On a certain sum of derivatives of Dirichlet L-functions

名古屋大学多元数理科学研究科　小林　弘京
Hirotaka Kobayashi
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1　序論

1.1　Riemann ζ 関数と先行研究

$s=\sigma+it$ を複素変数とする. Riemann ζ 関数 $\zeta(s)$ は

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\quad(\sigma>1)$$

によって定義される. さらにこの関数は,

$$\Delta(s):=2^s\pi^{s-1}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(1-s)$$

とすると, 関数等式

$$\zeta(s)=\Delta(s)\zeta(1-s)$$

を満たし, これによって複素平面全体へ有理型に解析接続される. Riemann ζ 関数に関して最も有名かつ重要であると考えられている予想は,

予想 1 (Riemann 予想)**.** $\zeta(s)$ の複素零点は全て $\sigma=\frac{1}{2}$ 上に存在するであろう.

というものである. そして ζ 関数の零点に関する研究は数多あり, なかには計算機によってそれを計算する試みも行われてきた. Haselgrove と Miller による [3] は ζ 関数の零点やそれに関する様々な値を計算した結果をまとめたものである. この表が発表された翌年, Shanks によって Review [5] が書かれているのだが, この Review の中で彼は次のような予想を立てている. $\rho=\beta+i\gamma$ を $\zeta(s)$ の零点とすると,

予想 2. $\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)$ は平均的に実でありかつ正の値である.

より正確には,

$$\phi_n := \arg\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)$$

とすると,

$$\lim_{K\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{K}\phi_n}{K}=0$$

との予想を述べている. この予想式に関しては 2010 年に Trudgian 氏 [7] によってより強い主張, すなわち任意の正の数 α に対して

$$\lim_{K\to\infty}\frac{\sum_{n=1}^{K}\phi_n}{K^\alpha}=0$$

が成り立つ, ということが示された. 本稿の主題は, この予想に関する藤井昭雄氏 [1] による 1994 年の以下の結果に関わるものである.

定理 1. T を充分大なる正の数とすると, ある正の定数 c が存在し,

$$\begin{aligned}\sum_{0<\gamma\le T}\zeta'(\rho)=\frac{1}{4\pi}T\log^2\frac{T}{2\pi}+(\gamma_0-1)\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}\\+(\gamma_0^2+\gamma_1-\gamma_0+1)\frac{T}{2\pi}+O\left(T\exp\left(-c\sqrt{\log T}\right)\right)\end{aligned}$$

が成り立つ. さらに, Riemann 予想が成り立てば, 誤差項は $T^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{7}{2}}T$ とできる.

ここで γ_0 と γ_1 は $\zeta(s)$ の Laurent 展開

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_k(s-1).$$

に現れる係数である. さて, 藤井氏が証明した漸近式の第一項を見ると, 実かつ正となっている. 従って, Riemann 予想の仮定下での結果と併せて, Shanks の予想通り $\zeta'\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)$ は平均的に実かつ正であるということが分かる.

1.2 Goneck の補題

Riemann ζ 関数などのような Dirichlet 級数表示をもつ関数の離散平均を考える際に重要な補題として, Gonek 氏 [2] が 1984 年に証明し, Steuding 氏 [6] が一般化した以下の補題がある.

補題 1. $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意の $\varepsilon > 0$ に対して $b_n \ll n^{\varepsilon}$ を満たす複素数列とする. さらに $a > 1$ とすると, 充分大きい T に対して,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_1^T \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^{a+it}}\right)\Delta(1-a-it,\chi)dt\\&=\frac{\tau(\chi)}{q}\sum_{1\leq n\leq qT/2\pi} b_n e\left(-\frac{n}{q}\right)+O\left((qT)^{a-\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}$$

が成り立つ.

この補題は, 本稿で考察するような離散平均の研究では必ずと言って良いほど頻繁に利用されており, 実際に藤井氏は主定理を得るためにこの補題を使用している. しかし, Stirling の公式から得られる Gamma 因子の評価式

$$\Delta(1-s,\chi)=\frac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}}e^{-\frac{\pi i}{4}}\left(\frac{qt}{2\pi}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}}\exp\left(it\log\frac{qt}{2\pi e}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right) \tag{1}$$

から導かれる補題であるため, 例えば Gamma 因子 $\Delta(s,\chi)$ のべきが一つでも上がると誤差項が大きくなり, たちまち役に立たなくなってしまう, という点に注意が必要である.

2 主結果

さて, 藤井氏の結果に関して, 当然, Dirichlet L-関数でも同様の事実が成り立つことが予想できる. 本稿における主定理はそのことを主張する. すなわち

定理 2. T 充分大きい正の数, c_1 をある正の定数, $\chi \pmod q$ を原始指標とする. このとき $q \leq \exp\left(c_1\sqrt{\log T}\right)$ に対して一様に

$$\begin{aligned}\sum_{0<\gamma_\chi\leq T} L'(\rho_\chi,\chi) &= \frac{1}{4\pi}T\log^2\frac{qT}{2\pi}+a_1\frac{T}{2\pi}\log\frac{qT}{2\pi}+a_2\frac{T}{2\pi}+a_3\\&=O\left(T\exp\left(-c\sqrt{\log T}\right)\right)\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで c はある正の絶対定数で,

$$a_1=\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}+\gamma_0-1,$$

$$
\begin{aligned}
a_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1}\right)^2 &+ (\gamma_0 - 1)\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1} \\
&- \frac{3}{2}\sum_{p|q}\frac{p\log^2 p}{(p-1)^2} + 1 - \gamma_0 - \gamma_0^2 - \gamma_1
\end{aligned}
$$

であり, ある指標 $\omega \pmod q$ に対する $L(s,\omega)$ が例外零点 β をもつとき

$$
a_3 = \frac{\omega\chi(-1)\tau(\overline{\chi})\tau(\overline{\omega}\chi)}{q\varphi(q)}\frac{L'(\beta,\omega)}{\beta}\left(\frac{qT}{2\pi}\right)^\beta
$$

であり, そうでなければ $a_3 = 0$ である. Dirichlet L-関数に対する一般 Riemann 予想を仮定すれば, $q \ll T^{1-\varepsilon}$ に対して誤差項は $(qT)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ とすることができる. さらに, q が素数のべきであるとき, 誤差項は $(qT)^{\frac{1}{2}}\log^{\frac{7}{2}} qT$ とできる.

従って Dirichlet L-関数でも同様の事実が成り立つことがわかる. 主定理について, いくつか言及すべきことがある.

(i) a_3 を除き, 各主要項の係数は法 q にのみ依存し, 指標 χ には依らない.

(ii) 誤差項に関して, 一般 Riemann 予想を仮定しても直ちに Riemann ζ 関数の場合と同様の評価が得られるわけではない.

2.1 (i) について

この事実は, つまり法が同じで原始的な指標でさえあれば, 考えている和の評価式は第三主要項までは全く同じになるということであり, 平均的には Dirichlet L-関数の零点における微分係数は指標によってそれ程大きな差がないということである. 定理の証明の中で, 法 q の全ての指標の情報を必要とする箇所が存在しているが, それはひとえにこの事実がそうさせているのであり, 従って全ての指標の情報を必要としない証明など存在しないのではないか, などと筆者は考えるものである. 少なくとも主要項は法 q の主指標 χ_0 に付随する Dirichlet L-関数

$$
L(s,\chi_0) = \zeta(s)\prod_{p|q}\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)
$$

の $s = 1$ での留数計算に由来するものである.

2.2 (ii) について

これは (i) にも関連することでもあるが, q が素数のべきでなければ一般 Riemann 予想を仮定しても誤差項が Riemann ζ 関数の場合と同様の評価にはならない. 前節で述べたように, 証明において q を法とする全ての指標の情報を必要とする. その中には非原始的な指標も含まれるわけだが, それを ψ とし, ψ を誘導する $d|q$ なる d を法とする指標を $\psi^\star$ とすると,

$$L(s,\psi)=L(s,\psi^\star)\prod_{\substack{p|q\\ p\nmid d}}\left(1-\frac{\psi^\star(p)}{p^s}\right)$$

である. q が素数のべきならば右辺の積の部分が 1 となり零点は現れないのだが, そうでなければ $\psi^\star(p)\neq 0$ であって, 虚軸上に零点を等間隔に持つ. この虚軸上に現れる零点による留数に由来する項をうまく評価できないのである. 具体的には

$$\sum_{\substack{p|q\\ p\nmid d}}\sum_{0\leq a+\frac{2\pi k}{\log p}\leq U}\frac{L\left(ai+\frac{2\pi ik}{\log p},\psi^\star\right)\log^2 p}{2\pi k}$$

となる項である. ここで $a\geq 0$ は $p^{ai}=\psi^\star(p)$ を満たす最小の実数である.

3 まとめ

第 2 節で見たように, 定理の主張においてはある原始的な指標を固定しているものの, 計算上では結局同じ法の全ての指標について考えなければならない. そのために主要項はほとんど法のみに依存し指標には依らない. 一方で誤差項の計算が一般には上手くいかない部分が存在する. 上手くいかない部分というのは, 実は大体次のような和を計算すればよい.

$$\sum_{\frac{2\pi k}{\log p}\leq U}\left|L\left(\frac{2\pi ki}{\log p},\chi\right)\right|^2$$

つまり虚軸上の等差数列にわたる Dirichlet L-関数の挙動を調べればよい. しかしながらこのような研究は筆者が調べた限りでは存在しなかった. Riemann ζ 関数については critical strip 内で同様の研究がいくつか存在するが, 虚軸及び $\sigma=1$ 上は除外されたものだけである. 筆者が簡単に計算してみると, やはりどうも Gamma 因子のためにうまく計算できそうにない. この和の計算だけなのだが, 以外に難しい問題かもしれない.

謝辞

2019 年度 RIMS 共同研究「解析的整数論とその周辺」にて講演の機会を与えてくださった研究代表者の鈴木正俊先生, 及び研究副代表者の中村隆先生へ厚く御礼申し上げます.

参考文献

[1] A. Fujii, 'On a Conjecture of Shanks', *Proc. Japan Acad.* **70** (1994) 109-114.

[2] S. M. Gonek, 'Mean values of the Riemann zeta-function and its derivatives', *Invent. Math.* **75** (1984), 123–141.

[3] C. Haselgrove and J. C. P. Miller, 'Tables of the Riemann Zeta Function', Royal Society Mathematical Tables, vol. 6, Cambridge University Press, New York, 1960.

[4] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, 'Multiplicative Number Theory: I. Classical Theory', Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 97 (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).

[5] D. Shanks, Review of 'Table of the Riemann Zeta Function by C. B Haselgrove and J. C. P. Miller', *Math. Comp.*, **15** (73) (1961) 84-86.

[6] J. Steuding, 'Dirichlet series associated to periodic arithmetic functions and the zeros of Dirichlet L-functions', *Anal. Proba. Methods in Number Theory, Proc. 3rd Intern. Conf. in Honour of J. Kubilius, Palanga, Lithuania, A. Dubickas et al. (eds.)*, TEV, Vilnius, (2002) 282-296.

[7] T. S. Trudgian 'On a conjecture of Shanks', *J. Number Theory*, **130** No.12 (2010) 2635-2638.