left(\frac{c^m}{\tilde{\pi}^m b^m}\right) z^m = 1 - \sum_{m\geq 1,\,(q-1)|m}\left(\frac{-1}{\tilde{\pi}^m}\right)\sum_{b\in A_+}\left(\frac{1}{b^m}\right) z^m$$
$$= 1 + \sum_{\substack{m\geq 1\\(q-1)|m}} \frac{1}{\tilde{\pi}^m}\zeta_C(m) z^m = 1 - \sum_{\substack{m\geq 1\\(q-1)|m}} \frac{q-1}{\tilde{\pi}^m}\zeta_C(m) z^m.$$

ただし途中で (3.4) を用いた. □

注意 3.24. 定理 3.23 から $(q-1)$ の倍数が偶数の類似と考えられる.

3.2.3. *Riemann* 予想の標数 p 類似. Carlitz ゼータ関数の零点について考察し, Riemann 予想の標数 p 類似について述べる.

定理 3.25. ([13]) 非負整数 s に対し,

(1) $\zeta_C(-s)\in A$. また $\zeta_C(0)=1$,
(2) $\zeta_C(-s)=0$ となる必要十分条件は $(q-1)|s$.

Proof. (1) A_+ の元 a をとる. $\deg a = i > 1$ とする. このとき $\deg f = i-1$ となる $f\in A_+$ と $b\in\mathbb{F}_q$ を適当にとり, $a=\theta f + b$ と書ける.

すると,

$$\zeta_C(-s) = \sum_{a\in A+} a^s = 1 + \sum_{\substack{f\in A_+,\\ b\in\mathbb{F}_q}} (\theta f + b)^s = 1 + \sum_{\substack{f\in A_+,\\ b\in\mathbb{F}_q}}\sum_{i=1}^{s}\begin{pmatrix} s\\ i\end{pmatrix}(\theta f)^i b^{s-i}$$
$$= 1 + \sum_{i=0}^{s}\left(\sum_{b\in\mathbb{F}_q} b^{s-i}\right)\begin{pmatrix} s\\ i\end{pmatrix}\theta^i\sum_{f\in A_+} f^i = 1 + \sum_{\substack{i=0\\(q-1)|(s-i)}}^{s-1}\begin{pmatrix} s\\ i\end{pmatrix}\theta^i\zeta_C(-i)$$

となる. ただし最後の等式で (3.4) を用いた. したがって, $\zeta_C(0)=1$ が得られ, さらに s に関する帰納法により $\zeta_C(-s)\in A$ が導かれる.

(2) $s=(q-1)m$, $(m\in\mathbb{N})$ とする. $\zeta_C((q-1)m)=0$ を m に関する帰納法で示す.

$$\zeta_C(-s) = \zeta_C(-(q-1)m) = 1 - \sum_{\substack{i=0\\(q-1)|(s-i)}}^{s}\begin{pmatrix} (q-1)m\\ i\end{pmatrix}\theta^i\zeta(-i) = 1-\zeta(0) = 0$$

最後の等式で帰納法の仮定を用いた.

逆に s が $(q-1)$ の倍数でないとすると,

$$\zeta_C(-s) = 1 - \sum_{i=0}^{s-1}\begin{pmatrix} s\\ i\end{pmatrix}\theta^i\zeta_C(-i) = 1 - \sum_{i=0}^{s-1}\begin{pmatrix} s\\ i\end{pmatrix}\theta^i\zeta_C(-i)$$

(1) より $\sum_{i=0}^{s-1}\begin{pmatrix} s \\ i \end{pmatrix}\theta^i\zeta_C(-i)$ がイデアル θA に属するので $\zeta_C(-s)\neq 0$. □

次の定理は Riemann 予想の標数 p における類似である.

定理 3.26. ([21]) $\mathbb{Z}_p$ の元 y を固定する. このとき $\zeta_C((x,y))$ を $x\in\mathbb{C}_\infty$ についての関数とみると, 全ての零点は位数が 1 であり, k_∞ に属する.

4. Carlitz 加群と Carlitz ゼータ値

この節の二つの目標をもつ. 一つは Carlitz 加群を定義することである. もう一つは Carlitz ゼータ値を (拡張された) Carlitz 加群, Carlitz 対数関数を用いて表示することである (定理 4.15). その系として, Carlitz ゼータ値の超越性が得られることを紹介する.

4.1. Carlitz 加群.

この小節では Carlitz 加群を扱う. Carlitz 加群は乗法群 $\mathbb{G}_m$ の標数 p 類似であり, Drinfeld 加群や t 加群といった標数 p の整数論で重要な概念の例となっている.

命題 4.1. $a\in A$ に対し, $C_{a,j}\in A$ $(j=1,2,\ldots,\deg a)$ が存在して, すべての $x\in\mathbb{C}_\infty$ について

$$e_C(ax)=ae_C(x)+\sum_{j=1}^{\deg a}C_{a,j}e_C(x)^{q^j} \tag{4.1}$$

という関係式が成り立つ.

Proof. e_C の $\mathbb{F}_q$ 線型性から $a=\theta^n$ の場合に帰着される.

$n=1$ の場合は命題 3.6 の (1) である. $n\geq 2$ のときは

$$e_C(\theta^n x)=e_C(\theta\theta^{n-1}x)=\theta e_C(\theta^{n-1}x)+e_C(\theta^{n-1}x)^q$$

なので (4.1) をみたす $C_{a,j}$ を帰納的に与えられる. □

定義 4.2. 命題 4.1 の $C_{a,j}$ を使って, $\mathrm{End}_k(\mathbb{C}_\infty)$ の元 C_a を

$$C_a:=a\tau^0+\sum_{j=1}^{\deg a}C_{a,j}\tau^j$$

で定める. ただし τ は定義 2.25 で定めた写像である.

命題 4.3. a,x をそれぞれ $A,\mathbb{C}_\infty$ の元とすると, 次の式が成り立つ.

$$e_C(ax)=C_a(e_C(x)).$$

Proof. 命題 4.1 と定義 4.2 より以下が得られる.

$$\begin{aligned} C_a(e_C(x)) &= ae_C(x) + \sum_{j=1}^{\deg a} C_a\tau^j e_C(x) \\ &= ae_C(x) + \sum_{j=1}^{\deg a} C_a e_C(x)^{q^j} = e_C(ax). \end{aligned}$$

□

定理 4.4. 次の写像

$$\begin{array}{rcl} C : A & \to & \mathrm{End}_k(\mathbb{C}_\infty) \\ a & \mapsto & C_a \end{array}$$

は $\mathbb{F}_q$ 代数の単射準同型である.

Proof. 写像 $a \mapsto C_a$ の $\mathbb{F}_q$ 線型性は e_C の $\mathbb{F}_q$ 線型性より示される. 単射性は明らか. $a, b \in A$ に対し, 命題 4.3 を使うと次がわかる.

$$C_{ab}(e_C(x)) = e_C(abx) = C_a(e_C(bx)) = C_a(C_b(e_C(x)))$$

よって $C_{ab} = C_a \circ C_b$ □

定義 4.5. この $\mathbb{F}_q$ 代数の準同型

$$\begin{array}{rcl} C : A & \to & \mathrm{End}_k(\mathbb{C}_\infty) \\ a & \mapsto & C_a \end{array}$$

のことを **Carlitz 加群**と呼ぶことにする.

注意 4.6. この C によって $\mathbb{C}_\infty$ に通常のスカラー倍によるものとは異なる A 加群の構造が次のように定められる, $a \in A$, $z \in \mathbb{C}_\infty$ に対し, $a \cdot z := C_a(z)$.

4.2. **Carlitz ゼータ値の対数関数による表示.** Carlitz 加群および Carlitz 対数関数の概念を拡張する. その応用として Carlitz ゼータ値の超越性を述べる.

環 R に対し, $\mathrm{M}_{n,m}(R)$ で R 係数の $n \times m$ 行列の環を表すことにする. さらに $\mathrm{M}_n(R)$ で $\mathrm{M}_{n,n}(R)$ を表すことにする.

定義 4.7. 自然数 $n \geq 1$ に対し, A 線型写像 $C^{\otimes n}$ を

$$\begin{aligned} C^{\otimes n} : A &\to \mathrm{M}_n(\mathbb{C}_\infty\langle\tau\rangle) \\ \theta &\mapsto C_\theta^{\otimes n} := \theta I_n + N + E\tau \end{aligned}$$

で定める. 各記号は以下のように定める.

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

定義 4.8. $n \geq 1$ に対し, $\log_{C^{\otimes n}} := \sum_{i=0}^{\infty} P_i \tau_i \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}_\infty \langle\langle \tau \rangle\rangle)$ とする. ただし行列 P_i は次のように定める.

$$P_0 := I_n, \quad P_{i+1} := -\sum_{j=0}^{2n-2} \frac{\mathrm{ad}(N)^j (P_i E)}{[j]^{j+1}}.$$

ただし ad は Lie ブラケット $[X, Y] := XY - YX$ を用いて次の式で帰納的に定義される.

$$\mathrm{ad}(X)^0(Y) := Y, \ \mathrm{ad}(X)^{j+1}(Y) := [X, \mathrm{ad}(X)^j(Y)].$$

命題 4.9. 行列 P_i の (n,n) 成分は $(-1)^i L_i^{-n}$. 特に $n = 1$ の時, $\log_{C^{\otimes n}}$ は定義 3.4 で定義した Carlitz 対数関数と一致する.

Proof. 帰納法で示す.

$$\begin{aligned} N^{n-1} P_{i+1} E &= -N^{n-1} \sum_{j=0}^{2n-2} \frac{\mathrm{ad}(N)^j (P_i E)}{[j]^{j+1}} E \\ &= -\frac{1}{[i]^n} N^{n-1} P_i E. \end{aligned}$$

である. 行列 N^{n-1}, E をそれぞれ左, 右からかける操作は第 (n,n) 成分を変えないので命題が示された. □

注意 4.10. $\log_{C^{\otimes n}}(0, \cdots, 0, z)^{\mathrm{Tr}}$ の第 n 成分は

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^m}{L_m^n}$$

となる. これは **Carlitz ポリログ**と呼ばれる.

定義 4.11. ([2]) t, x, θ を独立な変数とする. **Anderson-Thakur 多項式** $H_n(t) \in A[t]$ を次の x に関する母関数で定義する,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(t)}{\Gamma_{n+1}|_{\theta=t}} x^n := \left(1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{i} (t^{q^j} - \theta^{q^j})}{D_i|_{\theta=t}} x^{q^i} \right)^{-1}.$$

この多項式を $u_{n_i} \in A$ を使って $H_n(t) = \sum_{i=0}^{m_n} u_{n_i} t^i$ と表すことにする.

例 4.12. Huei-Jeng Chen ([9], 定理 3.3) により, 特別な $n \in \mathbb{Z}$ については $H_n(t)$ は以下のように明示的に表されることが知られている.

$$H_0(t) = 1, \quad H_{q^2-q-1}(t) = \Gamma_{q^2-q}|_{\theta=t}, \quad H_{q^3-1}(t) = \Gamma_{q^3}|_{\theta=t},$$
$$H_{q^2-q}(t) = \Gamma_{q^2-q+1}|_{\theta=t} \frac{(t-\theta^q)^{q-1}}{L_1^{q-1}|_{\theta=t}}.$$

この多項式 $H_n(t)$ は次の補題が成り立つことから重要な多項式とされている.

補題 4.13. ([2])

$$\Omega := (-\theta)^{\frac{-q}{q-1}} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{\theta^{q^i}}\right) \in \mathbb{C}_\infty[[t]]$$

と定めると, $s \geq 1$ に対し次が成り立つ.

$$\left(H_{s-1}\Omega^s\right)^{(d)}\Big|_{t=\theta} = \frac{\Gamma_s S_d(s)}{\tilde{\pi}^s}.$$

注意 4.14. 定義より $\Omega(\theta) = 1/\tilde{\pi}$ が成り立つ.

定理 4.15. ([2]) $Z_n := \sum_{j=0}^{m_n} C_{u_{n_i}}^{\otimes n}(0, \cdots, 0, \theta^i)^{\mathrm{Tr}}$ とすると, Carlitz ゼータ値が次のように書ける.

$$\log_{C^{\otimes n}}(Z_n) = (*, \ldots, *, \Gamma_n \zeta_C(n)).$$

この定義と次の結果を組み合わせると Carlitz ゼータ値の超越性がわかる.

定理 4.16. ([28]) $v = (l_1, l_2, \cdots, l_n)$ を $\bar{k}_\infty^n$ の元とし, さらに $v \neq (0, 0, \ldots, 0)$ であると仮定する. このとき v が像 $\log_{C^{\otimes n}}(\bar{k}_\infty^n)$ に属しているならば, $l_n \notin \bar{k}$, つまり l_n は k 上超越的である.

5. 多重ゼータ値の標数 p 類似

この節では, 前節で扱った内容の多重化を考える. 初めに多重ゼータ値を紹介し, その後多重ゼータ値の標数 p 類似 (Carlitz-Thakur 多重ゼータ値とも呼ばれる) の性質を調べる. 最後に標数 p 多重ゼータ値の超越性に関する結果を述べる.

5.1. **多重ゼータ値.**

まずは標数 0 の場合を考える. 多重ゼータ値を導入し, その超越性に関する予想を述べる.

定義 5.1. 自然数の組 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_r) \in \mathbb{N}^r$ をとる. ただし $s_1 > 1$ とする. **多重ゼータ値**とは以下の級数で定義される実数である.

$$\zeta(\mathbf{s}) := \sum_{n_1 > n_2 > \cdots n_r > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_r^{s_r}} \in \mathbb{R}.$$

また, 各 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_r)$ に対し,

$$\mathrm{wt}(\mathbf{s}) \coloneqq s_1 + s_2 + \cdots + s_r \quad \mathrm{dep}(\mathbf{s}) \coloneqq r,$$

としそれぞれ $\mathbf{s}$ の**重さ**, **深さ**と呼ぶ. $w \geq 2$ に対し, $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 線形空間 Z_w を次で定める.

$$Z_w \coloneqq \langle \zeta(\mathbf{s}) \mid \mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{N}^r, s_1 > 1, r \geq 1, \mathrm{wt}(\mathbf{s}) = w \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

$Z_0 \coloneqq \mathbb{Q}$, $Z_1 \coloneqq \{0\}$ とする.

注意 5.2. (1) 条件 $s_1 > 1$ は多重ゼータ値を定義する無限和が収束するための必要十分条件である.

(2) 自然数の組 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_r) \in \mathbb{N}^r$, $\mathbf{s}' = (s'_1, s'_2, \cdots, s'_{r'}) \in \mathbb{N}^{r'}$ に対し, $\zeta(\mathbf{s})\zeta(\mathbf{s}') \in Z_{\mathrm{wt}(\mathbf{s})+\mathrm{wt}(\mathbf{s}')}$ 例えば, 2 以上の自然数 m, n に対し, $\zeta(n)\zeta(m) = \zeta(n,m) + \zeta(m,n) + \zeta(m+n)$. これらの式を調和積関係式, あるいは sum-shuffle 関係式等と呼ぶ.

予想 5.3. 多重ゼータ値と 1 がが生成する $\mathbb{R}$ の部分 $\mathbb{Q}$ 代数を Z と書くことにすると, 次が成り立つ.

$$Z = \bigoplus_{w=0}^{\infty} Z_w.$$

5.2. **多重ゼータ値の標数 p 類似.** 前節で紹介した多重ゼータ値の標数 p 類似をあらためて導入し, 予想 5.3 の類似が成り立つことを証明する. そのためにプレ t モチーフの概念も定義する.

定義 5.4. ([22]) $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_r) \in \mathbb{N}^r$ に対し,

$$\zeta_C(\mathbf{s}) \coloneqq \sum_{\substack{a_i \in A_+, \\ \deg a_1 > \deg a_2 > \cdots > \deg a_r \geq 0}} \frac{1}{{a_1}^{s_1} {a_2}^{s_2} \cdots {a_r}^{s_r}} \in \mathbb{C}_\infty$$

と定義する. このような $\mathbb{C}_\infty$ の元を**標数 p の多重ゼータ値**とよぶ. また便宜上, 標数 p の多重ゼータ値 $\zeta_C(\mathbf{s})$ の重さといえば定義 5.1 の意味で $\mathbf{s}$ の重さを指すことにする.

注意 5.5. $s_1 > 1$ としなくてよい. なぜなら命題 2.14 により $s_1 = 1$ の場合も $\zeta_C(\mathbf{s})$ を定義する級数が収束するからである.

命題 5.6. 自然数の組 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r) \in \mathbb{N}^r$ に対し,

$$\zeta_C(\mathbf{s}) = \frac{\tilde{\pi}^{\mathrm{wt}(\mathbf{s})}}{\Gamma_{s_1} \cdots \Gamma_{s_r}} \sum_{d_1 > \cdots > d_r \geq 0} (H_{s_1-1} \Omega^{s_1})^{(d_1)}|_{t=\theta} \cdots (H_{s_r-1} \Omega^{s_r})^{(d_r)}|_{t=\theta}.$$

Proof.

$$\zeta_C(\mathbf{s}) = \sum_{d_1 > \cdots > d_r \geq 0} S_{d_1}(s_1) \cdots S_{d_r}(s_r)$$

であることに注意すると補題 4.13 より従う. □

命題 3.16 と同様にして次のことが示される.

命題 5.7. ([23]) 任意の自然数の組 $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^r$ に対し, $\zeta_C(\mathbf{s}) \neq 0$.

次に, 注意 5.2 (2) の類似である定理 5.9 を (特別な場合について) 示す. まずは次の補題を示す.

補題 5.8. ([24]) $d \in \mathbb{Z}_0,\ a,\, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $l \in \mathbb{Z}_{>0},\ f_i \in \mathbb{F}_p, a_i \in \mathbb{Z}_{>0}\,(1 \leq i \leq l)$ が存在して,

$$S_d(a)S_d(b) = S_d(a+b) + \sum_{i=1}^{l} f_i S_d(a_1,\, a+b-a_i) \tag{5.1}$$

となる. (f_i は a, b にのみ依存し d には依存しない)

Proof. $d = 0$ の場合は明らか. $d = 1$ の場合については [24] を参照せよ.

$d \geq 2$ とする. $n, \in A_+$ を次数 d の元とし, $m \in A_+$ を次元が d より小さい元とするとき,

$$S_{n,m} := \{(n+\nu m,\, n+\mu m) \ \mid\ \nu,\, \mu \in \mathbb{F}_q,\, \nu \neq \mu\} \in A \times A$$
$$S'_{n,m} := \{(n+\nu m,\, m) \ \mid\ \nu \in \mathbb{F}_q\} \in A \times A$$

とおく. すると, $n_1, n_2, \ldots, n_k,\ m_1, m_2, \ldots, m_k,$ を選んで,

$$S_{n_j,m_j} \cap S_{n_{j'},m_{j'}} = \varnothing, \quad S'_{n_j,m_j} \cap S'_{n_{j'},m_{j'}} = \varnothing,$$

$$\bigcup_{j=1}^{k} S_{n_j,m_j} = \{f \in A_+ \mid \deg f = d\} \times \{f \in A_+ \mid \deg f = d\},$$

$$\bigcup_{j=1}^{k} S'{}_{n_j,m_j} = \{f \in A_+ \mid \deg f = d\} \times \{f \in A_+ \mid \deg f < d\}.$$

とできる. $d = 1$ の場合より各 $1 \leq j \leq k$ に対して,

$$\begin{aligned}
\sum_{(x_1,\, x_2) \in S_{n_j,m_j}} \frac{1}{{x_1}^a {x_2}^b} &= \sum_{\nu \neq \mu \in \mathbb{F}_q} \frac{1}{(n_j+\nu m_j)^a (n_j+\mu m_j)^b} \\
&= \frac{1}{{m_j}^{a+b}} \sum_{\nu \neq \mu \in \mathbb{F}_q} \frac{1}{(\theta+\nu)^a(\theta+\mu)^b} \\
&= \frac{1}{{m_j}^{a+b}} \sum_{i=1}^{l} f_i \sum_{\nu \in \mathbb{F}_q} \frac{1}{(\theta+\nu)^{a_i}} \\
&= \sum_{i=1}^{l} \sum_{(y_1,\, y_2) \in S'_{n_j,m_j}} \frac{1}{{y_1}^{a_i} {y_2}^{a+b-a_i}}
\end{aligned}$$

が成り立つ. この等式を j について足し上げればよい. □

定理 5.9. ([24]) 自然数の組 $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{N}^r$, $\mathbf{s}' = (s'_1, \cdots, s'_{r'}) \in \mathbb{N}^{r'}$ に対し, $\mathbb{F}_p$ の元 f_i と $(c_{i_1}, \cdots, c_{i_{d_i}}) \in \mathbb{N}^{d_i}$ が存在して

$$\zeta_C(\mathbf{s})\zeta_C(\mathbf{s}') = \sum f_i \zeta_C(c_{i_1}, \cdots, c_{i_{d_i}})$$

と書ける. ここで, $\mathrm{wt}(c_{i_1}, \cdots, c_{i_{d_i}}) = \mathrm{wt}(\mathbf{s}) + \mathrm{wt}(\mathbf{s}')$ となる.

Proof. $r = r' = 1$ の場合のみ示す. (5.1) を d について足し上げればよい. 確かに,

$$\begin{aligned}\sum_{d=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{l} f_i S_d(a_i,\, a+b-a_i) \right) &= \sum_{i=1}^{l} f_i \sum_{d=0}^{\infty} S_d(a_i,\, a+b-a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{l} f_i \zeta_C(a_i,\, a+b-a_i),\end{aligned}$$

$$\sum_{d=0}^{\infty} S_d(a+b) = \zeta_C(a+b),$$

となり, また,

$$\sum_{d=0}^{\infty} S_d(a) S_d(b) = \zeta_C(a)\zeta_C(b) - \zeta_C(a,\, b) - \zeta_C(b,\, a)$$

となるので,

$$\zeta_C(a)\zeta_C(b) = \zeta_C(a,\, b) + \zeta_C(b,\, a) + \zeta_C(a+b) + \sum_{i=1}^{l} f_i \zeta_C(a_i,\, a+b-a_i).$$

□

系 5.10. 標数 p の多重ゼータ値で張られる $\mathbb{F}_p$ 線形空間は $\mathbb{F}_p$ 代数になる.

定義 5.11. $\bar{k}(t)$ 上 τ で生成され関係式 $\tau f = f^{(1)}\tau$ をもつ非可換 Laurent 多項式環を $\bar{k}(t)\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$ と書く.

定義 5.12. ([19]) **プレ t モチーフ**とは左 $\bar{k}(t)\langle \tau, \tau^{-1} \rangle$ 自由加群 M で $\bar{k}(t)$ 上有限生成であるものとする.

定義 5.13. 次を定める.

$\mathbb{T} := \{ f(t) \in \mathbb{C}_\infty[[t]] \mid f(t)$ は $|t|_\infty < 1$ で収束する $\}$.

$\mathbb{L} : \mathbb{T}$ の商体.

$$\mathbb{E} := \left\{ f(t) = \sum_{i \geq 0} a_i t^i \in \mathbb{C}_\infty[[t]] \;\middle|\; \mathbb{C}_\infty \text{で収束し}, \; [k_\infty(a_1, a_2, \ldots) : k_\infty] < \infty \right\},$$

注意 5.14. $\Omega \in \mathbb{E}$ である.

定義 5.15. M をプレ t モチーフとし, $\dim_{\bar{k}(t)} M = r+1$ とする. M の $\bar{k}(t)$ 上の基底 $\mathbf{m}$ を一つ固定し, Φ を τ の M への作用に関する表現行列とする. つまり, $\tau\mathbf{m} = \Phi\mathbf{m}$.

$\mathrm{GL}_{r+1}(\mathbb{L})$ の元 $\Psi = (\psi_{ij})$ で $\Psi^{(-1)} = \Phi\Psi$ であり $\psi_{ij}|_{t=\theta}$ が収束するならば, $\Psi|_{t=\theta} \in M_n(\mathbb{C}_\infty)$ を**周期行列**とよび $\Psi|_{t=\theta}$ の各成分を**周期**と呼ぶ.

定理 5.16. ([3]) 任意の組 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_r) \in \mathbb{N}^r$ に対し, $\zeta_C(\mathbf{s})$ はプレ t モチーフの周期である. また $\Phi = (\Phi_{ij})$ は次のように取れる.

$$\Phi_{ij} = \begin{cases} (t-\theta)^{s_i+s_{i+1}+\cdots+s_r} & (i = j \le r), \\ 1 & (i = j = r+1), \\ H_{s_i-1}^{(-1)}(t-\theta)^{s_i+s_{i+1}+\cdots+s_r} & (i = j+1), \\ 0 & (\text{その他の場合}). \end{cases}$$

Proof. $\Psi = (\psi_{ij})$, $\psi_{ij} \in \mathbb{E}$ を次のような下三角行列とすればよい.

$$\psi_{ij} := \begin{cases} \Omega^{s_i+s_{i+1}+\cdots+s_r} L(s_j, s_{j+1}, \ldots, s_{i-1}) & (i \ge j), \\ 0 & (i < j). \end{cases}$$

ただし, $i \ge j$ のとき,

$$L(s_j, s_{j+1}, \ldots, s_{i-1}) := \sum_{d_j > d_{j+1} > \cdots > d_{i-1} > 0} (H_{s_j-1}\Omega^{s_j})^{(d_j)} \cdots (H_{s_{i-1}-1}\Omega^{s_{i-1}})^{(d_{i-1})},$$
$$L(\varnothing) := 1.$$

このとき $\Psi^{-1} = \Phi\Psi$ が両辺の各成分を比較することにより示される. ここではのちに必要になる ${\psi_1}^{(-1)} = \Phi\psi_1$(ただし ψ_1 は Ψ の一列目) のみ確かめておこう.

$$\begin{aligned} \Omega^{(-1)} =& (t-\theta)\Omega, \\ L(s_1, \ldots, s_{j-1})^{(-1)} =& L(s_1, \ldots, s_{j-1}) \\ &+ (\Omega^{s_{j-1}} H_{s_{j-1}-1})^{(-1)} L(s_1, \ldots, s_{j-2}) \quad (j \ge 2). \end{aligned}$$

であるから, ベクトル ${\psi_1}^{(-1)}$ の第 i 成分 $(1 \le i \le r+1)$ は,

$$\begin{aligned} &\{\Omega^{s_{i-1}+s_{i+1}+\cdots+s_r} L(s_1, \ldots, s_{i-1})\}^{(-1)} \\ =& (t-\theta)^{s_i+s_{i+1}+\cdots+s_r}\Omega^{s_i+s_{i+1}+\cdots+s_r} \\ &\times \{L(s_1, \ldots, s_{i-1}) + (\Omega^{s_{i-1}} H_{s_{i-1}-1})^{(-1)} L(s_1, \ldots, s_{i-2})\} \\ =& (t-\theta)^{s_i+s_{i+1}+\cdots+s_r}\Omega^{s_i+s_{i+1}+\cdots+s_r} \\ &\times \{L(s_1, \ldots, s_{i-1}) + (t-\theta)^{s_{i-1}}\Omega^{s_{i-1}} H_{s_{i-1}-1}^{(-1)} L(s_1, \ldots, s_{i-2})\} \\ =& (t-\theta)^{s_{i-1}+s_i+\cdots+s_r} H_{s_{i-1}-1}^{(-1)} L(s_1, \ldots, s_{i-2})\Omega^{s_{i-1}+s_i+\cdots+s_r} \\ &+ (t-\theta)^{s_i+s_{i+1}+\cdots+s_r} L(s_1, \ldots, s_{i-1})\Omega^{s_i+s_{i+1}+\cdots+s_r} \end{aligned}$$

と計算でき, $\Phi\psi_1$ の第 i 成分と等しいことがわかる.

また命題 5.6 より標数 p の多重ゼータ値が周期であることがわかる. □

この表示と次の判定法を用いて, 直和予想を解決する.

定理 5.17. ([1]) $\Phi \in \mathrm{M}_d(\bar{k}[t])$ で, ある $\bar{k}^\times$ の元 c と非負整数 s で $\det\Phi = c(t-\theta)^s$ となるものを固定する.

さらに $\psi^{(-1)} = \Phi\psi$ となるベクトル $\psi \in \mathrm{M}_{d,1}(\mathbb{E})$ が存在すると仮定する.

このとき, $\rho\psi(\theta) = 0$ となる $\mathrm{M}_{1,d}(\bar{k})$ の元 ρ に対し, $P(\theta) = \rho$, $P\psi = 0$ を満たす $\mathrm{M}_{1,d}(\bar{k}[t])$ の元 P が存在して, $P|_{t=\theta} = \rho$ となる.

この判定法は例えば次のように用いる.

系 5.18. $\tilde{\pi} \notin \bar{k}$. つまり $\tilde{\pi}$ は k 上超越的である[2].

Proof. 背理法を用いる. $\tilde{\pi}^{-1} = \Omega(\theta) \in \bar{k}$ と仮定すると $\rho_0 + \Omega(\theta) = 0$ となる $\rho_0 \in \bar{k}^\times$ が存在する事が従う.

$\Phi = (t-\theta)$, $\psi = \Omega$ とおく. $\Omega \in \mathrm{M}_1(\mathbb{E})$ であり, さらに $\psi^{(-1)} = \Phi\psi$ が次のように示せる.

$$
\begin{aligned}
(\Phi\psi)^{(1)} &= \left[(t-\theta)(-\theta)^{-\frac{q}{q-1}} \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{t}{\theta^{q^i}}\right)\right]^{(1)} \\
&= (t-\theta^q)(-\theta^q)^{\frac{-q}{q-1}} \prod_{i=2}^{\infty}\left(1-\frac{t}{\theta^{q^i}}\right) \\
&= (t-\theta^q)(-\theta^q)^{\frac{-q}{q-1}} \frac{\theta^q}{\theta^q - t} \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{t}{\theta^{q^i}}\right) = \psi.
\end{aligned}
$$

定理 5.17 により, $P_0 + P_1\Omega = 0$ であり, さらに $P_0|_{t=\theta} = \rho_0$, $P_1|_{t=\theta} = 1$ となる $\bar{k}[t]$ の元 P_0, P_1 が取れる.

$\Omega(\theta^{q^i}) = 0$ であるが, $P_0(\theta^{q^i}) = \rho_0^{(i)} \neq 0$. これは矛盾である. □

定義 5.19. 標数 p の多重ゼータ値の積 $\zeta_C(\mathbf{s}_1)\cdots\zeta_C(\mathbf{s}_r)$ に対し (r は自然数), *total weight* を $\mathrm{wt}(\mathbf{s}_1) + \cdots + \mathrm{wt}(\mathbf{s}_r)$ で定める.

定義 5.20. ([7]) 1 以上の自然数 w に対し, Z_w を標数 p の多重ゼータ値の積で total weight が w であるものにより張られる $\mathbb{C}_\infty$ の k 線型部分空間とする. 一方で $Z_0 := k$ とする.

定理 5.21. ([7]) 互いに相異なる自然数 $w_1, w_2, \ldots, w_l$ をとる. 各 i $(1 \le i \le l)$ に対し V_i を k 線形独立な Z_{w_i} の部分集合とすると, $\{1\} \cup \bigcup_{i=1}^{l} V_i$ は $\bar{k}$ 上線型独立である.

次の系は予想 5.3 の類似である.

[2] 円周率 π が $\mathbb{Q}$ 上超越的である結果 (Lindemann, 1882) の標数 p 類似である.

系 5.22. ([7]) 定理 5.9 より標数 p 多重ゼータ値と 1 で生成される $\bar{k}$ 線型空間は $\mathbb{C}_\infty$ の部分 $\bar{k}$ 代数をなすことが分かる．この $\bar{k}$ 代数を Z とすると，以下のように

$$Z = \bigoplus_{w=0}^{\infty} Z_w$$

と Z_w の直和で表される．

定理 5.21 の証明において，標数 p の多重ゼータ値やその積が次で定義される MZ property を持つことが重要になる．

定義 5.23. ([7]) Y を $\bar{k}_\infty$ の可逆元とする．このとき，Y が重さを $w \in \mathbb{N}$ として *MZ property* を持つとは，以下の条件を満たす $\Phi \in M_d(\bar{k}_\infty[t])$, $\psi \in M_{d,1}(\mathbb{E})$ が存在することであると定義する．(d は自然数)

(1) Φ, ψ は定理 5.17 の仮定をみたす．

(2) Φ は次のような形である．

$$\Phi = \begin{pmatrix} * & \dots & * & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 \\ * & \dots & * & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) k の可逆元 c により

$$\psi(\theta) = \begin{pmatrix} 1/\tilde{\pi}^w \\ * \\ \vdots \\ * \\ cY/\tilde{\pi}^w \end{pmatrix},$$

と書け，また自然数 N に対し，

$$\psi(\theta^{q^N}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (cY/\tilde{\pi}^w)^{q^N} \end{pmatrix}.$$

となる．

命題 5.24. 標数 p 多重ゼータ値 $\zeta_C(\mathbf{s})$ は重さを $\mathrm{wt}(\mathbf{s})$ として MZ property を持つ．

Proof. Φ を定理 5.16 のように取り ψ を定理 5.16 の行列 Ψ の第一列目とすればよい．

Ω の定義から $\Omega|_{t=\theta^{q^N}} = 0$ なので，$\psi|_{t=\theta^{q^N}}$ は一番下の成分を除いて 0 である．また，1 以上の自然数 d にたいして

$$\Omega^{(d)} = \frac{\Omega}{(t-\theta^q)\cdots(t-\theta^{q^d})}$$

であることから,

$$\sum_{\substack{d_1>d_2>\cdots>d_r>0\\ d_r>N}} (H_{s_{j+1}-1}\Omega^{s_j})^{(d_{i+1})}\cdots(H_{s_{i-1}-1}\Omega^{s_{i-1}})^{(d_{i-1})}\big|_{t=\theta^{q^N}} = 0.$$

となる. したがって

$$\begin{aligned} &L(s_1, \ldots, s_r)\big|_{t=\theta^{q^N}} \\ &= \sum_{d_1>\cdots>d_r>0} (H_{s_1-1}\Omega^{s_1})^{(d_1)}\cdots(H_{s_{i-1}-1}\Omega^{s_r})^{(d_r)}\big|_{t=\theta^{q^N}} \\ &= \sum_{d_1>\cdots>d_r\geq N} (H_{s_1-1}\Omega^{s_1})^{(d_1)}\cdots(H_{s_{i-1}-1}\Omega^{s_r})^{(d_r)}\big|_{t=\theta^{q^N}} \\ &= \sum_{d_1>\cdots>d_r>0} (H_{s_1-1}\Omega^{s_1})^{(d_1+N)}\cdots(H_{s_r-1}\Omega^{s_r})^{(d_r+N)}\big|_{t=\theta^{q^N}} \\ &= \left\{ \sum_{d_1>d_2>\cdots>d_r>0} (H_{s_1-1}\Omega^{s_1})^{(d_1)}\cdots(H_{s_r-1}\Omega^{s_r})^{(d_r)}\big|_{t=\theta} \right\}^{q^N}. \end{aligned}$$

となり, 定義 5.23, (3) の後半が示される. ここで最後の等号については, 実際に各項 $(H_{s_1-1}\Omega^{s_1})^{(d_1+N)}\cdots(H_{s_r-1}\Omega^{s_r})^{(d_r+N)}\big|_{t=\theta^{q^N}}$ を

$$(H_{s_1-1}\Omega^{s_1})^{(d_1+N)}\cdots(H_{s_r-1}\Omega^{s_r})^{(d_r+N)}\big|_{t=\theta^{q^N}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{C}_\infty[[t]]$$

と表した際に

$$\left.\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)^{(N)}\right|_{t=\theta^{q^N}} = \sum_{n=0}^{\infty} {a_n}^{q^N} \theta^{nq^N} = \left\{\left.\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\right|_{t=\theta}\right\}^{q^N}$$

が成り立つことを用いて示される.

他の条件は定理 5.16 と注意 4.14 から従う. □

また次の命題から標数 p 多重ゼータ値の積も MZ property を持つ事が従う.

命題 5.25. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ を $\bar{k}_\infty^\times$ の元でそれぞれ重さを $w_1, w_2, \ldots, w_n$ として MZ property を満たすものとする. このとき, 積 $Y_1Y_2\cdots Y_n$ は重さを $w_1+w_2+\cdots+w_n$ として MZ property を持つ.

Proof. $n=2$ としてよい. $\Phi = (\phi_{i,j})_{i,j} \in M_d(\bar{k}_\infty[t])$, $\psi \in M_{d,1}(\mathbb{E})$ および $\Phi' \in M_{d'}(\bar{k}_\infty[t])$, $\psi' \in M_{d',1}(\mathbb{E})$ をそれぞれ Y_1, Y_2 に対して定義 5.23 の条件を満たすようにとる.

積 Y_1Y_2 に対しては Kronecker 積 ([20]) を用いて

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &:= \Phi \otimes \Phi' := (\phi_{i,j}\Phi') \in M_{dd'}(\bar{k}_\infty[t]), \\ \bar{\psi} &:= \psi \otimes \psi' := (\psi_1(\psi')^{Tr}, \ldots, , \psi_d(\psi')^{Tr})^{Tr} \in M_{dd',1}(\mathbb{E}), \end{aligned}$$

ととれば定義 5.23 の条件が満たされる. □

定理 5.21 は次の定理に帰着される.

定理 5.26. ([7]) 異なる自然数 $w_1, w_2, \ldots, w_l$ をとる. 各 $i\,(1 \le i \le l)$ に対し, V_i を重さを w_i として MZ property を満たす数の集合で k 線形独立なものとすると, $\{1\} \cup \bigcup_{i=1}^{l} V_i$ は $\bar{k}$ 上線型独立である.

ここで証明のためにベクトルと行列の直和の表記を定めておく.

$v = (v_1, \ldots, v_d)^{\mathrm{Tr}} \in M_{d,1}$ と $v' = (v'_1, \ldots, v'_{d'})^{\mathrm{Tr}} \in M_{d',1}$ に対し,

$$v \oplus v' := (v_1, \ldots, v_d, v'_1, \ldots, v'_{d'})^{\mathrm{Tr}} \in M_{d,1} \oplus M_{d',1} \simeq M_{d+d',1}$$

とし, $A \in M_d$ と $B \in M_{d'}$ に対しては,

$$A \oplus B := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

とする.

Proof. 背理法を用いる. $\{1\} \cup \bigcup_{i=1}^{l} V_i$ が $\bar{k}$ 上線型従属であると仮定する. まずはこの仮定から V_1 が $\bar{k}$ 線型従属であるという結論を導く.

$w_1 > w_2 > \cdots > w_l$, $\langle V_1 \rangle_{\bar{k}} \cap \langle \{1\} \cup \bigcup_{i=2}^{l} V_i \rangle_{\bar{k}} \neq (0)$ としても一般性は失われない.

$i = 1, 2, \ldots, l$ に対して $V_i = \{Y_{i1}, \ldots, Y_{im_i}\}$ とする. 各 Y_{ij} は MZ property を持つので, 定義 5.23 の条件を満たす $d_{ij} \in \mathbb{N}$, $\Phi_{ij} \in M_{d_{ij}}(\bar{k}_\infty[t])$, $\psi_{ij} \in M_{d_{ij},1}(\mathbb{E})$ をとることができる. これらを用いて $\tilde{\Phi}, \tilde{\psi}$ を

$$\tilde{\Phi} := \bigoplus_{i=1}^{l} \left(\bigoplus_{j=1}^{m_i} (t-\theta)^{w_1 - w_j} \Phi_{ij} \right) \in M_D(\bar{k}_\infty[t]),$$

$$\tilde{\psi} := \bigoplus_{i=1}^{l} \left(\bigoplus_{j=1}^{m_i} \Omega^{w_1 - w_j} \psi_{ij} \right) \in M_{D,1}(\mathbb{E}),$$

$$(D := \sum_{i,j} d_{ij})$$

と定める. すると

$$\tilde{\Phi}\tilde{\psi} = \bigoplus_{i=1}^{l} \left(\bigoplus_{j=1}^{m_i} (t-\theta)^{w_1 - w_j} \Phi_{ij} \psi_{ij} \right) = \bigoplus_{i=1}^{l} \left(\bigoplus_{j=1}^{m_i} (t-\theta)^{w_1 - w_j} \psi_{ij}^{(-1)} \right) = \tilde{\psi}^{(-1)}$$

が従う. $\tilde{\psi}$ の取り方から k の可逆元 c_{ij} によって

$$\tilde{\psi}(\theta) = \bigoplus_{i=1}^{l} \left(\bigoplus_{j=1}^{m_i} \begin{pmatrix} 1/\tilde{\pi}^{w_1} \\ * \\ \vdots \\ * \\ c_{ij} Y_{ij}/\tilde{\pi}^{w_1} \end{pmatrix} \right)$$

となり, また $N \in \mathbb{N}$ をとると

$$\tilde{\psi}(\theta^{q^N}) = \bigoplus_{j=1}^{m_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (cY_{1j}/\tilde{\pi}^{w_1})^{q^N} \end{pmatrix} \bigoplus_{i=2}^{l} \left(\bigoplus_{j=1}^{m_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \tag{5.2}$$

$\langle V_1 \rangle_{\bar{k}} \cap \langle \{1\} \cup \bigcup_{i=2}^{l} V_i \rangle_{\bar{k}} \neq (0)$ と仮定していたのでベクトル

$$\rho = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1m_1}, v_{21}, \ldots, v_{lm_l}), \quad (v_{ij} \in M_{1,d_{ij}}(\bar{k}))$$

で次の条件を満たすものが存在する.

- $\rho\bar{\psi}(\theta) = 0$,
- ある $1 \leq s \leq m_1$ で v_{1s} の第 d_{1s} 成分が 0 でない,
- v_{ij} は d_{ij} 成分以外 0 である.

定理 5.17 により $\tilde{\psi}(\theta)$ の成分が満たす $\bar{k}$ 線型関係式 $\rho\bar{\psi}(\theta) = 0$ は $\tilde{\psi}$ の成分がみたす $\bar{k}(t)$ 線型関係式に持ち上がる. つまり

$$F := (\mathbf{f}_{11}, \ldots, \mathbf{f}_{1m_1}, \mathbf{f}_{21}, \ldots, \mathbf{f}_{l1}, \ldots, \mathbf{f}_{lm_l}), \quad (\mathbf{f}_{ij} \in M_{1,d_{ij}}(\bar{k}(t)))$$

で $F\tilde{\psi} = 0,\ F(\theta) = \rho$ を満たすものが存在する.

v_{1s} の第 d_{1s} 成分が 0 でないので $\mathbf{f}_{1s}$ の第 d_{1s} 成分 f_{1s} も 0 でない. よって十分に大きな N で $\mathbf{f}_{1s}(\theta^{q^N}) \neq 0$. $F\tilde{\psi} = 0$ を $t = \theta^{q^N}$ で考えると, (5.2) より $Y_{11}^{q^N}, Y_{12}^{q^N}, \ldots, Y_{1m_1}^{q^N}$ が満たす非自明な $\bar{k}$ 線型関係式が得られる. $\bar{k}_\infty \to \bar{k}_\infty, x \mapsto x^{q^N}$ が単射なので, q^N 乗根をとることで $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1m_1}$ が非自明な $\bar{k}$ 線型関係式を満たすことが導かれた. よって V_1 は $\bar{k}$ 線形従属な集合である.

後はこの $\bar{k}$ 線型関係式を使って $Y_{11}, Y_{12}, \ldots, Y_{1m_1}$ が非自明な k 線型関係式を満たすという結論を導けば証明が完成するが, ここではその議論の概略を述べるにとどめる[3].

$\{Y_{12}, Y_{13}, \ldots Y_{1m_1}\}$ が $\bar{k}$ 線形独立で $Y_{11} \in \langle Y_{12}, Y_{13}, \ldots Y_{1m_1} \rangle_{\bar{k}}$ であると仮定してよい. ここで

$$\Phi := \bigoplus_{j=1}^{m_1} \Phi_{1j}, \quad \psi := \bigoplus_{j=1}^{m_1} \psi_{1j}$$

とおいて, 定理 5.17 を用いると,

$$G := (\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_{m_1}), \quad \mathbf{g}_{1j} := (g_{j1}, \ldots, g_{jd_j}) \in M_{1,d_j}(\bar{k}(t))$$

が存在して $G\psi = 0$, $g_{1d_1}|_{t=\theta} = 1$, $g_{jh}|_{t=\theta} = 0$ $(1 \leq j \leq m_1, 1 \leq h < d_j)$ となることがわかる. G を $(1/g_{1d_1})G$ で取り換えることにより $g_{1d_1} = 1$ としてもよい.

$G\psi = 0$ から直ちに ψ の成分の線型関係式

[3]詳しくは [7] を参照せよ

$$(G - G^{(-1)}\Phi)\psi = 0 \tag{5.3}$$

が得られる．

$(G - G^{(-1)}\Phi) \neq 0$, つまり, (5.3) が非自明な線型関係式であると仮定すると，十分を大きい自然数 N をとり $t = \theta^{q^N}$ を代入することで，$Y_{12}^{q^N}, Y_{13}^{q^N}, \ldots, Y_{1m_1}^{q^N}$ がみたす非自明な $\bar{k}$ 線型関係式が得られる．これは $Y_{12}, Y_{13}, \ldots, Y_{1m_1}$ が $\bar{k}$ 線型独立であるという仮定に反する．したがって $G - G^{(-1)}\Phi = 0$.

成分を比較して

$$g_{jd_j} = {g_{jd_j}}^{(-1)}, \quad (j = 2, 3, \ldots, m_1), \tag{5.4}$$

つまり $j = 2, 3, \ldots, m_1$ に対して $g_{jd_j} \in \mathbb{F}_q(t)$ であることがわかる．したがって $g_{jd_j}(\theta) \in \mathbb{F}_q(\theta) = k$ となり，$G\psi = 0$ に $t = \theta$ を代入して $\{Y_{11}, Y_{12}, \ldots Y_{1m_1}\}$ の非自明な k 線型関係式が得られる． よって V_1 は k 線形従属な集合である．これは V_1 についての仮定に反するので，$\{1\} \cup \bigcup_{i=1}^{l} V_i$ は $\bar{k}$ 上線型独立であることが従う． □

5.3. **交代多重ゼータ値とその標数 p 類似.** 最後に [15] で導入された標数 p 交代多重ゼータ値 (定義 5.28) を紹介する．まずは標数 0 の場合を考える．

定義 5.27. 自然数の組 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r) \in \mathbb{N}^r$ と組 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r) \in \{-1, 1\}^r$ を取る．$(s_1, \epsilon_1) \neq (1, 1)$ のとき，

$$\zeta(\mathbf{s}\,;\boldsymbol{\epsilon}) := \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_r > 0} \frac{{\epsilon_1}^{n_1}{\epsilon_2}^{n_2}\cdots{\epsilon_r}^{n_r}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_r^{s_r}} \in \mathbb{R}$$

と定める．これらの実数を**交代多重ゼータ値**[4]と呼ぶ．

$\zeta(\mathbf{s}; 1, \ldots, 1) = \zeta(\mathbf{s})$ なので, 交代多重ゼータ値は多重ゼータ値の一般化である．これの標数 p 類似を以下のように定義する．

定義 5.28. ([15]) 自然数の組 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_r) \in \mathbb{N}^r$ と組 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r) \in (A^\times)^r$ に対し，

$$\zeta_C(\mathbf{s}\,;\boldsymbol{\epsilon}) := \sum_{\substack{a_i \in A_+, \\ \deg a_1 > \deg a_2 > \cdots > \deg a_r \geq 0}} \frac{{\epsilon_1}^{\deg a_1}{\epsilon_2}^{\deg a_2}\cdots{\epsilon_r}^{\deg a_r}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_r^{s_r}} \in \mathbb{C}_\infty$$

と定める．これを**標数 p 交代多重ゼータ値**と呼ぶ．

[4]Euler 和とも呼ばれる．

$\{-1, 1\} = \mathbb{Z}^{\times}$ であることに注意すれば標数 p 交代多重ゼータ値が交代多重ゼータ値の類似であることに納得できるだろう．通常の標数 p 多重ゼータ値の場合 (命題 5.7, 定理 5.9, 系 5.22) と同様に次のような定理が成り立つ．

定理 5.29. ([15]) 任意の自然数の組 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_r) \in \mathbb{N}^r$ と組 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r) \in (A^{\times})^r$ に対し，$\zeta(\mathbf{s}\,;\boldsymbol{\epsilon}) \neq 0$

Proof. $\epsilon \in A^{\times}$ と $d, k \in \mathbb{N}$ に対し，$S_d(k\,;\epsilon) \coloneqq \sum_{\deg a = d} \epsilon^d / a^s = \epsilon^d S_d(k)$ と置くと，

$$\zeta_C(\mathbf{s}\,;\boldsymbol{\epsilon}) = \sum_{d_1 > d_2 > \cdots > d_r \geq 0} S_{d_1}(s_1\,;\epsilon_1) \cdots S_{d_r}(s_r\,;\epsilon_r) \tag{5.5}$$

と書ける．$|S_d(k\,;\epsilon)|_{\infty} = |S_d(k)|_{\infty} < |S_{d-1}(k)|_{\infty} = |S_{d-1}(k\,;\epsilon')|_{\infty}$ であるから，通常の標数 p 多重ゼータ値の場合と同様に示せる． □

標数 p 交代多重ゼータ値の積 $\zeta_C(\mathbf{s}_1\,;\boldsymbol{\epsilon}_1) \cdots \zeta_C(\mathbf{s}_r\,;\boldsymbol{\epsilon}_r)$ に対し (r は自然数)，*total weight* を $\mathrm{wt}(\mathbf{s}_1) + \cdots + \mathrm{wt}(\mathbf{s}_r)$ で定める．

1 以上の自然数 w に対し，AZ_w を標数 p 交代多重ゼータ値の積で total weight が w であるものにより張られる $\mathbb{C}_{\infty}$ の $\bar{k}$ 線型部分空間とする．$AZ_0 \coloneqq \bar{k}$ とする．さらに，AZ を標数 p 交代多重ゼータ値と 1 で生成される $\mathbb{C}_{\infty}$ の $\bar{k}$ 線形部分空間とする．

定理 5.30. ([15]) 次が成り立つ．

(1) $AZ_w \cdot AZ_{w'} \subset AZ_{w+w'}$．特に AZ は $\mathbb{C}_{\infty}$ の部分 $\bar{k}$ 代数である．
(2) $AZ = \bigoplus_{w=0}^{\infty} AZ_w$．

(2) を示すために，標数 p 交代多重ゼータ値がプレ t モチーフの周期であり，MZ property を適切に修正した条件 (定義 5.32) を満たすことを確認する．

定理 5.31. ([15]) 任意の組 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \cdots, s_r) \in \mathbb{N}^r$ と組 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_r) \in (A^{\times})^r$ に対し，$\zeta_C(\mathbf{s}\,;\boldsymbol{\epsilon})$ はプレ t モチーフの周期である．

Proof. $\Phi^{al} = (\Phi^{al}_{ij})$ は次のように取り，$\Psi^{al} = (\psi^{al}_{ij})$, $\psi^{al}_{ij} \in \mathbb{E}$ を次のような下三角行列とすればよい．

$$\Phi^{al}_{ij} \coloneqq \begin{cases} (t-\theta)^{s_i + s_{i+1} + \cdots + s_r} & (i = j \leq r), \\ 1 & (i = j = r+1), \\ {\gamma_i}^{(-1)} H^{(-1)}_{s_i - 1} (t-\theta)^{s_i + s_{i+1} + \cdots + s_r} & (i = j+1), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

$$\psi^{al}_{ij} \coloneqq \begin{cases} \gamma_j \cdots \gamma_{i-1} \Omega^{s_i + s_{i+1} + \cdots + s_r} L^{al}(s_j, \ldots, s_{i-1}\,;\epsilon_j, \ldots, \epsilon_{i-1}) & (i \geq j), \\ 0 & (i < j). \end{cases}$$

ただし γ_i は ϵ_i の $(q-1)$ 乗根で, $i \geq j$ のとき,

$$L^{al}(s_j, , \dots, s_{i-1}; \epsilon_j, \dots, \epsilon_{i-1}) := \sum_{d_j > d_{j+1} > \cdots d_{i-1} > 0} {\epsilon_j}^{d_j} (H_{s_j - 1} \Omega^{s_j})^{(d_j)} \cdots {\epsilon_{i-1}}^{d_{i-1}} (H_{s_{i-1}-1} \Omega^{s_{i-1}})^{(d_{i-1})},$$

$$L^{al}(\varnothing) := 1.$$

このとき, ${\gamma_i}^{(-1)} = \epsilon_i^{-1} \gamma_i$ $(1 \leq i \leq r)$ に注意すると, 定理 5.16 と同様に ${\Psi^{al}}^{(-1)} = \Phi^{al} \Psi^{al}$ が成り立つ事が示せる. (5.5) より $\zeta_C(\mathbf{s}, \boldsymbol{\epsilon})$ は周期である. □

次のような MZ property の変種を定義する.

定義 5.32. ([15]) Y を $\bar{k}_\infty$ の可逆元とする. このとき, Y が重さを $w \in \mathbb{N}$ として *AMZ property* を持つとは, 以下の条件を満たす $\Phi \in M_d(\bar{k}_\infty[t])$, $\psi \in M_{d,1}(\mathbb{E})$ が存在することであると定義する. (d は自然数)

(1) Φ, ψ は定理 5.17 の仮定をみたす.
(2) Φ は次のような形である.

$$\Phi = \begin{pmatrix} * & \dots & * & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 \\ * & \dots & * & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) $\overline{\mathbb{F}}_q$ の加逆元 a と k の可逆元 b により

$$\psi(\theta) = \begin{pmatrix} 1/\tilde{\pi}^w \\ * \\ \vdots \\ * \\ abY/\tilde{\pi}^w \end{pmatrix}$$

と書ける.
(4) さらに, 正の整数 N に対し, $\mathbb{F}_q$ の加逆元 c が存在して

$$\psi(\theta^{q^N}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ ac^N (bY/\tilde{\pi}^w)^{q^N} \end{pmatrix}$$

となる.

定理 5.33. 標数 p の交代多重ゼータ値は AMZ property を持つ.

定義 5.23 の Φ, ψ として Φ^{al}, ψ_1^{al}(ただし ψ_1^{al} は Ψ^{al} の一列目) をとり, 定理 5.24 と同様に計算すればよい. 詳しくは [15] を参照せよ.

6. 謝辞

RIMS 研究集会「多重ゼータ値の諸相」のオーガナイザーである古庄英和先生ならびに本記事の作成および各証明等の追加, 補足に協力いただいた松月大知氏にはここに記して感謝する. また, 本稿は JSPS 科研費 JP18J15278, 並びに National Center for Theoretical Sciences の援助のもとに作成されたものである.

References

[1] G. W. Anderson, W. D. Brownawell, M, A, Papanilolas, *Determination of the Algebraic Relations among Special Γ-Values in Positive Characteristic*, Ann. of Math. (2) 160 (2004), no. 1, 237–313.

[2] G. W. Anderson, D. S. Thakur, *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values.* Ann. of Math. (2) 132 (1990), no. 1, 159–191.

[3] G. W. Anderson, D. S. Thakur, *Multizeta values for $\mathbb{F}_q(t)$, their period interpretation, and relations between them*,Int. Math. Res. Not. IMRN 2009, no. 11, 2038–2055.

[4] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field,* Duke Math. J. 1 (1935), no. 2, 137–168.

[5] L. Carlitz, *An analogue of the von Staudt-Clausen theorem,* Duke Math. J. 3 (1937), no. 3, 503–517.

[6] C. -Y. Chang, *On characteristic p multizeta values*, Algebraic number theory and related topics 2012, 177–202, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B51, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014.

[7] C. -Y. Chang, *Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic*, Compos. Math. 150 (2014), no. 11, 1789–1808.

[8] C.-Y. Chang, Y. Mishiba, *On a conjecture of Furusho over function fields*, submitted.

[9] H.-J. Chen, *Anderson-Thakur polynomials and multizeta values in positive characteristic*, Asian J. Math. 21 (2017), 1135–1152.

[10] Y. -T. Chen, *On v-adic multiple zeta values in positive characteristic* to appear in RIMS Kokyuroku (Proc. RIMS) *Various Aspects of Multiple Zeta Value* **2160** (this volume).

[11] J. Diaz-Vargas, *Riemann hypothesis for $\mathbb{F}_p[T]$*, J. Number Theory 59 (1996), no. 2, 313–318.

[12] H. Furusho, *p-adic multiple zeta values I – p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation*, Invent. Math., **155**, (2004), no.2, 253–286.

[13] D. Goss, *v-adic zeta functions, L-series and measures for function fields*, Invent. Math. 55 (1979), no. 2, 107–119.

[14] D. Goss, *Basic structures of function field arithmetic.*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[15] R. Harada, *Alternating multizeta values in positive characteristic*, arXiv:1909.03849

[16] R. Harada, *On characteristic p alternating multizeta values*, to appear in RIMS Kokyuroku (Proc. RIMS) *Various Aspects of Multiple Zeta Value* **2160** (this volume).

[17] A. N. Kochubei, *Analysis in Positive Characteristic*, Cambridge Tracts in Mathematics, 178. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[18] E. Lucas, *Sur les congruences des nombres eulériens et les coefficients différentiels des functions trigonométriques suivant un module premier*, Bull. Soc. Math. France 6 (1878), 49–54.

[19] M. A. Papanikolas, *Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms*, Invent. Math. 171 (2008), no. 1, 123–174.

[20] J. R. Schott, *Matrix analysis for statistics*, Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2005.

[21] J. T. Sheats, *The Riemann hypothesis for the Goss zeta function for* $\mathbb{F}q[T]$, J. Number Theory 71 (1998), no. 1, 121–157.

[22] D. S. Thakur, *Function Field Arithmetic*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2004.

[23] D. S. Thakur, *Power sums with applications to multizeta and zeta zero distribution for* $\mathbb{F}_q[t]$, Finite Fields Appl. 15 (2009), no. 4, 534–552.

[24] D. S. Thakur, *Shuffle relations for function field multizeta values*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2010, no. 11, 1973–1980.

[25] G. Todd *Linear Relations between Multizeta Values*, Thesis (Ph.D.)nThe University of Arizona. 2015.

[26] D. Wan, *On the Riemann hypothesis for the characteristic p zeta function*, J. Number Theory 58 (1996), no. 1, 196–212.

[27] A. Weil, *Basic Number Theory*, Reprint of the second (1973) edition. Classics in Mathematics. Springer Verlag, Berlin, 1995.

[28] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic* p, Ann. of Math. (2) 134 (1991), no. 1, 1–23.